

Nombres complexes (forme trigonométrique et exponentielle) — Terminale maths expertes

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés

Présentation

Un nombre complexe non nul se repère par deux données géométriques : sa distance à l'origine, le module r , et l'angle que fait son vecteur avec l'axe des réels, l'argument θ . D'où les deux écritures $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$, et surtout la propriété qui fait toute la puissance du chapitre : MULTIPLIER deux complexes revient à multiplier les modules et à AJOUTER les arguments. Ces 20 exercices corrigés couvrent tout le programme de maths expertes sur la forme trigonométrique et exponentielle : passage entre les trois écritures, propriétés de l'argument, formule de Moivre et calcul de puissances, formules d'Euler et linéarisation, factorisation par l'angle moitié, rotations et similitudes, ensembles de points définis par un argument, racines n -ièmes de l'unité et d'un complexe quelconque. La difficulté est croissante et les quatre derniers exercices sont des problèmes de synthèse type bac, entièrement rédigés.

Version en ligne, avec les corrections dépliantes :

mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-maths-expertes/nombres-complexes-forme-trigonometrique

Exercice 1 - Module, argument, forme trigonométrique et exponentielle

Pour $z \neq 0$, le module $r = |z|$ est la distance OM , et un argument $\theta = \arg(z)$ est une mesure de l'angle entre l'axe des réels et $\overrightarrow{OM}$. On a alors $z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$. On considère $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$.

1. Calculer $|z_1|$, puis déterminer un argument de z_1 .
2. Écrire z_1 sous forme trigonométrique, puis sous forme exponentielle.
3. Faire de même pour z_2 .

Exercice 2 - De la forme exponentielle à la forme algébrique

Le passage en sens inverse ne demande que les valeurs remarquables du cosinus et du sinus.

1. Donner la forme algébrique de $4e^{i\pi/3}$ et de $3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$.
2. Donner la forme algébrique de $2e^{i\pi}$ et de $5e^{-i\pi/2}$.
3. Donner la forme algébrique de $e^{5i\pi/6}$.

Exercice 3 - Forme exponentielle de nombres particuliers

Les réels et les imaginaires purs ont des arguments remarquables : c'est l'occasion de vérifier qu'on ne confond pas « signe » et « module ».

1. Écrire sous forme exponentielle : -3 , $2i$ et $-5i$.
2. Écrire sous forme exponentielle : $\sqrt{3} - i$ et $-1 - i$.

Exercice 4 - Propriétés du module et de l'argument

Toute la puissance de la forme exponentielle vient d'une règle : multiplier des complexes, c'est multiplier les modules et AJOUTER les arguments. On pose $z = 2e^{i\pi/3}$ et $z' = 3e^{i\pi/6}$.

1. Donner la forme exponentielle de zz' , puis sa forme algébrique.
2. Donner la forme exponentielle de $\frac{z}{z'}$ et de $\frac{1}{z}$.
3. Donner la forme exponentielle de $\bar{z}$ et de $-z$.
4. Calculer z^5 sous forme exponentielle.

Exercice 5 - Valeurs exactes de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$

On veut les valeurs exactes du cosinus et du sinus de $\frac{\pi}{12}$ (soit 15°), qui ne figurent pas dans le tableau des valeurs remarquables. L'idée : fabriquer l'angle $\frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}$ par un QUOTIENT, puis calculer ce quotient de deux façons. On pose $z = 1 + i$ et $w = \sqrt{3} + i$.

1. Écrire z et w sous forme exponentielle.
2. En déduire la forme exponentielle de $Z = \frac{z}{w}$.
3. Calculer Z sous forme algébrique.
4. En déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

Exercice 6 - Formule de Moivre : calculer des puissances

La formule de Moivre s'écrit $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$, ou plus simplement $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$. Elle transforme un calcul de puissance en un calcul d'angle.

1. Calculer $(1 + i)^{12}$.
2. Calculer $(\sqrt{3} + i)^6$.
3. Calculer $(-1 + i)^{10}$, et vérifier le résultat par une autre méthode.

Exercice 7 - Quand une puissance est-elle réelle ?

On pose $z = 1 + i\sqrt{3}$ et, pour tout entier naturel n , $z_n = z^n$.

1. Écrire z sous forme exponentielle, puis z^n .
2. Déterminer les entiers n pour lesquels z^n est réel.
3. Déterminer les entiers n pour lesquels z^n est imaginaire pur.
4. Donner la forme algébrique de z^{2026} .

Exercice 8 - Racines n -ièmes de l'unité

On appelle racines n -ièmes de l'unité les solutions de l'équation $z^n = 1$ dans $\mathbb{C}$.

1. Résoudre $z^4 = 1$, et donner les solutions sous forme algébrique.
2. Résoudre $z^6 = 1$, et donner les solutions sous forme algébrique.

3. Démontrer que la somme des n racines n -ièmes de l'unité est nulle (pour $n \geq 2$).
4. Décrire la figure formée par ces points.

Exercice 9 - Résoudre une équation $z^3 = a$

On résout l'équation $z^3 = 8i$ dans $\mathbb{C}$. La méthode est celle de l'exercice précédent, appliquée à un second membre quelconque : on met les deux côtés sous forme exponentielle et on identifie module et argument.

1. Écrire $8i$ sous forme exponentielle.
2. Résoudre $z^3 = 8i$ et donner les solutions sous forme algébrique.
3. Vérifier l'une des solutions par le calcul direct.

Exercice 10 - Formules d'Euler

Les formules d'Euler $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$ font le chemin inverse de Moivre : elles transforment de la trigonométrie en calcul algébrique sur des exponentielles.

1. Démontrer les deux formules d'Euler.
2. En déduire que $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$ et $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$.
3. Démontrer que $\cos a \cos b = \frac{1}{2}[\cos(a - b) + \cos(a + b)]$.

Exercice 11 - Linéariser une puissance de cosinus ou de sinus

Linéariser, c'est transformer une PUISSANCE de cos ou sin en une somme de cosinus et sinus d'angles multiples — la forme qui se dérive et s'intègre directement. La méthode : Euler, binôme de Newton, puis regroupement des termes conjugués.

1. Linéariser $\cos^3 \theta$.
2. Linéariser $\sin^4 \theta$.
3. Vérifier les deux résultats sur des valeurs particulières.

Exercice 12 - Moivre : exprimer $\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$

C'est l'opération inverse de la linéarisation : on part d'un angle multiple pour l'exprimer en fonction de $\cos \theta$ et $\sin \theta$. L'outil est la formule de Moivre, développée par le binôme.

1. En développant $(\cos \theta + i \sin \theta)^3$, exprimer $\cos 3\theta$ et $\sin 3\theta$.
2. En déduire que $\cos 3\theta = 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta$ et $\sin 3\theta = 3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta$.
3. Vérifier la première formule pour $\theta = \frac{\pi}{6}$.

Exercice 13 - Factorisation par l'angle moitié

Une somme comme $1 + e^{i\theta}$ n'est ni un produit ni une exponentielle : on ne peut pas en lire directement le module et l'argument. La factorisation par l'angle moitié résout ce problème, et c'est l'outil clé des sommes trigonométriques.

1. Démontrer que pour tout réel θ : $1 + e^{i\theta} = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\theta/2}$.
2. En déduire le module et un argument de $1 + e^{i\theta}$ pour $\theta \in]-\pi; \pi[$.
3. Démontrer de même que $1 - e^{i\theta} = -2i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\theta/2}$.
4. Application : donner la forme exponentielle de $1 + e^{i\pi/3}$.

Exercice 14 - Rotations et similitudes

Multiplier par $e^{i\alpha}$ fait tourner d'un angle α autour de l'origine ; multiplier par un réel $k > 0$ agrandit d'un facteur k . D'où l'écriture complexe de la rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle α : $z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$.

1. Déterminer l'axe de l'image de $A(3 + i)$ par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
2. Déterminer l'axe de l'image de $A(3 + i)$ par la rotation de centre $\Omega(1 + i)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
3. Caractériser la transformation qui, à tout point d'axe z , associe le point d'axe $z' = (1 + i)z$.

Exercice 15 - Nature d'un triangle par un quotient d'axes

Le quotient $Z = \frac{c - a}{b - a}$ contient toute l'information sur le triangle ABC vu depuis A : son module vaut $\frac{AC}{AB}$, et son argument est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$.

1. On pose $A(2 + i)$, $B(5 + 2i)$ et $C(1 + 4i)$. Calculer $Z = \frac{c - a}{b - a}$.
2. En déduire la nature du triangle ABC .
3. On pose maintenant $O(0)$, $D(2)$ et $E(1 + i\sqrt{3})$. Déterminer la nature du triangle ODE par la même méthode.

Exercice 16 - Ensembles de points définis par un argument

Un module traduit une distance, un argument traduit un angle : les ensembles obtenus ne sont donc pas les mêmes. M est le point d'axe z , et A, B les points d'axes 1 et -1 .

1. Déterminer l'ensemble E_1 des points M tels que $\arg(z - 1) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$.
2. Déterminer l'ensemble E_2 des points M tels que $\arg(z) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$.
3. Déterminer l'ensemble E_3 des points M tels que $\arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi]$.

Exercice 17 - Racines quatrièmes et factorisation de $z^4 + 4$

On résout $z^4 = -4$ dans $\mathbb{C}$, puis on exploite les solutions pour factoriser le polynôme $z^4 + 4$ en produit de deux trinômes à coefficients RÉELS.

1. Résoudre $z^4 = -4$ et donner les solutions sous forme algébrique.
2. En déduire une factorisation de $z^4 + 4$ en produit de deux trinômes à coefficients réels.

3. Vérifier la factorisation par développement.**Exercice 18 - Suite de points sur un cercle**

On définit la suite (z_n) par $z_0 = 4$ et $z_{n+1} = \frac{\sqrt{3} + i}{2} z_n$. On note M_n le point d'affixe z_n .

1. Écrire la raison $q = \frac{\sqrt{3} + i}{2}$ sous forme exponentielle.
2. Exprimer z_n en fonction de n , et en déduire que tous les points M_n sont sur un même cercle.
3. Montrer que la suite (z_n) est périodique et déterminer sa période.
4. Donner la forme algébrique de z_5 , puis calculer $z_0 + z_1 + \dots + z_{11}$.

Exercice 19 - Somme de cosinus par la suite géométrique

On cherche une expression close de $C_n = 1 + \cos \theta + \cos 2\theta + \dots + \cos(n\theta)$, pour θ non multiple de 2π . Une somme de cosinus ne se calcule pas directement — mais la somme des exponentielles correspondantes, elle, est GÉOMÉTRIQUE.

1. Justifier que $C_n = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n e^{ik\theta} \right)$, puis calculer cette somme.

2. À l'aide de la factorisation par l'angle moitié, montrer que

$$\sum_{k=0}^n e^{ik\theta} = e^{in\theta/2} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

3. En déduire C_n , puis vérifier la formule pour $n = 2$ et $\theta = \frac{\pi}{3}$.

Exercice 20 - Problème de synthèse : une similitude et sa spirale

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct. On considère la transformation f qui, au point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe $z' = (1 + i)z - i$. On note A_0 le point d'affixe 2, et pour tout entier n , $A_{n+1} = f(A_n)$. On note a_n l'affixe de A_n .

1. Déterminer l'unique point Ω invariant par f (c'est-à-dire tel que $f(\Omega) = \Omega$).
2. Montrer que pour tout z , $z' - 1 = (1 + i)(z - 1)$. En déduire la nature de f .
3. Calculer a_1 , a_2 et a_3 .
4. Montrer que $a_n = 1 + (\sqrt{2})^n e^{inn/4}$, puis exprimer la distance ΩA_n .
5. Déterminer le plus petit entier n tel que $\Omega A_n > 1000$, puis les entiers n pour lesquels A_n appartient à la demi-droite $[\Omega A_0)$.