Fonction exponentielle — Terminale spécialité

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés

Présentation

La fonction exponentielle $\exp(x) = e^x$ est l'unique fonction égale à sa dérivée et valant 1 en 0. Elle est strictement positive et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Ces exercices corrigés couvrent tout le programme de Terminale spécialité : propriétés algébriques, équations et inéquations, dérivation (y compris e^u), limites par croissances comparées et études de fonctions type bac. Difficulté croissante, correction détaillée d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-specialite/fonction-exponentielle

Exercice 1 – Propriétés algébriques

On rencontre constamment des produits, quotients et puissances d'exponentielles dans les calculs de Terminale. Avant toute étude de fonction, il faut savoir les simplifier au brouillon en quelques secondes.

1. Simplifier le produit $e^2 \times e^3$.

2. Simplifier le quotient $\dfrac{e^5}{e^2}$.

3. Simplifier la puissance $\left(e^2\right)^3$.

Exercice 2 – Équation e^x = e^k

Résoudre une équation exponentielle « élémentaire », c'est exploiter le fait que la fonction exponentielle est strictement croissante, donc injective : deux exponentielles sont égales si et seulement si leurs exposants le sont.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^x = 1$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^x = e^3$.

Exercice 3 – Simplifier des expressions

Avant de dériver ou d'étudier une fonction, on a souvent intérêt à simplifier son écriture. On manipule ici deux expressions contenant des exponentielles.

1. Simplifier l'expression $A = e^x \times e^{-x}$.

2. Simplifier l'expression $B = \dfrac{e^{2x}}{e^x}$.

Exercice 4 – Égalité d'exponentielles

Résoudre dans $\mathbb{R}$: $e^{x^2} = e^4$ et $e^{3x-1} = 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Équation à exponentielles

Lorsqu'une équation met en présence deux exponentielles dont les exposants sont des expressions de x, on se ramène à une équation classique sur les exposants.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{2x} = e^{x+3}$.

Exercice 6 – Équation e^x = k

Résoudre $e^x = k$ revient à se demander si k est atteignable par l'exponentielle. Comme $e^x > 0$ pour tout réel x, tout dépend du signe de k.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^x = 5$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^x = -2$.

Exercice 7 – Changement de variable

Certaines équations « cachent » un trinôme du second degré sous des exponentielles. Un changement de variable bien choisi les ramène à une équation connue.

1. En posant $X = e^x$, transformer l'équation $e^{2x} - 3e^x + 2 = 0$ en une équation du second degré.

2. Résoudre cette équation en X, puis revenir à l'inconnue x.

Exercice 8 – Dérivées simples

L'exponentielle est sa propre dérivée. On combine ce résultat avec les règles usuelles de dérivation (somme, produit) sur deux fonctions.

1. Dériver la fonction $f(x) = e^x + x^2$.

2. Dériver la fonction $g(x) = x\,e^x$.

Exercice 9 – Dérivée de e^u

Quand l'exposant n'est plus simplement x mais une fonction $u(x)$, on utilise la formule de dérivation des fonctions composées $(e^u)' = u'\,e^u$.

1. Dériver la fonction $f(x) = e^{3x+1}$.

2. Dériver la fonction $g(x) = e^{-x^2}$.

Exercice 10 – Passer par le logarithme

Résoudre $e^x = 5$, puis $3e^{-2x} = 9$.

Exercice 11 – Étude de x·e^x

On étudie la fonction $f(x) = x\,e^x$ définie sur $\mathbb{R}$. L'objectif est classique au bac : signe de la dérivée, tableau de variations et recherche d'un extremum.

1. Calculer la dérivée $f'(x)$.

2. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations.

3. En déduire le minimum de f sur $\mathbb{R}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 12 – Inéquation

Résoudre une inéquation exponentielle repose sur la stricte croissance de l'exponentielle : elle conserve le sens des inégalités. On compare très souvent à la valeur de référence $e^0 = 1$.

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^x \geq 1$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $e^{2x-1} > 1$.

Exercice 13 – Limites par croissances comparées

Aux bornes du domaine, certaines limites présentent des formes indéterminées entre une puissance de x et une exponentielle. On les lève grâce aux croissances comparées : « l'exponentielle l'emporte ».

1. Déterminer $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x}$.

2. Déterminer $\lim_{x \to -\infty} x\,e^x$.

Exercice 14 – Inégalité $e^x \geq x + 1$

On souhaite établir l'inégalité de référence $e^x \geq x + 1$, valable pour tout réel x. La méthode standard consiste à étudier le signe de la différence $g(x) = e^x - x - 1$ en passant par son minimum.

1. Calculer $g'(x)$ et étudier les variations de g.

2. En déduire le signe de $g(x)$, puis l'inégalité $e^x \geq x + 1$ pour tout réel x.

Exercice 15 – Inéquation par changement de variable

Résoudre $e^{2x} - e^x - 2 < 0$.

Exercice 16 – Type bac : étude de $(x - 1)e^x$

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x - 1)e^x$. On en mène une étude complète à la manière d'un exercice de baccalauréat.

1. Calculer $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

2. Déterminer $\lim_{x \to -\infty} f(x)$.

Exercice 17 – Type bac : fonction logistique

On étudie la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$. C'est une fonction de type logistique, dont la courbe modélise par exemple une proportion qui croît de 0 vers 1.

1. Montrer que $f'(x) = \dfrac{e^x}{(e^x + 1)^2}$ et en déduire le sens de variation de f.

2. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

Exercice 18 – Type bac : refroidissement

La température (en °C) d'un café posé sur une table est modélisée par $T(t) = 20 + 60\,e^{-0{,}1\,t}$, où t désigne le temps écoulé en minutes. La pièce est à $20\,°C$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

1. Déterminer la température initiale du café.

2. Déterminer au bout de combien de temps le café atteint $50\,°C$.

Exercice 19 – Type bac : étude de $e^x - 2x$ et position d'une tangente

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - 2x$, de courbe C.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. Calculer $f'(x)$, étudier son signe et dresser le tableau de variations de f.

3. En déduire que pour tout réel x, $e^x > 2x$.

4. Étudier la convexité de f.

5. Déterminer la tangente T à C en 0, puis étudier la position de C par rapport à T.

Exercice 20 – Type bac : étude de $(2x + 1)e^{-x}$

Soit $f(x) = (2x + 1)e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Interpréter.

2. Montrer que $f'(x) = (1 - 2x)e^{-x}$ et dresser le tableau de variations.

3. Résoudre $f(x) = 0$ et donner le signe de f.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).