Fonction exponentielle — Terminale spécialité

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

La fonction exponentielle $\exp(x) = e^x$ est l'unique fonction égale à sa dérivée et valant 1 en 0. Elle est strictement positive et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Ces exercices corrigés couvrent tout le programme de Terminale spécialité : propriétés algébriques, équations et inéquations, dérivation (y compris e^u), limites par croissances comparées et études de fonctions type bac. Difficulté croissante, correction détaillée d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-specialite/fonction-exponentielle

Exercice 1 – Propriétés algébriques

On rencontre constamment des produits, quotients et puissances d'exponentielles dans les calculs de Terminale. Avant toute étude de fonction, il faut savoir les simplifier au brouillon en quelques secondes.

1. Simplifier le produit $e^2 \times e^3$.

2. Simplifier le quotient $\dfrac{e^5}{e^2}$.

3. Simplifier la puissance $\left(e^2\right)^3$.

Exercice 2 – Équation e^x = e^k

Résoudre une équation exponentielle « élémentaire », c'est exploiter le fait que la fonction exponentielle est strictement croissante, donc injective : deux exponentielles sont égales si et seulement si leurs exposants le sont.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^x = 1$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^x = e^3$.

Exercice 3 – Simplifier des expressions

Avant de dériver ou d'étudier une fonction, on a souvent intérêt à simplifier son écriture. On manipule ici deux expressions contenant des exponentielles.

1. Simplifier l'expression $A = e^x \times e^{-x}$.

2. Simplifier l'expression $B = \dfrac{e^{2x}}{e^x}$.

Exercice 4 – Égalité d'exponentielles

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $e^{x^2} = e^4$ et $e^{3x-1} = 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Équation à exponentielles

Lorsqu'une équation met en présence deux exponentielles dont les exposants sont des expressions de x, on se ramène à une équation classique sur les exposants.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{2x} = e^{x+3}$.

Exercice 6 – Équation e^x = k

Résoudre $e^x = k$ revient à se demander si k est atteignable par l'exponentielle. Comme $e^x > 0$ pour tout réel x, tout dépend du signe de k.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^x = 5$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^x = -2$.

Exercice 7 – Changement de variable

Certaines équations « cachent » un trinôme du second degré sous des exponentielles. Un changement de variable bien choisi les ramène à une équation connue.

1. En posant $X = e^x$, transformer l'équation $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$ en une équation du second degré.

2. Résoudre cette équation en X, puis revenir à l'inconnue x.

Exercice 8 – Dérivées simples

L'exponentielle est sa propre dérivée. On combine ce résultat avec les règles usuelles de dérivation (somme, produit) sur deux fonctions.

1. Dériver la fonction $f(x) = e^x + x^2$.

2. Dériver la fonction $g(x) = x\,e^x$.

Exercice 9 – Dérivée de e^u

Quand l'exposant n'est plus simplement x mais une fonction $u(x)$, on utilise la formule de dérivation des fonctions composées $(e^u)' = u'\,e^u$.

1. Dériver la fonction $f(x) = e^{3x+1}$.

2. Dériver la fonction $g(x) = e^{-x^2}$.

Exercice 10 – Passer par le logarithme

Résoudre $e^x = 5$, puis $3e^{-2x} = 9$.

Exercice 11 – Étude de x·e^x

On étudie la fonction $f(x) = x\,e^x$ définie sur $\mathbb{R}$. L'objectif est classique au bac : signe de la dérivée, tableau de variations et recherche d'un extremum.

1. Calculer la dérivée $f'(x)$.

2. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations.

3. En déduire le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 12 – Inéquation

Résoudre une inéquation exponentielle repose sur la stricte croissance de l'exponentielle : elle conserve le sens des inégalités. On compare très souvent à la valeur de référence $e^0 = 1$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^x \geq 1$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{2x-1} > 1$.

Exercice 13 – Limites par croissances comparées

Aux bornes du domaine, certaines limites présentent des formes indéterminées entre une puissance de x et une exponentielle. On les lève grâce aux croissances comparées : « l'exponentielle l'emporte ».

1. Déterminer $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x}$.

2. Déterminer $\lim_{x \to -\infty} x\,e^x$.

Exercice 14 – Inégalité $e^x \geq x + 1$

On souhaite établir l'inégalité de référence $e^x \geq x + 1$, valable pour tout réel x. La méthode standard consiste à étudier le signe de la différence $g(x) = e^x - x - 1$ en passant par son minimum.

1. Calculer $g'(x)$ et étudier les variations de g.

2. En déduire le signe de $g(x)$, puis l'inégalité $e^x \geq x + 1$ pour tout réel x.

Exercice 15 – Inéquation par changement de variable

Résoudre $e^{2x} - e^x - 2 < 0$.

Exercice 16 – Type bac : étude de $(x - 1)e^x$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x - 1)e^x$. On en mène une étude complète à la manière d'un exercice de baccalauréat.

1. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

2. Déterminer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

Exercice 17 – Type bac : fonction logistique

On étudie la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$. C'est une fonction de type logistique, dont la courbe modélise par exemple une proportion qui croît de 0 vers 1.

1. Montrer que $f'(x) = \dfrac{e^x}{(e^x + 1)^2}$ et en déduire le sens de variation de f.

2. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

Exercice 18 – Type bac : refroidissement

La température (en °C) d'un café posé sur une table est modélisée par $T(t) = 20 + 60\,e^{-0{,}1\,t}$, où t désigne le temps écoulé en minutes. La pièce est à $20\,°C$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

1. Déterminer la température initiale du café.

2. Déterminer au bout de combien de temps le café atteint $50\,°C$.

Exercice 19 – Type bac : étude de $e^x - 2x$ et position d'une tangente

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - 2x$, de courbe C.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. Calculer $f'(x)$, étudier son signe et dresser le tableau de variations de f.

3. En déduire que pour tout réel x, $e^x > 2x$.

4. Étudier la convexité de f.

5. Déterminer la tangente T à C en 0, puis étudier la position de C par rapport à T.

Exercice 20 – Type bac : étude de $(2x + 1)e^{-x}$

Soit $f(x) = (2x + 1)e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Interpréter.

2. Montrer que $f'(x) = (1 - 2x)e^{-x}$ et dresser le tableau de variations.

3. Résoudre $f(x) = 0$ et donner le signe de f.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Propriétés algébriques

Pour un produit, on additionne les exposants : $e^a \times e^b = e^{a+b}$. Ici $e^2 \times e^3 = e^{2+3} = e^5$.

Pour un quotient, on soustrait les exposants : $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$. Ici $\dfrac{e^5}{e^2} = e^{5-2} = e^3$.

Pour une puissance d'exponentielle, on multiplie les exposants : $(e^a)^b = e^{ab}$. Ici $\left(e^2\right)^3 = e^{2\times 3} = e^6$.

Réponse. e^5 ; e^3 ; e^6.

Rappel de cours. $e^a \times e^b = e^{a+b}$, $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$, $(e^a)^b = e^{ab}$, $e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$.

Correction de l'exercice 2 – Équation e^x = e^k

On cherche les réels x tels que $e^x = 1$. On reconnaît une valeur de référence : $1 = e^0$. L'équation s'écrit donc $e^x = e^0$.

Comme l'exponentielle est strictement croissante (donc injective), $e^x = e^0 \Leftrightarrow x = 0$. D'où $x = 0$.

Pour la seconde équation, les deux membres sont déjà des exponentielles : $e^x = e^3 \Leftrightarrow x = 3$.

Réponse. $x = 0$; $x = 3$.

Rappel de cours. $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$. Et $e^0 = 1$.

Correction de l'exercice 3 – Simplifier des expressions

Pour A, c'est un produit : on additionne les exposants. $A = e^x \times e^{-x} = e^{x+(-x)} = e^0$. Or $e^0 = 1$, donc $A = 1$.

Pour B, c'est un quotient : on soustrait les exposants. $B = \dfrac{e^{2x}}{e^x} = e^{2x-x} = e^x$.

Réponse. $A = 1$; $B = e^x$.

Erreur fréquente. $e^x \times e^{-x}$ n'est pas e^{-x^2} : on additionne les exposants $x + (-x) = 0$, on ne les multiplie pas.

Correction de l'exercice 4 – Égalité d'exponentielles

L'exponentielle est strictement croissante : $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$.

$e^{x^2} = e^4 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 2$.

$e^{3x-1} = 1 = e^0 \Leftrightarrow 3x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{3}$.

Réponse. $\{-2\,;2\}$ et $\left\langle \frac{1}{3} \right\rangle$.

Rappel de cours. $1 = e^0$: penser à écrire chaque membre comme une exponentielle.

Correction de l'exercice 5 – Équation à exponentielles

Les deux membres sont des exponentielles. Comme $e^A = e^B \Leftrightarrow A = B$, l'équation $e^{2x} = e^{x+3}$ équivaut à $2x = x + 3$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

On résout cette équation du premier degré : $2x - x = 3$, c'est-à-dire $x = 3$.

Réponse. $x = 3$.

Rappel de cours. Quand l'équation est de la forme $e^A = e^B$, on se ramène à $A = B$.

Correction de l'exercice 6 – Équation e^x = k

Pour $e^x = 5$: comme $5 > 0$, l'équation a une solution. On applique le logarithme népérien aux deux membres : $x = \ln(5)$.

Pour $e^x = -2$: c'est impossible, car $e^x > 0$ pour tout réel x, alors que $-2 < 0$. L'équation n'a donc aucune solution.

Réponse. $x = \ln(5)$; pour $e^x = -2$: $S = \varnothing$.

Rappel de cours. $e^x > 0$ toujours : une équation $e^x = k$ n'a de solution que si $k > 0$, et alors $x = \ln(k)$.

Correction de l'exercice 7 – Changement de variable

On pose $X = e^x$, avec nécessairement $X > 0$. Comme $e^{2x} = (e^x)^2 = X^2$, l'équation $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$ devient $X^2 - 3X + 2 = 0$.

On résout ce trinôme : $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 9 - 8 = 1 > 0$. Les racines sont $X = \dfrac{3 \pm 1}{2}$, soit $X = 2$ ou $X = 1$. Les deux sont strictement positives, donc acceptables.

Retour à x : $e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ (car $1 = e^0$) ; $e^x = 2 \Leftrightarrow x = \ln(2)$.

Réponse. $S = \{0\,;\ln(2)\}$.

Rappel de cours. $e^{2x} = (e^x)^2$: le changement $X = e^x$ transforme l'équation en trinôme. Ne garder que les $X > 0$.

Correction de l'exercice 8 – Dérivées simples

Pour f, c'est une somme : on dérive terme à terme. $(e^x)' = e^x$ et $(x^2)' = 2x$, donc $f'(x) = e^x + 2x$.

Pour g, c'est un produit. On applique $(uv)' = u'v + uv'$ avec $u = x$ ($u' = 1$) et $v = e^x$ ($v' = e^x$) : $g'(x) = 1 \times e^x + x \times e^x = (1 + x)e^x$.

Réponse. $f'(x) = e^x + 2x$; $g'(x) = (1 + x)e^x$.

Rappel de cours. La dérivée de e^x est e^x : l'exponentielle est sa propre dérivée.

Correction de l'exercice 9 – Dérivée de e^u

On applique la formule $(e^u)' = u'\,e^u$.

Pour f, l'exposant est $u = 3x + 1$, donc $u' = 3$. D'où $f'(x) = 3\,e^{3x+1}$.

Pour g, l'exposant est $u = -x^2$, donc $u' = -2x$. D'où $g'(x) = -2x\,e^{-x^2}$.

Réponse. $f'(x) = 3e^{3x+1}$; $g'(x) = -2x\,e^{-x^2}$.

Rappel de cours. $(e^u)' = u'\,e^u$: on dérive l'exposant et on le met en facteur devant l'exponentielle inchangée.

Erreur fréquente. L'exponentielle ne « descend » jamais : dans e^{3x+1} on garde e^{3x+1}, on multiplie juste par $u' = 3$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 10 – Passer par le logarithme

$e^x = 5 \Leftrightarrow x = \ln 5$ ($5 > 0$).

$3e^{-2x} = 9 \Leftrightarrow e^{-2x} = 3 \Leftrightarrow -2x = \ln 3 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\ln 3}{2}$.

Réponse. $x = \ln 5$; $x = -\dfrac{\ln 3}{2}$.

Rappel de cours. Pour $k > 0$, $e^X = k \Leftrightarrow X = \ln k$. Pour $k \leq 0$, aucune solution.

Correction de l'exercice 11 – Étude de x·eˣ

f est un produit : avec $u = x$ ($u' = 1$) et $v = e^x$ ($v' = e^x$), $f'(x) = 1 \times e^x + x \times e^x = (1 + x)e^x$.

Pour le signe : $e^x > 0$ pour tout x, donc $f'(x)$ a le signe de $1 + x$. On a $1 + x < 0 \Leftrightarrow x < -1$ et $1 + x > 0 \Leftrightarrow x > -1$.

Ainsi f est décroissante sur $]-\infty ; -1]$ puis croissante sur $[-1 ; +\infty[$: elle admet un minimum en $x = -1$.

On calcule ce minimum : $f(-1) = -1 \times e^{-1} = -\dfrac{1}{e} \approx -0{,}37$.

Réponse. $f'(x) = (1 + x)e^x$; minimum $f(-1) = -\dfrac{1}{e}$ en $x = -1$.

Rappel de cours. Comme $e^x > 0$, le signe de la dérivée d'un produit $P(x)\,e^x$ est celui du facteur $P(x)$.

Correction de l'exercice 12 – Inéquation

On écrit $1 = e^0$, donc $e^x \geq 1$ devient $e^x \geq e^0$. Comme exp est strictement croissante, elle conserve l'inégalité : $e^x \geq e^0 \Leftrightarrow x \geq 0$.

De même, $e^{2x-1} > 1 = e^0$ équivaut à $2x - 1 > 0$. On résout : $2x > 1$, donc $x > \dfrac{1}{2}$.

Réponse. $e^x \geq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$; $e^{2x-1} > 1 \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{2}$.

Rappel de cours. exp est strictement croissante : elle conserve le sens des inégalités. On compare souvent à $e^0 = 1$.

Correction de l'exercice 13 – Limites par croissances comparées

En $+\infty$, $e^x \to +\infty$ et $x \to +\infty$: on a la forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$. La croissance comparée donne $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$, car l'exponentielle l'emporte sur x.

En $-\infty$, $x \to -\infty$ et $e^x \to 0$: on a la forme indéterminée $(-\infty) \times 0$. La croissance comparée donne $\lim_{x \to -\infty} x\,e^x = 0$.

Réponse. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$; $\lim_{x \to -\infty} x\,e^x = 0$.

Rappel de cours. Croissances comparées : $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} x\,e^x = 0$.
« L'exponentielle l'emporte. »

Correction de l'exercice 14 – Inégalité eˣ ≥ x + 1

On dérive : $g'(x) = e^x - 1$. Cette dérivée s'annule et change de signe en 0, car $e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$.

Donc g est décroissante sur $]-\infty ; 0]$ puis croissante sur $[0 ; +\infty[$: elle admet un minimum en $x = 0$.

On calcule ce minimum : $g(0) = e^0 - 0 - 1 = 1 - 1 = 0$. Comme 0 est le minimum, pour

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

tout réel x on a $g(x) \geq g(0) = 0$, c'est-à-dire $e^x - x - 1 \geq 0$.

Autrement dit $e^x \geq x + 1$ pour tout réel x, avec égalité seulement en $x = 0$.

Réponse. Minimum $g(0) = 0$; on en déduit $e^x \geq x + 1$ pour tout réel x.

Rappel de cours. Pour prouver une inégalité, on étudie le signe de la différence $g(x) = (\text{gauche}) - (\text{droite})$ via son minimum.

Correction de l'exercice 15 – Inéquation par changement de variable

On pose $X = e^x$, avec $X > 0$. Comme $e^{2x} = (e^x)^2$, l'inéquation devient $X^2 - X - 2 < 0$.

$X^2 - X - 2 = (X - 2)(X + 1)$: négatif pour $X \in]-1\,;2[$.

Avec $X > 0$: $0 < X < 2$, soit $e^x < 2 \Leftrightarrow x < \ln 2$.

Réponse. $S =]-\infty\,;\ln 2[$.

Rappel de cours. $e^{2x} = (e^x)^2$: un trinôme peut se cacher derrière des exponentielles.

Correction de l'exercice 16 – Type bac : étude de $(x-1)e^x$

f est un produit. Avec $u = x - 1$ ($u' = 1$) et $v = e^x$ ($v' = e^x$), on a $f'(x) = u'v + uv' = e^x + (x-1)e^x$. En factorisant par e^x : $f'(x) = x\,e^x$.

Comme $e^x > 0$, $f'(x)$ a le signe de x : f est décroissante sur $]-\infty;0]$, croissante sur $[0;+\infty[$. Le minimum est $f(0) = (0-1)e^0 = -1$.

En $-\infty$, on développe : $f(x) = (x-1)e^x = x\,e^x - e^x$. Or $x\,e^x \to 0$ (croissance comparée) et $e^x \to 0$, donc par somme $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Réponse. $f'(x) = x\,e^x$; minimum $f(0) = -1$; $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Rappel de cours. On découpe $(x-1)e^x = x\,e^x - e^x$ pour utiliser la croissance comparée $x\,e^x \to 0$ en $-\infty$.

Correction de l'exercice 17 – Type bac : fonction logistique

f est un quotient : $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u = e^x$ et $v = e^x + 1$, donc $u' = v' = e^x$.

On calcule le numérateur : $u'v - uv' = e^x(e^x + 1) - e^x \cdot e^x = e^x$. Ainsi $f'(x) = \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$. Le numérateur et le dénominateur sont strictement positifs, donc $f' > 0$: f est strictement croissante.

En $-\infty$: $e^x \to 0$, donc $f(x) \to \dfrac{0}{0+1} = 0$.

En $+\infty$: on factorise par e^x au numérateur et au dénominateur, $f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$. Comme $e^{-x} \to 0$, $f(x) \to \dfrac{1}{1+0} = 1$.

Réponse. $f'(x) = \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2} > 0$ (croissante) ; $\lim_{-\infty} f = 0$ et $\lim_{+\infty} f = 1$.

Rappel de cours. Pour la limite en $+\infty$ d'un quotient d'exponentielles, on factorise par e^x : $\dfrac{e^x}{e^x+1} = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

Correction de l'exercice 18 – Type bac : refroidissement

La température initiale correspond à $t = 0$: $T(0) = 20 + 60\,e^0 = 20 + 60 = 80\,°C$.

On résout l'équation $T(t) = 50$: $20 + 60\,e^{-0{,}1t} = 50$, d'où $60\,e^{-0{,}1t} = 30$, soit $e^{-0{,}1t} = 0{,}5$.

On applique le logarithme népérien : $-0{,}1\,t = \ln(0{,}5) = -\ln(2)$. On isole t :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$t = \dfrac{\ln(2)}{0{,}1} = 10\ln(2) \approx 6{,}9$ min.

Réponse. Température initiale $80\,°C$; le café atteint $50\,°C$ au bout de $10\ln(2) \approx 6{,}9$ minutes.

Rappel de cours. Pour « à quel instant » on résout une équation en t : isoler l'exponentielle puis passer au ln.

Correction de l'exercice 19 – Type bac : étude de $e^x - 2x$ et position d'une tangente

En $-\infty$: $e^x \to 0$ et $-2x \to +\infty$, donc $f(x) \to +\infty$. En $+\infty$: $f(x) = e^x(1 - \frac{2x}{e^x})$ et $\frac{x}{e^x} \to 0$, donc $f(x) \to +\infty$.

$f'(x) = e^x - 2$. $f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > 2 \Leftrightarrow x > \ln 2$. Donc f décroît sur $]-\infty ; \ln 2]$, croît sur $[\ln 2 ; +\infty[$, avec un minimum $f(\ln 2) = e^{\ln 2} - 2\ln 2 = 2 - 2\ln 2 \approx 0{,}61$.

Le minimum de f vaut $2 - 2\ln 2$. Or $\ln 2 \approx 0{,}69 < 1$, donc $2 - 2\ln 2 > 0$. Ainsi $f(x) \geq 2 - 2\ln 2 > 0$ pour tout x, c'est-à-dire $e^x - 2x > 0$, soit $e^x > 2x$.

$f''(x) = e^x > 0$ sur $\mathbb{R}$: f est convexe.

$f(0) = 1$ et $f'(0) = e^0 - 2 = -1$, donc T: $y = -x + 1$. Comme f est convexe, C est au-dessus de toutes ses tangentes : C est au-dessus de T. En effet $f(x) - (-x + 1) = e^x - x - 1 \geq 0$ (nul seulement en $x = 0$).

Réponse. $\lim_{\pm\infty} f = +\infty$; $\min f(\ln 2) = 2 - 2\ln 2 > 0 \Rightarrow e^x > 2x$; f convexe ; T:$y = -x + 1$, C au-dessus de T ($e^x - x - 1 \geq 0$).

Rappel de cours. Une fonction convexe est toujours au-dessus de ses tangentes ; le signe du minimum donne une inégalité sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 20 – Type bac : étude de $(2x + 1)e^{-x}$

1) En $-\infty$: $2x + 1 \to -\infty$ et $e^{-x} \to +\infty$, donc $f(x) \to -\infty$.

En $+\infty$: $f(x) = 2\dfrac{x}{e^x} + e^{-x}$. Par croissances comparées $\frac{x}{e^x} \to 0$, et $e^{-x} \to 0$: $f(x) \to 0$. L'axe des abscisses est asymptote en $+\infty$.

2) Produit : $f'(x) = 2e^{-x} + (2x + 1)(-e^{-x}) = (2 - 2x - 1)e^{-x} = (1 - 2x)e^{-x}$. Comme $e^{-x} > 0$, le signe est celui de $1 - 2x$.

f est croissante sur $\left]-\infty ; \frac{1}{2}\right]$, décroissante sur $\left[\frac{1}{2} ; +\infty\right[$. Maximum : $f\left(\frac{1}{2}\right) = 2e^{-1/2} = \dfrac{2}{\sqrt{e}} \approx 1{,}21$.

3) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2}$ ($e^{-x} \neq 0$). f est négative sur $\left]-\infty ; -\frac{1}{2}\right[$ et positive ensuite.

Réponse. Limites $-\infty$ et 0 ; maximum $\frac{2}{\sqrt{e}}$ en $\frac{1}{2}$; f s'annule en $-\frac{1}{2}$.

Rappel de cours. $(e^{-x})' = -e^{-x}$, et $e^{-x} > 0$: le signe de f' vient de l'autre facteur.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).