Dérivation et convexité — Terminale spécialité

40 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés

Présentation

La dérivée f' donne le coefficient directeur de la tangente et, par son signe, les variations de f. En Terminale spécialité on enrichit les formules : produit, quotient, et surtout la dérivée d'une fonction composée $(g \circ u)' = u' \times g'(u)$. La dérivée seconde f'' dit ensuite si la courbe est convexe (en cuvette, $f'' \geq 0$) ou concave ($f'' \leq 0$), et un point d'inflexion est un point où f'' change de signe. Ces exercices corrigés couvrent dérivées de référence, produit, quotient, composée, tangente, études de fonctions, puis dérivée seconde, convexité, points d'inflexion et position courbe/tangente, jusqu'au type bac. Difficulté croissante, correction d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-specialite/derivees

Exercice 1 – Dérivées de référence

Dériver $f(x) = x^4$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$ et $h(x) = \sqrt{x}$.

Exercice 2 – Dérivée d'une somme

Dériver $f(x) = 3x^2 - 5x + 7$.

Exercice 3 – Exponentielle et logarithme d'une fonction affine

Dériver $f(x) = e^{3x-1}$ sur $\mathbb{R}$ et $g(x) = \ln(2x+5)$ sur $\left]-\frac{5}{2}\,;+\infty\right[$.

Exercice 4 – Calculer une dérivée seconde

Soit $f(x) = x^3 - 2x^2 + 5$. Calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$.

Exercice 5 – Convexité d'une parabole

La fonction $f(x) = x^2$ est-elle convexe ou concave sur $\mathbb{R}$?

Exercice 6 – Convexité de référence

Étudier la convexité de $f(x) = e^x$ et de $g(x) = \ln(x)$ (sur $]0;+\infty[$).

Exercice 7 – Convexité de x⁴

Étudier la convexité de $f(x) = x^4$ sur $\mathbb{R}$. Sa courbe a-t-elle un point d'inflexion en 0 ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 8 – Dérivée d'un produit

Dériver $f(x) = (2x + 1)(x^2 - 3)$.

Exercice 9 – Dérivée d'un quotient

Dériver $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ sur $]-1; +\infty[$.

Exercice 10 – Dérivée de (ax+b)ⁿ

Dériver $f(x) = (3x - 2)^4$.

Exercice 11 – Équation de tangente

Soit $f(x) = x^2$. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse $a = 1$.

Exercice 12 – Racine d'un trinôme

Dériver $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$ sur $\mathbb{R}$ et simplifier.

Exercice 13 – Intervalles de convexité

Soit $f(x) = x^3$. Déterminer sur quels intervalles f est convexe ou concave.

Exercice 14 – Point d'inflexion

Soit $f(x) = x^3 - 3x$. Montrer que la courbe admet un point d'inflexion en $x = 0$.

Exercice 15 – Convexité d'un trinôme

Étudier la convexité de $f(x) = -2x^2 + 3x - 1$.

Exercice 16 – Convexité lue sur f′

On sait que f' est décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et croissante sur $[0\,;+\infty[$. Que peut-on dire de la convexité de f et de sa courbe en 0 ?

Exercice 17 – Dérivée de eᵘ et ln(u)

Dériver $f(x) = e^{x^2}$ et $g(x) = \ln(x^2 + 1)$.

Exercice 18 – Variations par le signe de f′

Soit $f(x) = x^3 - 12x$. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations.

Exercice 19 – Tangente parallèle à une droite

Soit $f(x) = x^2 - 4x$. En quel(s) point(s) la tangente à la courbe est-elle parallèle à la droite $y = 2x + 5$?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 20 – Tangente horizontale

Soit $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$. Déterminer les points où la tangente est horizontale.

Exercice 21 – Puissance d'un logarithme, cosinus composé

Dériver $f(x) = (\ln x)^3$ sur $]0\,;+\infty[$ et $g(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 22 – Tableau de convexité

Soit $f(x) = x^4 - 6x^2$. Étudier le signe de $f''(x)$ et en déduire les intervalles de convexité.

Exercice 23 – Position courbe / tangente

Soit $f(x) = x^2$, convexe sur $\mathbb{R}$. Que peut-on dire de la position de la courbe par rapport à ses tangentes ?

Exercice 24 – Convexité de e^x composée

Soit $f(x) = e^{-x^2}$. Calculer $f''(x)$ et déterminer les abscisses des points d'inflexion.

Exercice 25 – Lecture graphique de la convexité

On lit sur un graphique que $f''(x) > 0$ sur $]-\infty; 2[$ et $f''(x) < 0$ sur $]2; +\infty[$. Que peut-on dire de la courbe en $x = 2$ et de sa convexité ?

Exercice 26 – Points d'inflexion de ln(x² + 1)

Soit $f(x) = \ln(x^2 + 1)$. Montrer que $f''(x) = \dfrac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}$ et étudier la convexité de f.

Exercice 27 – Type bac : produit avec exponentielle

Soit $f(x) = (x^2 - 2x)e^x$. 1) Montrer que $f'(x) = (x^2 - 2)e^x$. 2) En déduire les variations de f.

Exercice 28 – Type bac : quotient et asymptote

Soit $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$ pour $x > 0$. 1) Calculer $f'(x)$. 2) En déduire le minimum de f sur $]0; +\infty[$.

Exercice 29 – Type bac : tangente passant par un point donné

Soit $f(x) = x^2$. Déterminer les tangentes à la courbe passant par le point $A(0\,;-1)$.

Exercice 30 – Type bac : étude de x·e⁻ˣ

Soit $f(x) = x\,e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$. Calculer $f'(x)$ et donner le maximum de f.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 31 – Type bac : tangente à ln en 1

Soit $f(x) = \ln(x)$. Déterminer la tangente à la courbe en $x = 1$, puis en déduire une inégalité.

Exercice 32 – Type bac : étude d'une fonction et nombre de solutions

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x^2 + x + 1)\,e^{-x}$, de courbe C. On rappelle que $\lim_{x \to +\infty} x^n e^{-x} = 0$ pour tout entier $n \geq 0$.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = (-x^2 + x)\,e^{-x}$.

3. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

4. Déterminer une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 0.

5. Démontrer que l'équation $f(x) = 1$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.

Exercice 33 – Type bac : une dérivée qui se simplifie

Soit $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$ sur $\mathbb{R}$.

1. Justifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

3. En déduire le sens de variation de f et l'équation de la tangente en 0.

Exercice 34 – Type bac : inégalité par convexité

Sachant que exp est convexe, sa courbe est au-dessus de sa tangente en 0. En déduire que pour tout réel x, $e^x \geq x + 1$.

Exercice 35 – Type bac : étude complète de convexité

Soit $f(x) = x\,e^x$. 1) Calculer $f''(x)$. 2) Étudier la convexité et préciser le point d'inflexion.

Exercice 36 – Type bac : convexité et accélération

Une quantité est modélisée par $f(t) = t^3 - 9t^2 + 24t$ pour $t \geq 0$. La « vitesse » est f', l'« accélération » f''. 1) À partir de quand l'accélération devient-elle positive ? 2) Interpréter ce changement.

Exercice 37 – Type bac : point d'inflexion de x^3-6x^2

Soit $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$. Déterminer les coordonnées de son point d'inflexion.

Exercice 38 – Type bac : inégalité par concavité du logarithme

La fonction ln est concave et sa tangente en 1 est $y = x - 1$. En déduire que $\ln(x) \leq x - 1$ pour tout $x > 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 39 – Type bac : convexité, point d'inflexion et tangente

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2$, de courbe C.

1. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

2. Calculer $f''(x)$, étudier son signe et en déduire les intervalles de convexité de f.

3. Déterminer les coordonnées du point d'inflexion I de C.

4. Déterminer une équation de la tangente T à C au point I.

5. Vérifier que $f(x) - (-3x + 1) = (x - 1)^3$ et en déduire la position de C par rapport à T.

Exercice 40 – Type bac : racine carrée et tangente

Soit $f(x) = \sqrt{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.

1. Montrer que f est concave.

2. Déterminer la tangente à sa courbe en 1.

3. En déduire que $\sqrt{x} \leq \dfrac{x+1}{2}$ pour tout $x > 0$. Interpréter avec deux nombres a et b positifs.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).