Dérivation et convexité — Terminale spécialité

40 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

La dérivée f' donne le coefficient directeur de la tangente et, par son signe, les variations de f. En Terminale spécialité on enrichit les formules : produit, quotient, et surtout la dérivée d'une fonction composée $(g \circ u)' = u' \times g'(u)$. La dérivée seconde f'' dit ensuite si la courbe est convexe (en cuvette, $f'' \geq 0$) ou concave ($f'' \leq 0$), et un point d'inflexion est un point où f'' change de signe. Ces exercices corrigés couvrent dérivées de référence, produit, quotient, composée, tangente, études de fonctions, puis dérivée seconde, convexité, points d'inflexion et position courbe/tangente, jusqu'au type bac. Difficulté croissante, correction d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-specialite/derivees

Exercice 1 – Dérivées de référence

Dériver $f(x) = x^4$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$ et $h(x) = \sqrt{x}$.

Exercice 2 – Dérivée d'une somme

Dériver $f(x) = 3x^2 - 5x + 7$.

Exercice 3 – Exponentielle et logarithme d'une fonction affine

Dériver $f(x) = e^{3x-1}$ sur $\mathbb{R}$ et $g(x) = \ln(2x+5)$ sur $\left]-\frac{5}{2}\,;+\infty\right[$.

Exercice 4 – Calculer une dérivée seconde

Soit $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5$. Calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$.

Exercice 5 – Convexité d'une parabole

La fonction $f(x) = x^2$ est-elle convexe ou concave sur $\mathbb{R}$?

Exercice 6 – Convexité de référence

Étudier la convexité de $f(x) = e^x$ et de $g(x) = \ln(x)$ (sur $]0;+\infty[$).

Exercice 7 – Convexité de x⁴

Étudier la convexité de $f(x) = x^4$ sur $\mathbb{R}$. Sa courbe a-t-elle un point d'inflexion en 0 ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 8 – Dérivée d'un produit

Dériver $f(x) = (2x + 1)(x^2 - 3)$.

Exercice 9 – Dérivée d'un quotient

Dériver $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ sur $]-1; +\infty[$.

Exercice 10 – Dérivée de (ax+b)ⁿ

Dériver $f(x) = (3x - 2)^4$.

Exercice 11 – Équation de tangente

Soit $f(x) = x^2$. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse $a = 1$.

Exercice 12 – Racine d'un trinôme

Dériver $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$ sur $\mathbb{R}$ et simplifier.

Exercice 13 – Intervalles de convexité

Soit $f(x) = x^3$. Déterminer sur quels intervalles f est convexe ou concave.

Exercice 14 – Point d'inflexion

Soit $f(x) = x^3 - 3x$. Montrer que la courbe admet un point d'inflexion en $x = 0$.

Exercice 15 – Convexité d'un trinôme

Étudier la convexité de $f(x) = -2x^2 + 3x - 1$.

Exercice 16 – Convexité lue sur f′

On sait que f' est décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et croissante sur $[0\,;+\infty[$. Que peut-on dire de la convexité de f et de sa courbe en 0 ?

Exercice 17 – Dérivée de eᵘ et ln(u)

Dériver $f(x) = e^{x^2}$ et $g(x) = \ln(x^2 + 1)$.

Exercice 18 – Variations par le signe de f′

Soit $f(x) = x^3 - 12x$. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations.

Exercice 19 – Tangente parallèle à une droite

Soit $f(x) = x^2 - 4x$. En quel(s) point(s) la tangente à la courbe est-elle parallèle à la droite $y = 2x + 5$?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 20 – Tangente horizontale

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Déterminer les points où la tangente est horizontale.

Exercice 21 – Puissance d'un logarithme, cosinus composé

Dériver $f(x) = (\ln x)^3$ sur $]0\,;+\infty[$ et $g(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 22 – Tableau de convexité

Soit $f(x) = x^4 - 6x^2$. Étudier le signe de $f''(x)$ et en déduire les intervalles de convexité.

Exercice 23 – Position courbe / tangente

Soit $f(x) = x^2$, convexe sur $\mathbb{R}$. Que peut-on dire de la position de la courbe par rapport à ses tangentes ?

Exercice 24 – Convexité de e^x composée

Soit $f(x) = e^{-x^2}$. Calculer $f''(x)$ et déterminer les abscisses des points d'inflexion.

Exercice 25 – Lecture graphique de la convexité

On lit sur un graphique que $f''(x) > 0$ sur $]-\infty; 2[$ et $f''(x) < 0$ sur $]2; +\infty[$. Que peut-on dire de la courbe en $x = 2$ et de sa convexité ?

Exercice 26 – Points d'inflexion de ln(x² + 1)

Soit $f(x) = \ln(x^2 + 1)$. Montrer que $f''(x) = \dfrac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}$ et étudier la convexité de f.

Exercice 27 – Type bac : produit avec exponentielle

Soit $f(x) = (x^2 - 2x)e^x$. 1) Montrer que $f'(x) = (x^2 - 2)e^x$. 2) En déduire les variations de f.

Exercice 28 – Type bac : quotient et asymptote

Soit $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$ pour $x > 0$. 1) Calculer $f'(x)$. 2) En déduire le minimum de f sur $]0; +\infty[$.

Exercice 29 – Type bac : tangente passant par un point donné

Soit $f(x) = x^2$. Déterminer les tangentes à la courbe passant par le point $A(0\,;-1)$.

Exercice 30 – Type bac : étude de x·e⁻ˣ

Soit $f(x) = x\,e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$. Calculer $f'(x)$ et donner le maximum de f.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 31 – Type bac : tangente à ln en 1

Soit $f(x) = \ln(x)$. Déterminer la tangente à la courbe en $x = 1$, puis en déduire une inégalité.

Exercice 32 – Type bac : étude d'une fonction et nombre de solutions

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 + x + 1)\,e^{-x}$, de courbe C. On rappelle que $\lim_{x \to +\infty} x^n e^{-x} = 0$ pour tout entier $n \geq 0$.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = (-x^2 + x)\,e^{-x}$.

3. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

4. Déterminer une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 0.

5. Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.

Exercice 33 – Type bac : une dérivée qui se simplifie

Soit $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$ sur $\mathbb{R}$.

1. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

3. En déduire le sens de variation de f et l'équation de la tangente en 0.

Exercice 34 – Type bac : inégalité par convexité

Sachant que exp est convexe, sa courbe est au-dessus de sa tangente en 0. En déduire que pour tout réel x, $e^x \geq x + 1$.

Exercice 35 – Type bac : étude complète de convexité

Soit $f(x) = x\,e^x$. 1) Calculer $f''(x)$. 2) Étudier la convexité et préciser le point d'inflexion.

Exercice 36 – Type bac : convexité et accélération

Une quantité est modélisée par $f(t) = t^3 - 9t^2 + 24t$ pour $t \geq 0$. La « vitesse » est f', l'« accélération » f''. 1) À partir de quand l'accélération devient-elle positive ? 2) Interpréter ce changement.

Exercice 37 – Type bac : point d'inflexion de x^3-6x^2

Soit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$. Déterminer les coordonnées de son point d'inflexion.

Exercice 38 – Type bac : inégalité par concavité du logarithme

La fonction ln est concave et sa tangente en 1 est $y = x - 1$. En déduire que $\ln(x) \leq x - 1$ pour tout $x > 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 39 – Type bac : convexité, point d'inflexion et tangente

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2$, de courbe C.

1. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

2. Calculer $f''(x)$, étudier son signe et en déduire les intervalles de convexité de f.

3. Déterminer les coordonnées du point d'inflexion I de C.

4. Déterminer une équation de la tangente T à C au point I.

5. Vérifier que $f(x) - (-3x + 1) = (x - 1)^3$ et en déduire la position de C par rapport à T.

Exercice 40 – Type bac : racine carrée et tangente

Soit $f(x) = \sqrt{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.

1. Montrer que f est concave.

2. Déterminer la tangente à sa courbe en 1.

3. En déduire que $\sqrt{x} \leq \dfrac{x+1}{2}$ pour tout $x > 0$. Interpréter avec deux nombres a et b positifs.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 40 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Dérivées de référence

$(x^n)' = n\,x^{n-1}$, donc $f'(x) = 4x^3$.

$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, donc $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, donc $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Réponse. $f'(x) = 4x^3$; $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$; $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Rappel de cours. Formules de base : $(x^n)' = nx^{n-1}$, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Correction de l'exercice 2 – Dérivée d'une somme

On dérive terme à terme : $(3x^2)' = 6x$, $(-5x)' = -5$, $(7)' = 0$.

Donc $f'(x) = 6x - 5$.

Réponse. $f'(x) = 6x - 5$.

Rappel de cours. La dérivée d'une somme est la somme des dérivées ; la dérivée d'une constante est nulle.

Correction de l'exercice 3 – Exponentielle et logarithme d'une fonction affine

$(e^u)' = u'e^u$ avec $u = 3x - 1$, $u' = 3$: $f'(x) = 3e^{3x-1}$.

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ avec $u = 2x + 5 > 0$, $u' = 2$: $g'(x) = \frac{2}{2x+5}$.

Réponse. $f'(x) = 3e^{3x-1}$; $g'(x) = \frac{2}{2x+5}$.

Rappel de cours. $(e^u)' = u'e^u$ et $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ (avec $u > 0$).

Correction de l'exercice 4 – Calculer une dérivée seconde

$f'(x) = 3x^2 - 4x$ (dérivée terme à terme).

$f''(x)$ est la dérivée de f' : $f''(x) = 6x - 4$.

Réponse. $f'(x) = 3x^2 - 4x$; $f''(x) = 6x - 4$.

Rappel de cours. La dérivée seconde f'' est la dérivée de la dérivée f' : on dérive deux fois de suite.

Correction de l'exercice 5 – Convexité d'une parabole

$f'(x) = 2x$ puis $f''(x) = 2$.

$f''(x) = 2 > 0$ pour tout x : la fonction est convexe sur $\mathbb{R}$.

Réponse. f est convexe sur $\mathbb{R}$ (car $f''(x) = 2 > 0$).

Rappel de cours. $f'' \geq 0$ sur un intervalle $\Rightarrow$ f convexe ; $f'' \leq 0 \Rightarrow$ f concave.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 6 – Convexité de référence

$f''(x) = e^x > 0$: exp est convexe sur $\mathbb{R}$.

Pour g, $g'(x) = \frac{1}{x}$ puis $g''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$: ln est concave sur $]0;+\infty[$.

Réponse. exp est convexe ; ln est concave.

Rappel de cours. À retenir : l'exponentielle est convexe, le logarithme est concave. $x \mapsto x^2$ est convexe.

Correction de l'exercice 7 – Convexité de x⁴

$f'(x) = 4x^3$ et $f''(x) = 12x^2 \geq 0$ pour tout x : f est convexe sur $\mathbb{R}$.

$f''(0) = 0$, mais f'' ne change pas de signe en 0 (positive des deux côtés) : il n'y a pas de point d'inflexion.

Réponse. f est convexe sur $\mathbb{R}$, sans point d'inflexion.

Rappel de cours. Point d'inflexion : f'' s'annule en changeant de signe. L'annulation seule ne suffit pas.

Correction de l'exercice 8 – Dérivée d'un produit

Formule du produit $(uv)' = u'v + uv'$ avec $u = 2x+1$ ($u' = 2$) et $v = x^2 - 3$ ($v' = 2x$).

$f'(x) = 2(x^2-3) + (2x+1)(2x) = 2x^2 - 6 + 4x^2 + 2x = 6x^2 + 2x - 6$.

Réponse. $f'(x) = 6x^2 + 2x - 6$.

Rappel de cours. $(uv)' = u'v + uv'$. Pensez à bien développer et réduire à la fin.

Erreur fréquente. $(uv)' \neq u'v'$: il y a deux termes, pas un seul. Oublier un terme est l'erreur la plus fréquente.

Correction de l'exercice 9 – Dérivée d'un quotient

Formule du quotient $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u = x$ ($u' = 1$) et $v = x+1$ ($v' = 1$).

$f'(x) = \dfrac{1 \times (x+1) - x \times 1}{(x+1)^2} = \dfrac{x+1-x}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

Réponse. $f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2}$.

Rappel de cours. $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$. L'ordre au numérateur compte : c'est $u'v$ MOINS uv'.

Correction de l'exercice 10 – Dérivée de (ax+b)ⁿ

Fonction composée : formule $(u^n)' = n\,u'\,u^{n-1}$ avec $u = 3x-2$, $u' = 3$, $n = 4$.

$f'(x) = 4 \times 3 \times (3x-2)^3 = 12(3x-2)^3$.

Réponse. $f'(x) = 12(3x-2)^3$.

Rappel de cours. $(u^n)' = n\,u'\,u^{n-1}$: on multiplie par la dérivée de l'intérieur u' (« règle de la chaîne »).

Correction de l'exercice 11 – Équation de tangente

Formule de la tangente : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

$f'(x) = 2x$, donc $f'(1) = 2$ et $f(1) = 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$y = 2(x-1) + 1 = 2x - 2 + 1 = 2x - 1$.

Réponse. Tangente : $y = 2x - 1$.

Rappel de cours. Équation de la tangente en a : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$. $f'(a)$ est la pente, $f(a)$ l'ordonnée du point de contact.

Correction de l'exercice 12 – Racine d'un trinôme

$x^2 + 4x + 5 = (x+2)^2 + 1 > 0$: f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $u' = 2x + 4$: $f'(x) = \dfrac{2x+4}{2\sqrt{x^2+4x+5}} = \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+5}}$.

Réponse. $f'(x) = \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+5}}$.

Rappel de cours. $\sqrt{u}$ est dérivable là où $u > 0$.

Correction de l'exercice 13 – Intervalles de convexité

$f'(x) = 3x^2$ puis $f''(x) = 6x$.

$f''(x) = 6x > 0 \Leftrightarrow x > 0$ et $f''(x) < 0 \Leftrightarrow x < 0$.

Donc f est concave sur $]-\infty ; 0]$ et convexe sur $[0 ; +\infty[$.

Réponse. f concave sur $]-\infty ; 0]$, convexe sur $[0 ; +\infty[$.

Rappel de cours. On étudie le signe de f'' : il indique les zones de convexité (signe +) et de concavité (signe −).

Correction de l'exercice 14 – Point d'inflexion

$f'(x) = 3x^2 - 3$ puis $f''(x) = 6x$.

f'' s'annule en 0 et change de signe (négatif avant, positif après).

La convexité change donc en 0 : la courbe présente un point d'inflexion d'abscisse 0. Son ordonnée est $f(0) = 0$, point $(0\,;0)$.

Réponse. Point d'inflexion en $(0\,;0)$ (f'' s'annule en changeant de signe).

Rappel de cours. Point d'inflexion : f'' s'annule ET change de signe. C'est là que la courbe passe de convexe à concave (ou inversement).

Erreur fréquente. $f''(a) = 0$ ne suffit pas : il faut un changement de signe. Sinon il n'y a pas d'inflexion.

Correction de l'exercice 15 – Convexité d'un trinôme

$f'(x) = -4x + 3$ puis $f''(x) = -4$.

$f''(x) = -4 < 0$ pour tout x : f est concave sur $\mathbb{R}$.

Réponse. f est concave sur $\mathbb{R}$ (car $f'' = -4 < 0$).

Rappel de cours. Une parabole $ax^2 + bx + c$ est convexe si $a > 0$, concave si $a < 0$: on retrouve le signe de $f'' = 2a$.

Correction de l'exercice 16 – Convexité lue sur f'

f est convexe sur un intervalle si et seulement si f' y est croissante, concave si f' y est décroissante.

Donc f est concave sur $]-\infty\,;0]$ et convexe sur $[0\,;+\infty[$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

La convexité change en 0 : le point d'abscisse 0 est un point d'inflexion (la courbe traverse sa tangente).

Réponse. Concave puis convexe ; point d'inflexion en $x = 0$.

Rappel de cours. Convexe $\Leftrightarrow f'$ croissante $\Leftrightarrow f'' \geq 0$ (si f'' existe).

Correction de l'exercice 17 – Dérivée de e^u et ln(u)

$(e^u)' = u' e^u$. Pour f, $u = x^2$, $u' = 2x$: $f'(x) = 2x e^{x^2}$.

$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$. Pour g, $u = x^2 + 1$, $u' = 2x$: $g'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.

Réponse. $f'(x) = 2x e^{x^2}$; $g'(x) = \frac{2x}{x^2+1}$.

Rappel de cours. Composées usuelles : $(e^u)' = u'e^u$ et $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$.

Correction de l'exercice 18 – Variations par le signe de f'

$f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x^2 - 4) = 3(x-2)(x+2)$.

f' s'annule en -2 et 2. C'est un trinôme de coefficient $3 > 0$: positif à l'extérieur des racines, négatif entre.

f est croissante sur $]-\infty ; -2]$, décroissante sur $[-2 ; 2]$, croissante sur $[2 ; +\infty[$. Maximum local $f(-2) = -8 + 24 = 16$, minimum local $f(2) = 8 - 24 = -16$.

Réponse. $f'(x) = 3(x-2)(x+2)$; max local $f(-2) = 16$, min local $f(2) = -16$.

Rappel de cours. Le signe de f' donne les variations : $f' > 0$ (croissante), $f' < 0$ (décroissante). On factorise f' pour lire son signe.

Correction de l'exercice 19 – Tangente parallèle à une droite

Deux droites sont parallèles quand elles ont le même coefficient directeur. La droite a pour pente 2.

On cherche x tel que $f'(x) = 2$. Or $f'(x) = 2x - 4$, donc $2x - 4 = 2$, soit $x = 3$.

Le point a pour ordonnée $f(3) = 9 - 12 = -3$. La tangente est parallèle à $y = 2x + 5$ au point $(3 ; -3)$.

Réponse. Au point $(3 ; -3)$ (là où $f'(x) = 2$).

Rappel de cours. Tangente parallèle à une droite de pente m : résoudre $f'(x) = m$.

Correction de l'exercice 20 – Tangente horizontale

Une tangente est horizontale lorsque sa pente est nulle, c'est-à-dire $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$. $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 2$.

Ordonnées : $f(0) = 1$ et $f(2) = 8 - 12 + 1 = -3$. Les tangentes horizontales sont aux points $(0 ; 1)$ et $(2 ; -3)$.

Réponse. Tangentes horizontales en $(0 ; 1)$ et $(2 ; -3)$.

Rappel de cours. Tangente horizontale $\Leftrightarrow f'(x) = 0$. Ce sont souvent les abscisses des extremums locaux.

Correction de l'exercice 21 – Puissance d'un logarithme, cosinus composé

$(u^n)' = n u' u^{n-1}$ avec $u = \ln x$, $u' = \frac{1}{x}$: $f'(x) = 3 \times \frac{1}{x} \times (\ln x)^2 = \frac{3(\ln x)^2}{x}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$(\cos u)' = -u' \sin u$ avec $u' = 2$: $g'(x) = -2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Réponse. $f'(x) = \dfrac{3(\ln x)^2}{x}$; $g'(x) = -2\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$.

Rappel de cours. Dérivée d'une composée : $(g \circ u)' = u' \times (g' \circ u)$.

Erreur fréquente. $(\ln x)^3 \neq \ln(x^3) = 3\ln x$: la puissance porte sur le logarithme entier.

Correction de l'exercice 22 – Tableau de convexité

$f(x) = 4x^3 - 12x$ puis $f''(x) = 12x^2 - 12 = 12(x^2 - 1) = 12(x-1)(x+1)$.

f'' est un trinôme de coefficient $12 > 0$: positif à l'extérieur des racines -1 et 1, négatif entre.

f est convexe sur $]-\infty ; -1]$ et $[1 ; +\infty[$, concave sur $[-1 ; 1]$. Inflexions en $x = -1$ et $x = 1$.

Réponse. Convexe sur $]-\infty ; -1] \cup [1 ; +\infty[$, concave sur $[-1 ; 1]$; inflexions en ± 1.

Rappel de cours. On factorise f'' pour lire son signe, exactement comme pour étudier le signe de f' dans les variations.

Correction de l'exercice 23 – Position courbe / tangente

Une fonction convexe a sa courbe située au-dessus de chacune de ses tangentes.

Vérifions avec la tangente en 0 : $f'(0) = 0$ et $f(0) = 0$, tangente $y = 0$. On a bien $x^2 \geq 0$: la courbe est au-dessus.

Conclusion : la courbe de f est au-dessus de toutes ses tangentes (propriété générale des fonctions convexes).

Réponse. La courbe est au-dessus de toutes ses tangentes (f convexe).

Rappel de cours. Convexe : courbe au-dessus de ses tangentes. Concave : courbe en dessous. Au point d'inflexion, la tangente traverse la courbe.

Correction de l'exercice 24 – Convexité de e^x composée

$f'(x) = -2x\,e^{-x^2}$ (dérivée de e^u avec $u = -x^2$).

$f''(x) = [(-2) + (-2x)(-2x)]e^{-x^2} = (-2 + 4x^2)e^{-x^2} = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}$.

$e^{-x^2} > 0$, donc f'' a le signe de $2x^2 - 1$, qui s'annule en $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ en changeant de signe.

Points d'inflexion aux abscisses $x = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Réponse. $f''(x) = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}$; inflexions en $x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Rappel de cours. Pour dériver $f = u \cdot e^w$ (produit), $f'' = (u' + u\,w')e^w$. Ici l'exponentielle > 0 sort du signe.

Correction de l'exercice 25 – Lecture graphique de la convexité

$f'' > 0$ avant 2 : la fonction est convexe sur $]-\infty ; 2[$.

$f'' < 0$ après 2 : la fonction est concave sur $]2 ; +\infty[$.

f'' change de signe en 2 : la courbe admet un point d'inflexion d'abscisse 2.

Réponse. Convexe avant 2, concave après ; point d'inflexion en $x = 2$.

Rappel de cours. On peut lire la convexité directement sur le signe de f'', ou sur l'allure de la courbe (cuvette = convexe, dôme = concave).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 26 – Points d'inflexion de ln(x² + 1)

$f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

$f''(x) = \dfrac{2(x^2+1) - 2x \times 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2 - 2x^2}{(x^2+1)^2} = \dfrac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$.

Le signe est celui de $1 - x^2$: positif sur $[-1\,;1]$, négatif ailleurs.

f est convexe sur $[-1\,;1]$, concave sur $]-\infty\,;-1]$ et sur $[1\,;+\infty[$. Points d'inflexion en $x = \pm 1$, d'ordonnée $\ln 2$.

Réponse. Convexe sur $[-1\,;1]$, concave ailleurs ; inflexions en $(\pm 1\,;\ln 2)$.

Rappel de cours. Pour étudier la convexité, on calcule f'' puis on étudie son signe.

Correction de l'exercice 27 – Type bac : produit avec exponentielle

Produit $(uv)' = u'v + uv'$ avec $u = x^2 - 2x$ ($u' = 2x - 2$) et $v = e^x$ ($v' = e^x$).

$f'(x) = (2x-2)e^x + (x^2-2x)e^x = [(2x-2) + (x^2-2x)]e^x = (x^2-2)e^x$.

$e^x > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de $x^2 - 2$, qui s'annule en $\pm\sqrt{2}$: positif à l'extérieur, négatif entre.

f est croissante sur $]-\infty;-\sqrt{2}\,]$, décroissante sur $[-\sqrt{2}\,;\sqrt{2}\,]$, croissante sur $[\sqrt{2}\,;+\infty[$.

Réponse. $f'(x) = (x^2-2)e^x$; f croît, décroît sur $[-\sqrt{2}\,;\sqrt{2}\,]$, puis croît.

Rappel de cours. On factorise e^x (toujours > 0) : le signe de f' se ramène à celui du polynôme restant.

Correction de l'exercice 28 – Type bac : quotient et asymptote

Quotient avec $u = x^2 + 1$ ($u' = 2x$), $v = x$ ($v' = 1$) :
$f'(x) = \dfrac{2x \cdot x - (x^2+1)\cdot 1}{x^2} = \dfrac{2x^2 - x^2 - 1}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2}$.

$x^2 > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de $x^2 - 1$. Sur $]0;+\infty[$, $x^2 - 1 < 0$ si $x < 1$, > 0 si $x > 1$.

f décroît sur $]0;1]$, croît sur $[1;+\infty[$: minimum en $x = 1$, $f(1) = \dfrac{1+1}{1} = 2$.

Réponse. $f'(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2}$; minimum $f(1) = 2$ sur $]0;+\infty[$.

Rappel de cours. Après calcul du quotient, on simplifie le numérateur ; son signe (ici $x^2 - 1$) donne les variations.

Correction de l'exercice 29 – Type bac : tangente passant par un point donné

La tangente au point d'abscisse a a pour équation
$y = f'(a)(x-a) + f(a) = 2a(x-a) + a^2 = 2a\,x - a^2$.

Elle passe par $A(0;-1)$ si $-1 = 2a \times 0 - a^2$, soit $-1 = -a^2$, donc $a^2 = 1$ et $a = \pm 1$.

Pour $a = 1$: $y = 2x - 1$. Pour $a = -1$: $y = -2x - 1$. Il y a deux tangentes.

Réponse. Deux tangentes : $y = 2x - 1$ (en $a = 1$) et $y = -2x - 1$ (en $a = -1$).

Rappel de cours. On écrit la tangente en un point inconnu a, puis on impose qu'elle passe par le point donné : cela fournit une équation en a.

Erreur fréquente. $A(0;-1)$ n'est pas sur la courbe ($f(0) = 0 \neq -1$) : le point de contact a est à trouver, ce n'est pas $x = 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 30 – Type bac : étude de x·e⁻ˣ

Produit avec $u = x$ ($u' = 1$), $v = e^{-x}$ ($v' = -e^{-x}$) : $f'(x) = e^{-x} + x(-e^{-x}) = (1-x)e^{-x}$.

$e^{-x} > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de $1 - x$: f croît sur $]-\infty; 1]$, décroît sur $[1; +\infty[$.

Maximum en $x = 1$: $f(1) = 1 \times e^{-1} = \frac{1}{e}$.

Réponse. $f'(x) = (1-x)e^{-x}$; maximum $f(1) = \frac{1}{e}$.

Rappel de cours. $(e^{-x})' = -e^{-x}$. On factorise $e^{-x} > 0$ pour lire le signe de f'.

Correction de l'exercice 31 – Type bac : tangente à ln en 1

$f'(x) = \frac{1}{x}$, donc $f'(1) = 1$ et $f(1) = 0$. Tangente : $y = 1 \times (x-1) + 0 = x - 1$.

La fonction ln est concave : sa courbe est sous ses tangentes. Donc $\ln(x) \leq x - 1$ pour tout $x > 0$.

Réponse. Tangente $y = x - 1$; on en déduit $\ln(x) \leq x - 1$ pour tout $x > 0$.

Rappel de cours. ln concave ⇒ courbe en dessous de ses tangentes.

Correction de l'exercice 32 – Type bac : étude d'une fonction et nombre de solutions

En $+\infty$: $f(x) = x^2e^{-x} + xe^{-x} + e^{-x} \to 0$ par croissances comparées. En $-\infty$: $e^{-x} \to +\infty$ et $x^2 + x + 1 > 0$ (discriminant $1 - 4 < 0$), donc $f(x) \to +\infty$.

Avec $u = x^2 + x + 1$ ($u' = 2x + 1$) et $v = e^{-x}$ ($v' = -e^{-x}$) :
$f'(x) = (2x+1)e^{-x} - (x^2 + x + 1)e^{-x} = e^{-x}[(2x+1) - (x^2 + x + 1)] = (-x^2 + x)e^{-x}$.

$e^{-x} > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de $-x^2 + x = -x(x-1)$: négatif sur $]-\infty; 0[$, positif sur $]0; 1[$, négatif sur $]1; +\infty[$. Ainsi f décroît sur $]-\infty; 0]$, croît sur $[0; 1]$, décroît sur $[1; +\infty[$.
Minimum local $f(0) = 1$, maximum local $f(1) = \frac{3}{e} \approx 1{,}10$.

$f(0) = 1$ et $f'(0) = 0$, donc T: $y = f'(0)x + f(0) = 1$: la tangente en 0 est horizontale, d'équation $y = 1$.

Sur $]-\infty; 0]$, f décroît de $+\infty$ à $f(0) = 1$: $f(x) = 1$ n'y a que la solution $x = 0$. Sur $[0; 1]$, f croît de 1 à $\frac{3}{e} > 1$: pas d'autre solution. Sur $[1; +\infty[$, f est continue et strictement décroissante de $\frac{3}{e} \approx 1{,}10$ à 0 ; comme $1 \in]0; \frac{3}{e}[$, le TVI donne une unique solution $\alpha \in]1; +\infty[$ (avec $\alpha \approx 1{,}8$). Au total, $f(x) = 1$ admet exactement deux solutions.

Réponse. $\lim_{+\infty} f = 0$, $\lim_{-\infty} f = +\infty$; $f'(x) = (-x^2 + x)e^{-x}$; max $f(1) = \frac{3}{e}$, min local $f(0) = 1$; T:$y = 1$; $f(x) = 1$ a deux solutions (0 et $\alpha \approx 1{,}8$).

Rappel de cours. Factoriser $e^{-x} > 0$ pour le signe de f' ; pour compter les solutions, découper en intervalles de monotonie et appliquer le TVI sur chacun.

Correction de l'exercice 33 – Type bac : une dérivée qui se simplifie

1) $\sqrt{x^2+1} > \sqrt{x^2} = |x| \geq -x$, donc $x + \sqrt{x^2+1} > 0$ pour tout x.

2) $u = x + \sqrt{x^2+1}$, $u' = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1}}$.

$f'(x) = \frac{u'}{u} = \frac{\sqrt{x^2+1} + x}{\sqrt{x^2+1}} \times \frac{1}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

3) $f'(x) > 0$: f est strictement croissante. $f(0) = \ln 1 = 0$ et $f'(0) = 1$: tangente $y = x$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$; f croissante ; tangente en 0 : $y = x$.

Rappel de cours. Avant de développer, chercher un facteur commun entre u' et u : ici il se simplifie entièrement.

Correction de l'exercice 34 – Type bac : inégalité par convexité

La tangente à exp en 0 a pour équation $y = f'(0)(x-0) + f(0) = e^0 x + e^0 = x + 1$.

exp étant convexe, sa courbe est au-dessus de toutes ses tangentes, en particulier celle en 0.

Donc pour tout réel x, $e^x \geq x + 1$.

Réponse. $e^x \geq x + 1$ pour tout réel x (courbe convexe au-dessus de sa tangente en 0).

Rappel de cours. La convexité fournit des inégalités « gratuites » : courbe convexe ≥ tangente. C'est une rédaction alternative à l'étude de $g(x) = e^x - x - 1$.

Correction de l'exercice 35 – Type bac : étude complète de convexité

$f'(x) = (1+x)e^x$ (produit). Puis $f''(x) = [1 + (1+x)]e^x = (2+x)e^x$.

$e^x > 0$, donc $f''(x)$ a le signe de $2 + x$: négatif si $x < -2$, positif si $x > -2$.

f est concave sur $]-\infty ; -2]$, convexe sur $[-2 ; +\infty[$. Inflexion en $x = -2$, d'ordonnée $f(-2) = -2e^{-2}$.

Réponse. $f''(x) = (2+x)e^x$; concave puis convexe ; inflexion en $(-2\,;-2e^{-2})$.

Rappel de cours. Pour dériver $f' = (1+x)e^x$ (produit), on applique à nouveau $(uv)' = u'v + uv'$, d'où $f'' = (2+x)e^x$.

Correction de l'exercice 36 – Type bac : convexité et accélération

$f'(t) = 3t^2 - 18t + 24$ puis $f''(t) = 6t - 18$.

$f''(t) > 0 \Leftrightarrow 6t - 18 > 0 \Leftrightarrow t > 3$: l'accélération devient positive à partir de $t = 3$.

Avant $t = 3$, $f'' < 0$: f est concave (la croissance ralentit). Après $t = 3$, $f'' > 0$: f est convexe (la croissance s'accélère). $t = 3$ est un point d'inflexion.

Réponse. L'accélération devient positive à partir de $t = 3$; c'est un point d'inflexion (passage concave → convexe).

Rappel de cours. Interprétation : $f'' > 0$ (convexe) = croissance qui s'accélère ; $f'' < 0$ (concave) = croissance qui ralentit.

Correction de l'exercice 37 – Type bac : point d'inflexion de x^3-6x^2

$f'(x) = 3x^2 - 12x$ puis $f''(x) = 6x - 12$.

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$, et f'' change de signe en 2 (négatif avant, positif après).

Point d'inflexion d'abscisse 2 : $f(2) = 8 - 24 + 5 = -11$, soit $(2\,;-11)$.

Réponse. Point d'inflexion $(2\,;-11)$.

Rappel de cours. Inflexion : f'' s'annule EN CHANGEANT de signe.

Correction de l'exercice 38 – Type bac : inégalité par concavité du logarithme

Une fonction concave a sa courbe située EN DESSOUS de chacune de ses tangentes.

En particulier sous la tangente en 1, d'équation $y = x - 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Donc pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leq x - 1$ (égalité seulement en $x = 1$).

Réponse. $\ln(x) \leq x - 1$ pour tout $x > 0$.

Rappel de cours. Convexe : courbe au-dessus des tangentes ; concave : en dessous. ln est concave.

Correction de l'exercice 39 – Type bac : convexité, point d'inflexion et tangente

$f'(x) = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$: positif sur $]-\infty;0[$, négatif sur $]0;2[$, positif sur $]2;+\infty[$. f admet un maximum local $f(0) = 0$ et un minimum local $f(2) = 8 - 12 = -4$.

$f''(x) = 6x - 6 = 6(x-1)$: négatif pour $x < 1$, positif pour $x > 1$. Donc f est concave sur $]-\infty;1]$ et convexe sur $[1;+\infty[$.

f'' s'annule en changeant de signe en $x = 1$: C admet un point d'inflexion $I(1\,;f(1)) = I(1\,;-2)$.

$f'(1) = 3 - 6 = -3$ et $f(1) = -2$, donc T: $y = -3(x-1) - 2 = -3x + 1$.

$f(x) - (-3x+1) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 = (x-1)^3$. Ce terme est négatif pour $x < 1$ (C sous T, zone concave) et positif pour $x > 1$ (C au-dessus de T, zone convexe) : la courbe traverse sa tangente en I, ce qui caractérise le point d'inflexion.

Réponse. Max $f(0) = 0$, min $f(2) = -4$; concave sur $]-\infty;1]$, convexe sur $[1;+\infty[$; inflexion $I(1;-2)$; T:$y = -3x + 1$; $f(x) - (-3x+1) = (x-1)^3$.

Rappel de cours. En un point d'inflexion, f'' change de signe et la courbe traverse sa tangente : le signe de $f(x) -$ (tangente) change.

Correction de l'exercice 40 – Type bac : racine carrée et tangente

1) $f(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$ et $f'(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2} = -\frac{1}{4x\sqrt{x}} < 0$: f est concave.

2) $f(1) = 1$, $f'(1) = \frac{1}{2}$: T:$y = \frac{1}{2}(x-1) + 1 = \frac{x+1}{2}$.

3) Une fonction concave a sa courbe en dessous de ses tangentes : $\sqrt{x} \leq \frac{x+1}{2}$.

Avec $x = \frac{a}{b}$ et en multipliant par $b > 0$: $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$. La moyenne géométrique est inférieure à la moyenne arithmétique.

Réponse. $\sqrt{x} \leq \frac{x+1}{2}$, d'où $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

Rappel de cours. Convexe : courbe au-dessus de ses tangentes. Concave : en dessous.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).