Continuité et théorème des valeurs intermédiaires — Terminale spécialité

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

Une fonction est continue si sa courbe se trace « sans lever le crayon ». Le théorème des valeurs intermédiaires (TVI) garantit qu'une fonction continue prend toutes les valeurs comprises entre deux de ses images ; sa version stricte (fonction strictement monotone) prouve l'unicité d'une solution. Ces exercices corrigés couvrent continuité, TVI, corollaire de la bijection et résolution approchée, du plus simple au type bac. Difficulté croissante, correction d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-specialite/continuite

Exercice 1 – Continuité d'une fonction usuelle

La fonction $f(x) = x^2 - 3x + 1$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Justifier.

Exercice 2 – Domaine de continuité

Sur quel ensemble la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ est-elle continue ?

Exercice 3 – Lien dérivable ⇒ continue

On sait que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Peut-on affirmer qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 4 – Ce que dit (et ne dit pas) le TVI

f est continue sur $[1\,;4]$ avec $f(1) = 5$ et $f(4) = -2$. L'équation $f(x) = 0$ a-t-elle une solution dans $[1\,;4]$? Et l'équation $f(x) = 7$?

Exercice 5 – Existence d'une solution (TVI)

Soit $f(x) = x^3 + x - 1$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[0\,;1]$.

Exercice 6 – Rédiger le TVI proprement

Soit $f(x) = e^x + x$. Montrer que $f(x) = 2$ admet une solution dans $[0\,;1]$.

Exercice 7 – Tableau de signes par le TVI

Une fonction f continue vérifie $f(2) = -3$ et $f(5) = 4$. Peut-on être certain que f s'annule sur $]2\,;5[$?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 8 – Choisir un paramètre pour la continuité

Soit $f(x) = x^2 + a$ si $x < 2$ et $f(x) = 3x - 1$ si $x \geq 2$. Déterminer a pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9 – Unicité avec la monotonie

Soit $f(x) = x^3 + x - 1$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

Exercice 10 – Encadrement de la solution

On note α l'unique solution de $x^3 + x - 1 = 0$. Sachant $f(0) = -1$, $f(0{,}5) = -0{,}375$ et $f(1) = 1$, donner un encadrement de α à l'unité, puis dire dans quel demi-intervalle elle se trouve.

Exercice 11 – Fonction définie par morceaux

Soit f définie par $f(x) = x + 1$ si $x \leq 1$ et $f(x) = 3x - 1$ si $x > 1$. f est-elle continue en 1 ?

Exercice 12 – Nombre de solutions par tableau

Une fonction f continue a pour tableau de variations : croissante de $f(-\infty) = -\infty$ à $f(0) = 4$, puis décroissante de $f(0) = 4$ à $f(+\infty) = -1$. Combien l'équation $f(x) = 2$ a-t-elle de solutions ?

Exercice 13 – Unicité et encadrement : x + ln x = 0

Soit $f(x) = x + \ln x$ sur $]0\,;+\infty[$. Montrer que $f(x) = 0$ a une unique solution α, puis l'encadrer à 10^{-2} près.

Exercice 14 – Type bac : étude complète et TVI

Soit $f(x) = x^3 - 3x + 1$ sur $\mathbb{R}$. 1) Étudier les variations de f. 2) En déduire le nombre de solutions de $f(x) = 0$.

Exercice 15 – Type bac : seuil avec exponentielle

Soit $f(x) = e^x - 3x$ sur $\mathbb{R}$. 1) Montrer que f' s'annule en $x = \ln(3)$. 2) Justifier que $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions.

Exercice 16 – Type bac : valeur approchée à 10⁻²

On note α l'unique solution de $e^x + x = 0$. 1) Justifier l'existence et l'unicité de α. 2) Sachant $f(-0{,}57) \approx -0{,}005$ et $f(-0{,}56) \approx 0{,}011$ (avec $f(x) = e^x + x$), donner une valeur approchée de α à 10^{-2}.

Exercice 17 – Type bac : TVI avec logarithme

Soit $f(x) = \ln(x) + x - 3$ sur $]0;+\infty[$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, située dans $[1\,;e]$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 18 – Type bac : nombre de solutions par tableau

Une fonction f continue est croissante de $-\infty$ à $f(0) = 2$, décroissante de 2 à $f(2) = -3$, puis croissante de -3 à $+\infty$. Combien l'équation $f(x) = 1$ a-t-elle de solutions ?

Exercice 19 – Type bac : équation x³ + 3x − 5 = 0 (TVI et balayage)

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x - 5$, de courbe C.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. Calculer $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f.

3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, et que $1 < \alpha < 2$.

4. Par balayage, donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

5. En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Exercice 20 – Type bac : l'équation cos x = x

On considère $g(x) = \cos x - x$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

1. Étudier les variations de g.

2. Montrer que l'équation $\cos x = x$ admet une unique solution α dans $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

3. Encadrer α à 10^{-2} près.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Continuité d'une fonction usuelle

f est une fonction polynôme.

Or toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.

Donc f est continue sur $\mathbb{R}$.

Réponse. Oui, f est continue sur $\mathbb{R}$ (fonction polynôme).

Rappel de cours. Polynômes, exp, cos, sin sont continues sur $\mathbb{R}$; ln et $\sqrt{\ }$ sur leur domaine. Sommes, produits et composées de fonctions continues le sont aussi.

Correction de l'exercice 2 – Domaine de continuité

f est une fonction rationnelle, définie partout sauf là où le dénominateur s'annule.

$x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$: la fonction n'est pas définie en 1.

f est continue sur son domaine, c'est-à-dire $]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$.

Réponse. f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, soit $]-\infty ; 1[\cup]1 ; +\infty[$.

Rappel de cours. Une fonction rationnelle est continue sur tout son ensemble de définition (on exclut les valeurs annulant le dénominateur).

Correction de l'exercice 3 – Lien dérivable ⇒ continue

Le cours établit qu'une fonction dérivable en un point y est continue.

Si f est dérivable sur tout $\mathbb{R}$, elle est donc continue en chaque point.

Conclusion : oui, f est continue sur $\mathbb{R}$.

Réponse. Oui : dérivable sur $\mathbb{R}$ entraîne continue sur $\mathbb{R}$.

Rappel de cours. « Dérivable ⇒ continue ». La réciproque est fausse : $x \mapsto |x|$ est continue en 0 mais pas dérivable.

Erreur fréquente. Ne pas confondre le sens : continue n'entraîne PAS dérivable. C'est seulement dérivable qui entraîne continue.

Correction de l'exercice 4 – Ce que dit (et ne dit pas) le TVI

0 est compris entre $f(4) = -2$ et $f(1) = 5$, et f est continue : d'après le TVI, $f(x) = 0$ a au moins une solution dans $[1\,;4]$.

7 n'est pas compris entre -2 et 5 : le TVI ne permet pas de conclure. Il peut y avoir une solution (si f monte au-dessus de 7 entre 1 et 4) ou non.

Réponse. Oui pour $f(x) = 0$; on ne peut pas conclure pour $f(x) = 7$.

Rappel de cours. TVI : si f est continue sur $[a\,;b]$, toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$ est atteinte au moins une fois.

Correction de l'exercice 5 – Existence d'une solution (TVI)

f est continue sur $[0;1]$ (fonction polynôme).

$f(0) = 0 + 0 - 1 = -1$ et $f(1) = 1 + 1 - 1 = 1$. Donc 0 est compris entre $f(0) = -1$ et $f(1) = 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel $c \in [0;1]$ tel que $f(c) = 0$.

Réponse. L'équation $f(x) = 0$ a au moins une solution dans $[0;1]$ (TVI).

Rappel de cours. TVI : si f est continue sur $[a;b]$ et si k est entre $f(a)$ et $f(b)$, alors l'équation $f(x) = k$ a au moins une solution dans $[a;b]$.

Correction de l'exercice 6 – Rédiger le TVI proprement

f est continue sur $[0;1]$ (somme de e^x et de x, continues).

$f(0) = e^0 + 0 = 1$ et $f(1) = e + 1 \approx 3{,}72$. La valeur 2 est comprise entre 1 et 3,72.

Par le TVI, l'équation $f(x) = 2$ admet au moins une solution dans $[0;1]$.

Réponse. $f(x) = 2$ admet une solution dans $[0;1]$ (TVI : f continue, $2 \in [f(0);f(1)]$).

Rappel de cours. Rédaction type : (1) continuité, (2) calcul de $f(a)$ et $f(b)$ encadrant k, (3) conclusion par le TVI.

Correction de l'exercice 7 – Tableau de signes par le TVI

f est continue sur $[2;5]$ et 0 est compris entre $f(2) = -3$ et $f(5) = 4$.

Par le TVI, il existe $c \in]2;5[$ tel que $f(c) = 0$: oui, f s'annule.

En revanche, sans information sur la monotonie, on ne peut pas dire si elle s'annule une seule fois.

Réponse. Oui, f s'annule au moins une fois sur $]2;5[$ (TVI), mais l'unicité n'est pas garantie ici.

Erreur fréquente. Le TVI seul donne « au moins une » solution. Pour « exactement une », il faut la stricte monotonie (corollaire de la bijection).

Correction de l'exercice 8 – Choisir un paramètre pour la continuité

Chaque morceau est un polynôme, continu sur son intervalle. Le seul point à vérifier est $x = 2$.

$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 4 + a$ et $f(2) = 3 \times 2 - 1 = 5$.

Continuité en 2 : $4 + a = 5$, donc $a = 1$.

Réponse. $a = 1$.

Rappel de cours. f est continue en a si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ (limites à gauche et à droite égales à $f(a)$).

Correction de l'exercice 9 – Unicité avec la monotonie

f est dérivable et $f'(x) = 3x^2 + 1$. Comme $3x^2 \geq 0$, on a $f'(x) \geq 1 > 0$: f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

f est continue, strictement croissante, avec $\lim_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$.

D'après le corollaire du TVI (théorème de la bijection), f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$: 0 a un unique antécédent. L'équation $f(x) = 0$ a donc une unique solution.

Réponse. $f(x) = 0$ admet une unique solution réelle (f continue et strictement croissante).

Rappel de cours. Corollaire (bijection) : si f est continue ET strictement monotone sur $[a;b]$, alors $f(x) = k$ a une unique solution pour tout k entre $f(a)$ et $f(b)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 10 – Encadrement de la solution

f est strictement croissante et s'annule en α. $f(0) < 0$ et $f(1) > 0$, donc $0 < \alpha < 1$.

$f(0{,}5) = -0{,}375 < 0$: comme f est croissante, α est après 0,5. Donc $0{,}5 < \alpha < 1$.

Réponse. $0 < \alpha < 1$, et plus précisément $0{,}5 < \alpha < 1$.

Rappel de cours. Méthode par balayage : on resserre l'intervalle en évaluant f en des points intermédiaires et en regardant le changement de signe.

Correction de l'exercice 11 – Fonction définie par morceaux

Limite à gauche : pour $x \to 1^-$, $f(x) = x + 1 \to 2$.

Limite à droite : pour $x \to 1^+$, $f(x) = 3x - 1 \to 2$. Et $f(1) = 1 + 1 = 2$.

Les deux limites et la valeur $f(1)$ coïncident ($= 2$) : f est continue en 1.

Réponse. Oui, f est continue en 1 (les deux morceaux « se raccordent » à la valeur 2).

Rappel de cours. Continuité en a : $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$. Pour une fonction par morceaux, on vérifie le raccord.

Correction de l'exercice 12 – Nombre de solutions par tableau

Sur $]-\infty ; 0]$, f est continue strictement croissante de $-\infty$ à 4 : comme $2 \in]-\infty ; 4]$, il y a exactement une solution.

Sur $[0 ; +\infty[$, f est continue strictement décroissante de 4 à -1 : comme $2 \in]-1 ; 4]$, il y a exactement une solution.

Au total, l'équation $f(x) = 2$ a deux solutions.

Réponse. L'équation $f(x) = 2$ admet exactement 2 solutions.

Rappel de cours. Sur chaque intervalle de stricte monotonie, on applique le corollaire : une solution si k est dans l'image de l'intervalle, aucune sinon.

Correction de l'exercice 13 – Unicité et encadrement : x + ln x = 0

f est continue et $f'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$: f est strictement croissante.

$\lim_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$ (car $\ln x \to -\infty$) et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Corollaire du TVI (fonction continue strictement monotone) : $f(x) = 0$ a une unique solution α.

Balayage : $f(0{,}56) \approx -0{,}020 < 0$ et $f(0{,}57) \approx 0{,}008 > 0$, donc $0{,}56 < \alpha < 0{,}57$.

Réponse. Unique solution $\alpha \in]0{,}56\,;\,0{,}57[$.

Rappel de cours. Existence : TVI. Unicité : stricte monotonie. Les deux ensemble forment le « corollaire du TVI ».

Correction de l'exercice 14 – Type bac : étude complète et TVI

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$. f' s'annule en -1 et 1, positive à l'extérieur, négative entre : f croît sur $]-\infty ; -1]$, décroît sur $[-1 ; 1]$, croît sur $[1 ; +\infty[$.

Valeurs : $f(-1) = -1 + 3 + 1 = 3$ (maximum local), $f(1) = 1 - 3 + 1 = -1$ (minimum local). Limites : $-\infty$ en $-\infty$, $+\infty$ en $+\infty$.

Sur $]-\infty ; -1]$: f croît de $-\infty$ à 3, passe par 0 une fois. Sur $[-1 ; 1]$: f décroît de 3 à -1, passe par 0 une fois. Sur $[1 ; +\infty[$: f croît de -1 à $+\infty$, passe par 0 une fois.

Par le corollaire du TVI appliqué sur chaque intervalle, $f(x) = 0$ a exactement trois

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

solutions.

Réponse. f admet un max local $f(-1) = 3$, un min local $f(1) = -1$; l'équation $f(x) = 0$ a 3 solutions.

Rappel de cours. On découpe $\mathbb{R}$ selon les intervalles de monotonie, puis on applique le corollaire de la bijection sur chacun pour compter les solutions.

Correction de l'exercice 15 – Type bac : seuil avec exponentielle

$f'(x) = e^x - 3$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln(3)$. f' est négative avant $\ln(3)$, positive après : minimum en $\ln(3)$.

$f(\ln(3)) = e^{\ln(3)} - 3\ln(3) = 3 - 3\ln(3) = 3(1 - \ln(3))$. Comme $\ln(3) \approx 1{,}1 > 1$, ce minimum est strictement négatif.

Sur $]-\infty; \ln(3)]$, f décroît de $+\infty$ (car $\lim_{-\infty} f = +\infty$) à un minimum < 0 : une solution. Sur $[\ln(3); +\infty[$, f croît du minimum < 0 à $+\infty$ (croissance comparée) : une solution.

Donc $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions.

Réponse. $f'(\ln(3)) = 0$, minimum $f(\ln(3)) = 3(1 - \ln(3)) < 0$; l'équation $f(x) = 0$ a exactement 2 solutions.

Rappel de cours. En $-\infty$, $e^x \to 0$ donc $f(x) = e^x - 3x \to +\infty$; en $+\infty$, e^x l'emporte donc $f \to +\infty$. Un minimum négatif entre les deux donne deux solutions.

Correction de l'exercice 16 – Type bac : valeur approchée à 10^{-2}

$f'(x) = e^x + 1 > 0$: f est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec $\lim_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$. Par le corollaire du TVI, $f(x) = 0$ a une unique solution α.

$f(-0{,}57) < 0$ et $f(-0{,}56) > 0$, et f est croissante : donc $-0{,}57 < \alpha < -0{,}56$.

Une valeur approchée à 10^{-2} près est $\alpha \approx -0{,}57$ (par défaut) ou $-0{,}56$ (par excès).

Réponse. α existe et est unique ; $-0{,}57 < \alpha < -0{,}56$, soit $\alpha \approx -0{,}57$ à 10^{-2} près.

Rappel de cours. Encadrer à 10^{-2} signifie trouver deux valeurs distantes de 0,01 entourant α, repérées par le changement de signe de f.

Correction de l'exercice 17 – Type bac : TVI avec logarithme

f est continue et dérivable, $f'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0$: f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

$f(1) = 0 + 1 - 3 = -2 < 0$ et $f(e) = 1 + e - 3 = e - 2 \approx 0{,}72 > 0$.

f continue, strictement croissante, changeant de signe sur $[1; e]$: par le corollaire du TVI, $f(x) = 0$ a une unique solution, dans $[1; e]$.

Réponse. Unique solution, dans $[1; e]$.

Rappel de cours. Continue + strictement monotone + changement de signe $\Rightarrow$ une unique solution (corollaire de la bijection).

Correction de l'exercice 18 – Type bac : nombre de solutions par tableau

Sur $]-\infty; 0]$: f croît de $-\infty$ à 2 ; $1 \in]-\infty; 2] \Rightarrow$ une solution.

Sur $[0; 2]$: f décroît de 2 à -3 ; $1 \in [-3; 2] \Rightarrow$ une solution.

Sur $[2; +\infty[$: f croît de -3 à $+\infty$; $1 \in [-3; +\infty[\Rightarrow$ une solution. Total : 3.

Réponse. L'équation $f(x) = 1$ a 3 solutions.

Rappel de cours. Sur chaque intervalle de stricte monotonie, le corollaire du TVI donne

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

au plus une solution.

Correction de l'exercice 19 – Type bac : équation x³ + 3x − 5 = 0 (TVI et balayage)

$f(x) = x^3(1 + \frac{3}{x^2} - \frac{5}{x^3})$; le terme dominant est x^3, donc $\lim_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim_{+\infty} f = +\infty$.

$f'(x) = 3x^2 + 3 = 3(x^2 + 1) > 0$ pour tout x : f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

f est continue (fonction polynôme) et strictement croissante de $-\infty$ à $+\infty$: d'après le corollaire du TVI (théorème de la bijection), $f(x) = 0$ admet une unique solution α. De plus $f(1) = 1 + 3 - 5 = -1 < 0$ et $f(2) = 8 + 6 - 5 = 9 > 0$, donc $1 < \alpha < 2$.

$f(1{,}1) = 1{,}331 + 3{,}3 - 5 = -0{,}369 < 0$ et $f(1{,}2) = 1{,}728 + 3{,}6 - 5 = 0{,}328 > 0$. Donc $1{,}1 < \alpha < 1{,}2$.

f étant strictement croissante et s'annulant en α : $f(x) < 0$ pour $x < \alpha$ et $f(x) > 0$ pour $x > \alpha$.

Réponse. f strictement croissante, $\lim_{\pm\infty} f = \pm\infty$; unique solution α avec $1{,}1 < \alpha < 1{,}2$; $f < 0$ avant α, $f > 0$ après.

Rappel de cours. Corollaire du TVI : une fonction continue et strictement monotone réalise une bijection ; l'équation $f(x) = k$ a alors une solution unique.

Correction de l'exercice 20 – Type bac : l'équation cos x = x

1) $g'(x) = -\sin x - 1$. Comme $\sin x \geq 0$ sur cet intervalle, $g'(x) \leq -1 < 0$: g est strictement décroissante.

2) g est continue, $g(0) = 1 > 0$ et $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} < 0$. Par le corollaire du TVI, $g(x) = 0$ a une unique solution α, c'est-à-dire $\cos\alpha = \alpha$.

3) Calculatrice (en radians) : $g(0{,}73) \approx 0{,}015 > 0$ et $g(0{,}74) \approx -0{,}002 < 0$. Donc $0{,}73 < \alpha < 0{,}74$.

Réponse. Unique solution $\alpha \approx 0{,}74$, avec $0{,}73 < \alpha < 0{,}74$.

Rappel de cours. Pour une équation $f(x) = g(x)$, on étudie la différence $f - g$ et on cherche où elle s'annule.

Erreur fréquente. Calculatrice en mode radians obligatoirement.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).