Continuité et théorème des valeurs intermédiaires — Terminale spécialité

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés

Présentation

Une fonction est continue si sa courbe se trace « sans lever le crayon ». Le théorème des valeurs intermédiaires (TVI) garantit qu'une fonction continue prend toutes les valeurs comprises entre deux de ses images ; sa version stricte (fonction strictement monotone) prouve l'unicité d'une solution. Ces exercices corrigés couvrent continuité, TVI, corollaire de la bijection et résolution approchée, du plus simple au type bac. Difficulté croissante, correction d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-specialite/continuite

Exercice 1 – Continuité d'une fonction usuelle

La fonction $f(x) = x^2 - 3x + 1$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$? Justifier.

Exercice 2 – Domaine de continuité

Sur quel ensemble la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ est-elle continue ?

Exercice 3 – Lien dérivable ⇒ continue

On sait que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Peut-on affirmer qu'elle est continue sur $\mathbb{R}$?

Exercice 4 – Ce que dit (et ne dit pas) le TVI

f est continue sur $[1\,;4]$ avec $f(1) = 5$ et $f(4) = -2$. L'équation $f(x) = 0$ a-t-elle une solution dans $[1\,;4]$? Et l'équation $f(x) = 7$?

Exercice 5 – Existence d'une solution (TVI)

Soit $f(x) = x^3 + x - 1$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[0\,;1]$.

Exercice 6 – Rédiger le TVI proprement

Soit $f(x) = e^x + x$. Montrer que $f(x) = 2$ admet une solution dans $[0\,;1]$.

Exercice 7 – Tableau de signes par le TVI

Une fonction f continue vérifie $f(2) = -3$ et $f(5) = 4$. Peut-on être certain que f s'annule sur $]2\,;5[$?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 8 – Choisir un paramètre pour la continuité

Soit $f(x) = x^2 + a$ si $x < 2$ et $f(x) = 3x - 1$ si $x \geq 2$. Déterminer a pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9 – Unicité avec la monotonie

Soit $f(x) = x^3 + x - 1$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

Exercice 10 – Encadrement de la solution

On note α l'unique solution de $x^3 + x - 1 = 0$. Sachant $f(0) = -1$, $f(0{,}5) = -0{,}375$ et $f(1) = 1$, donner un encadrement de α à l'unité, puis dire dans quel demi-intervalle elle se trouve.

Exercice 11 – Fonction définie par morceaux

Soit f définie par $f(x) = x + 1$ si $x \leq 1$ et $f(x) = 3x - 1$ si $x > 1$. f est-elle continue en 1 ?

Exercice 12 – Nombre de solutions par tableau

Une fonction f continue a pour tableau de variations : croissante de $f(-\infty) = -\infty$ à $f(0) = 4$, puis décroissante de $f(0) = 4$ à $f(+\infty) = -1$. Combien l'équation $f(x) = 2$ a-t-elle de solutions ?

Exercice 13 – Unicité et encadrement : x + ln x = 0

Soit $f(x) = x + \ln x$ sur $]0\,;+\infty[$. Montrer que $f(x) = 0$ a une unique solution α, puis l'encadrer à 10^{-2} près.

Exercice 14 – Type bac : étude complète et TVI

Soit $f(x) = x^3 - 3x + 1$ sur $\mathbb{R}$. 1) Étudier les variations de f. 2) En déduire le nombre de solutions de $f(x) = 0$.

Exercice 15 – Type bac : seuil avec exponentielle

Soit $f(x) = e^x - 3x$ sur $\mathbb{R}$. 1) Montrer que f' s'annule en $x = \ln(3)$. 2) Justifier que $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions.

Exercice 16 – Type bac : valeur approchée à 10⁻²

On note α l'unique solution de $e^x + x = 0$. 1) Justifier l'existence et l'unicité de α. 2) Sachant $f(-0{,}57) \approx -0{,}005$ et $f(-0{,}56) \approx 0{,}011$ (avec $f(x) = e^x + x$), donner une valeur approchée de α à 10^{-2}.

Exercice 17 – Type bac : TVI avec logarithme

Soit $f(x) = \ln(x) + x - 3$ sur $]0;+\infty[$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution, située dans $[1\,;e]$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 18 – Type bac : nombre de solutions par tableau

Une fonction f continue est croissante de $-\infty$ à $f(0) = 2$, décroissante de 2 à $f(2) = -3$, puis croissante de -3 à $+\infty$. Combien l'équation $f(x) = 1$ a-t-elle de solutions ?

Exercice 19 – Type bac : équation x³ + 3x − 5 = 0 (TVI et balayage)

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x - 5$, de courbe C.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. Calculer $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de f.

3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, et que $1 < \alpha < 2$.

4. Par balayage, donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

5. En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

Exercice 20 – Type bac : l'équation cos x = x

On considère $g(x) = \cos x - x$ sur $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

1. Étudier les variations de g.

2. Montrer que l'équation $\cos x = x$ admet une unique solution α dans $\left[0\,;\frac{\pi}{2}\right]$.

3. Encadrer α à 10^{-2} près.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).