

PGCD, Bézout et Gauss — Terminale maths expertes

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés

Présentation

L'algorithme d'Euclide fait bien plus que calculer un PGCD : en le remontant, il exprime ce PGCD comme combinaison $au + bv$ des deux nombres de départ. De cette identité de Bézout découle tout le reste — le critère de primalité entre deux entiers, le théorème de Gauss, l'inverse d'un nombre modulo n , et la résolution complète des équations $ax + by = c$ en nombres entiers. Ces 20 exercices corrigés couvrent l'ensemble du chapitre en maths expertes : PGCD par les diviseurs, par la décomposition et par l'algorithme d'Euclide, relation entre PGCD et PPCM, nombres premiers entre eux, coefficients de Bézout par remontée, théorème de Gauss et ses applications, équations diophantiennes avec solutions générales puis solutions positives, PGCD dépendant d'un paramètre, systèmes de congruences et chiffrement affine. Chaque correction est rédigée pas à pas, avec la vérification du résultat.

Version en ligne, avec les corrections dépliantes :

mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-maths-expertes/pgcd-bezout-gauss

Exercice 1 - PGCD par les diviseurs et par la décomposition

Le PGCD de deux entiers non nuls est le plus grand de leurs diviseurs communs. Deux méthodes élémentaires permettent de l'obtenir : lister les diviseurs, ou décomposer en facteurs premiers.

1. Déterminer les diviseurs positifs communs de 84 et 60, puis leur PGCD.
2. Retrouver ce PGCD par décomposition en facteurs premiers.
3. En déduire le PPCM de 84 et 60.

Exercice 2 - Algorithme d'Euclide

Lister les diviseurs devient impraticable dès que les nombres grandissent. L'algorithme d'Euclide repose sur une propriété simple : $\text{PGCD}(a; b) = \text{PGCD}(b; r)$ où r est le reste de a par b . On divise, on remplace, on recommence — le dernier reste non nul est le PGCD.

1. Calculer $\text{PGCD}(1071; 462)$ par l'algorithme d'Euclide.
2. Calculer $\text{PGCD}(255; 108)$.
3. Justifier la propriété $\text{PGCD}(a; b) = \text{PGCD}(b; r)$.

Exercice 3 - PGCD, PPCM et leur relation

Le PPCM de deux entiers est le plus petit de leurs multiples communs strictement positifs. Il est lié au PGCD par une relation qui permet de calculer l'un dès qu'on connaît l'autre.

1. Calculer $\text{PGCD}(1071; 462)$ puis $\text{PPCM}(1071; 462)$.
2. Deux feux clignotent, l'un toutes les 12 secondes, l'autre toutes les 18 secondes. Ils viennent de clignoter ensemble : dans combien de temps le feront-ils à nouveau ?

3. Deux roues dentées engrenées comptent 18 et 24 dents. Après combien de tours de chacune retrouve-t-on la position initiale ?

Exercice 4 - Nombres premiers entre eux et fractions irréductibles

Deux entiers sont PREMIERS ENTRE EUX lorsque leur PGCD vaut 1, c'est-à-dire lorsque leur seul diviseur commun positif est 1. Attention : cela ne signifie pas qu'ils sont premiers.

1. Les entiers 35 et 24 sont-ils premiers entre eux ? Sont-ils premiers ?
2. Rendre irréductible la fraction $\frac{1071}{462}$.
3. Démontrer que pour tout entier n , la fraction $\frac{n}{n+1}$ est irréductible.

Exercice 5 - Coefficients de Bézout par remontée

L'identité de Bézout affirme qu'il existe toujours des entiers u et v tels que $au + bv = \text{PGCD}(a; b)$. On les obtient en REMONTANT l'algorithme d'Euclide : on part de l'avant-dernière ligne et on substitue les restes de proche en proche.

1. Écrire les divisions successives de l'algorithme d'Euclide pour 1071 et 462.
2. Remonter l'algorithme pour trouver u et v tels que $1071u + 462v = 21$.
3. Vérifier le résultat.

Exercice 6 - PGCD d'expressions dépendant de n

Pour un PGCD dépendant d'un entier n , la méthode est toujours la même : trouver une combinaison linéaire des deux expressions qui élimine n . Tout diviseur commun divise alors cette constante.

1. Démontrer que $2n + 1$ et $3n + 2$ sont premiers entre eux pour tout entier n .
2. Déterminer les valeurs possibles de $\text{PGCD}(n; n + 2)$.
3. En déduire que la fraction $\frac{2n+1}{3n+2}$ est toujours irréductible.

Exercice 7 - Théorème de Bézout

Le théorème de Bézout est une équivalence : a et b sont premiers entre eux SI ET SEULEMENT S'IL existe des entiers u et v tels que $au + bv = 1$. Le sens direct vient de l'identité de Bézout ; le sens réciproque est celui qu'on utilise pour démontrer.

1. Déterminer u et v tels que $7u + 12v = 1$.
2. Démontrer le sens réciproque : si $au + bv = 1$ pour certains entiers u et v , alors $\text{PGCD}(a; b) = 1$.
3. En déduire que $2n + 1$ et $3n + 2$ sont premiers entre eux (exercice 6), en une ligne.

Exercice 8 - Inverse modulaire

Modulo n , un entier a admet un INVERSE — un entier a' tel que $aa' \equiv 1 [n]$ — si et seulement si a et n sont premiers entre eux. Bézout en fournit la preuve et le calcul.

1. Justifier que 7 admet un inverse modulo 12, et le déterminer à l'aide de l'exercice

- 7.
2. Déterminer l'inverse de 5 modulo 26.
3. Démontrer que si a et n ne sont pas premiers entre eux, a n'a pas d'inverse modulo n .

Exercice 9 - Théorème de Gauss

Le théorème de Gauss énonce : si a divise bc et si a et b sont premiers entre eux, alors a divise c . L'hypothèse de primalité entre a et b est indispensable.

1. Démontrer le théorème de Gauss à l'aide de l'identité de Bézout.
2. Montrer par un contre-exemple que l'hypothèse « a et b premiers entre eux » ne peut pas être supprimée.
3. Application : déterminer les entiers c tels que $7 \mid 5c$.

Exercice 10 - Équation diophantienne : le cas général

Une équation diophantienne $ax + by = c$ se résout en trois temps : condition d'existence, solution particulière, puis solution générale obtenue par le théorème de Gauss. On résout $(E) : 2x + 3y = 5$, puis $12x + 18y = 30$.

1. Justifier que (E) admet des solutions, et en trouver une évidente.
2. Résoudre (E) dans $\mathbb{Z}^2$.
3. Résoudre $12x + 18y = 30$.

Exercice 11 - Équation diophantienne avec coefficients de signes opposés

On résout $(E) : 7x - 12y = 5$ dans $\mathbb{Z}^2$. Le signe négatif ne change rien à la méthode, mais il modifie l'allure des solutions.

1. Justifier l'existence de solutions et en déterminer une particulière.
2. Résoudre (E) dans $\mathbb{Z}^2$.
3. Déterminer les solutions telles que $0 \leq x \leq 50$.

Exercice 12 - Un problème concret

Un libraire vend deux formats de carnets : les petits à 7 € et les grands à 12 €. Une matinée, sa recette sur ces carnets s'élève à 100 €. On cherche combien il a vendu de carnets de chaque sorte.

1. Mettre le problème en équation, en précisant les contraintes sur les inconnues.
2. Résoudre l'équation dans $\mathbb{Z}^2$.
3. Déterminer toutes les solutions possibles pour le libraire.

Exercice 13 - PGCD avec paramètre : discussion complète

On étudie $d_n = \text{PGCD}(n + 2 ; 3n + 1)$ selon les valeurs de l'entier naturel n .

1. Démontrer que d_n divise 5.
2. Déterminer les valeurs de n pour lesquelles $d_n = 5$.

3. Conclure par une discussion complète, et vérifier sur deux exemples.

Exercice 14 - Système de congruences par Bézout

Le chapitre précédent résolvait les systèmes de congruences par balayage. Avec un inverse modulaire, la résolution devient directe. On cherche les entiers x tels que $x \equiv 3 [7]$ et $x \equiv 5 [11]$.

1. Traduire la première condition, puis reporter dans la seconde.
2. Résoudre la congruence obtenue à l'aide d'un inverse modulaire.
3. Conclure et vérifier.

Exercice 15 - Fractions irréductibles et simplification

Une fraction $\frac{a}{b}$ est irréductible lorsque a et b sont premiers entre eux. Décider si une fraction dépendant de n est irréductible revient donc à un calcul de PGCD avec paramètre.

1. La fraction $\frac{n+1}{2n+3}$ est-elle irréductible pour tout entier naturel n ?
2. Même question pour $\frac{3n+4}{n+1}$.
3. Pour quelles valeurs de n la fraction $\frac{2n+3}{5n+2}$ est-elle réductible ?

Exercice 16 - Multiples communs et cycles

Trois phares émettent un éclat respectivement toutes les 15, 18 et 24 secondes. Ils viennent d'émettre simultanément à l'instant $t = 0$.

1. Dans combien de temps les deux premiers phares seront-ils à nouveau synchrones ?
2. Dans combien de temps les trois le seront-ils ?
3. Combien de fois les trois phares seront-ils synchrones au cours d'une heure (instant initial exclu) ?

Exercice 17 - Solutions positives d'une équation diophantienne

On cherche tous les couples d'entiers NATURELS $(x; y)$ vérifiant $23x + 17y = 1000$. La résolution générale ne suffit pas : il faut ensuite encadrer le paramètre.

1. Déterminer, par l'algorithme d'Euclide, des entiers u et v tels que $23u + 17v = 1$.
2. En déduire une solution particulière puis la solution générale de l'équation.
3. Déterminer toutes les solutions en entiers naturels.

Exercice 18 - Résoudre une congruence avec un grand module

On résout $17x \equiv 5 [26]$. Le balayage des 26 restes fonctionnerait, mais l'inverse modulaire donne la réponse en trois lignes — et reste praticable pour des modules bien plus grands.

1. Justifier que l'équation admet une unique solution modulo 26.

2. Déterminer l'inverse de 17 modulo 26 par l'algorithme d'Euclide.
3. Résoudre l'équation et vérifier.

Exercice 19 - Problème type bac : congruences et dénombrement

On cherche les entiers naturels n vérifiant simultanément $n \equiv 1 [5]$ et $n \equiv 3 [8]$.

1. Déterminer une solution particulière.
2. Démontrer que l'ensemble des solutions est $n \equiv 11 [40]$.
3. Déterminer le nombre de solutions comprises entre 1 et 1000, ainsi que la plus grande.

Exercice 20 - Problème de synthèse : Bézout et déchiffrement

On considère l'équation $(E) : 11x - 26y = 1$, d'inconnues entières x et y . Elle va servir à déchiffrer un code affine où chaque lettre de rang x (avec $A = 0, \dots, Z = 25$) est codée par la lettre de rang $y \equiv 11x + 4 [26]$.

1. Justifier que (E) admet des solutions, et en déterminer une par l'algorithme d'Euclide.
2. Résoudre (E) dans $\mathbb{Z}^2$.
3. En déduire l'inverse de 11 modulo 26, puis résoudre $11x \equiv 7 [26]$.
4. Établir la formule de déchiffrement du code affine, et décoder la lettre G .