Fonction logarithme népérien — Terminale spécialité

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

La fonction logarithme népérien ln est la fonction réciproque de l'exponentielle : $\ln(e^x) = x$ et $e^{\ln(x)} = x$ pour $x > 0$. Ces exercices corrigés couvrent tout le programme de Terminale spécialité : calculs et propriétés algébriques, équations et inéquations, dérivation, limites par croissances comparées et études de fonctions type bac. La difficulté est croissante : commence par les premiers, l'énoncé puis la correction détaillée s'affichent d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables : mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-specialite/fonction-logarithme

Exercice 1 – Valeurs de référence du logarithme

Le logarithme népérien ln est la fonction réciproque de l'exponentielle. Avant de manipuler des expressions complexes, il faut maîtriser ses valeurs de base, sans calculatrice.

1. Donner la valeur exacte de $\ln(1)$ et de $\ln(e)$.

2. Calculer $\ln(e^3)$.

3. Calculer $e^{\ln(5)}$.

Exercice 2 – Propriétés algébriques du logarithme

Les propriétés algébriques du logarithme permettent de transformer une somme ou une différence de logarithmes en un logarithme unique. On considère $A = \ln(2) + \ln(3)$, $B = \ln(12) - \ln(4)$ et $C = 3\ln(2)$.

1. Écrire A sous la forme d'un seul logarithme.

2. Écrire B sous la forme d'un seul logarithme.

3. Écrire C sous la forme d'un seul logarithme.

Exercice 3 – Équation ln(x) = k

Résoudre une équation de la forme $\ln(x) = k$ revient à utiliser le fait que ln est une bijection de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$. On travaille sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

1. Résoudre $\ln(x) = 3$.

2. Résoudre $\ln(x) = -1$ et donner la solution sous forme de fraction.

Exercice 4 – Simplifier avec e

Calculer $A = \ln(e^3) - \ln\left(\frac{1}{e}\right) + \ln(\sqrt{e})$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Équations avec exponentielle

Pour isoler une inconnue placée en exposant, on applique le logarithme népérien, fonction réciproque de l'exponentielle. On résout dans $\mathbb{R}$.

1. Résoudre $e^{x} = 7$.

2. Résoudre $e^{2x} = 5$.

Exercice 6 – Équation avec domaine de définition

On considère l'équation $\ln(x) + \ln(x-1) = \ln(6)$. Lorsque l'inconnue apparaît dans un logarithme, il faut d'abord déterminer le domaine d'existence avant de résoudre.

1. Déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles l'équation a un sens.

2. Résoudre l'équation sur ce domaine.

Exercice 7 – Inéquations logarithmiques

La fonction ln étant strictement croissante, elle conserve le sens des inégalités. On résout deux inéquations en tenant compte du domaine.

1. Résoudre $\ln(x) \leq 2$.

2. Résoudre $\ln(2x-1) > 0$.

Exercice 8 – Exprimer en fonction de ln 2

En utilisant la propriété $\ln(a^{n}) = n\ln(a)$, on peut exprimer de nombreux logarithmes en fonction de $\ln(2)$. On considère $\ln(8)$, $\ln\dfrac{1}{4}$ et $\ln(\sqrt{2})$.

1. Exprimer $\ln(8)$ en fonction de $\ln(2)$.

2. Exprimer $\ln\dfrac{1}{4}$ en fonction de $\ln(2)$.

3. Exprimer $\ln(\sqrt{2})$ en fonction de $\ln(2)$.

Exercice 9 – Dérivées avec logarithme

La dérivée de référence $(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$ permet, combinée aux règles usuelles, de dériver des fonctions faisant intervenir ln. On travaille sur $]0;+\infty[$ avec $f(x) = \ln(x) + x^{2}$ et $g(x) = x\ln(x)$.

1. Calculer $f'(x)$.

2. Calculer $g'(x)$ en utilisant la dérivée d'un produit.

Exercice 10 – Deux équations avec domaine

Résoudre (E_1) $\ln(2x-1) = \ln(x+3)$ et (E_2) $\ln(x+1) - \ln(x) = \ln 2$.

Exercice 11 – Étude de f(x) = ln(x)/x

On considère la fonction $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ définie sur $]0;+\infty[$. On souhaite étudier ses variations et déterminer son maximum.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

1. Calculer $f'(x)$ en utilisant la dérivée d'un quotient.

2. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire les variations de f.

3. En déduire le maximum de f et la valeur où il est atteint.

Exercice 12 – Équation par changement de variable

On considère l'équation $2(\ln(x))^2 - 3\ln(x) + 1 = 0$ sur $]0;+\infty[$. Lorsque $\ln(x)$ apparaît au carré et au premier degré, un changement de variable ramène à un trinôme du second degré.

1. En posant $X = \ln(x)$, écrire l'équation vérifiée par X et la résoudre.

2. Revenir à l'inconnue x et conclure.

Exercice 13 – Limites par croissances comparées

Les croissances comparées permettent de lever des formes indéterminées mêlant ln et puissances de x. On souhaite déterminer deux limites.

1. Déterminer $\lim_{x \to 0^+} x\ln(x)$.

2. Déterminer $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$.

Exercice 14 – Fonction composée ln(x²+1)

On considère la fonction $f(x) = \ln(x^2+1)$. On souhaite justifier son domaine, la dériver et dresser son tableau de variations.

1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Calculer $f'(x)$ à l'aide de la dérivée d'un logarithme composé.

3. Étudier le signe de $f'(x)$, dresser le tableau de variations et donner le minimum.

Exercice 15 – Seuil d'une suite géométrique

Une population diminue de 10% par an : au bout de n années il en reste une proportion $0{,}9^n$ de la population initiale. On veut déterminer à partir de quelle année il en reste moins de 1%, c'est-à-dire résoudre $0{,}9^n < 0{,}01$.

1. En appliquant le logarithme népérien, transformer l'inéquation $0{,}9^n < 0{,}01$ en une inéquation sur n.

2. Conclure en donnant la première année entière qui convient.

Exercice 16 – Inéquation et intersection avec le domaine

Résoudre $\ln(x) + \ln(x+2) \leq \ln 3$.

Exercice 17 – Type bac : inégalité ln x ≤ x − 1

On considère la fonction $f(x) = x - \ln(x)$ définie sur $]0;+\infty[$. L'objectif est de démontrer une inégalité de référence du cours en passant par l'étude des variations de f.

1. Calculer $f'(x)$, étudier son signe et dresser le tableau de variations de f.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

2. En déduire que pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leq x - 1$.

Exercice 18 – Type bac : étude de x·ln x − x

On considère la fonction $f(x) = x\ln(x) - x$ définie sur $]0;+\infty[$. On étudie son comportement au bord du domaine puis ses variations.

1. Déterminer $\lim_{x \to 0^+} f(x)$.

2. Calculer $f'(x)$, dresser le tableau de variations et donner le minimum de f.

Exercice 19 – Type bac : étude de ln(x)/x et inégalité

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$, de courbe C. On rappelle que $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.

1. Déterminer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$, et interpréter graphiquement.

2. Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1 - \ln(x)}{x^2}$.

3. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

4. Résoudre $f(x) = 0$ et préciser le signe de f sur $]0;+\infty[$.

5. En déduire que pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leq \dfrac{x}{e}$.

Exercice 20 – Type bac : étude de x² − 2 ln x

Soit $f(x) = x^2 - 2\ln x$ sur $]0\,;+\infty[$.

1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

2. Étudier les variations de f.

3. En déduire que $\ln x < \dfrac{x^2}{2}$ pour tout $x > 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Valeurs de référence du logarithme

On cherche $\ln(1)$ et $\ln(e)$. Par définition, $\ln(a)$ est l'exposant k tel que $e^k = a$. Comme $e^0 = 1$, on a $\ln(1) = 0$. Comme $e^1 = e$, on a $\ln(e) = 1$.

On cherche $\ln(e^3)$. On utilise la propriété fondamentale de réciprocité $\ln(e^x) = x$, valable pour tout réel x. Avec $x = 3$, on obtient directement $\ln(e^3) = 3$.

On cherche $e^{\ln(5)}$. On utilise l'autre relation de réciprocité $e^{\ln(x)} = x$, valable car l'argument $5 > 0$. On obtient $e^{\ln(5)} = 5$.

Réponse. $\ln(1) = 0$, $\ln(e) = 1$, $\ln(e^3) = 3$, $e^{\ln(5)} = 5$.

Rappel de cours. ln et exp sont réciproques : $\ln(e^x) = x$ pour tout réel x, et $e^{\ln(x)} = x$ pour tout $x > 0$.

Correction de l'exercice 2 – Propriétés algébriques du logarithme

On cherche à regrouper $A = \ln(2) + \ln(3)$. La propriété du logarithme d'un produit donne $\ln(a) + \ln(b) = \ln(ab)$. Donc $A = \ln(2 \times 3) = \ln(6)$.

On cherche à regrouper $B = \ln(12) - \ln(4)$. La propriété du logarithme d'un quotient donne $\ln(a) - \ln(b) = \ln\frac{a}{b}$. Donc $B = \ln\left(\frac{12}{4}\right) = \ln(3)$.

On cherche à transformer $C = 3\ln(2)$. La propriété du logarithme d'une puissance donne $n\ln(a) = \ln(a^n)$. Donc $C = \ln(2^3) = \ln(8)$.

Réponse. $A = \ln(6)$, $B = \ln(3)$, $C = \ln(8)$.

Rappel de cours. Pour $a, b > 0$: $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$, $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$, $\ln(a^n) = n\ln(a)$.

Erreur fréquente. $\ln(a + b)$ n'est PAS $\ln(a) + \ln(b)$. Les propriétés ne marchent que sur les produits, quotients et puissances.

Correction de l'exercice 3 – Équation ln(x) = k

On cherche les solutions de $\ln(x) = 3$. On applique l'exponentielle (fonction croissante) aux deux membres : $\ln(x) = 3 \Leftrightarrow e^{\ln(x)} = e^3 \Leftrightarrow x = e^3$. Comme $e^3 > 0$, cette valeur appartient bien à $]0\,;+\infty[$: elle convient.

On cherche les solutions de $\ln(x) = -1$. De la même manière, $\ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} = \frac{1}{e}$. Cette valeur est strictement positive, donc elle appartient au domaine et convient.

Réponse. $S_1 = \{e^3\}$ et $S_2 = \left\langle\frac{1}{e}\right\rangle$.

Rappel de cours. $\ln(x) = k \Leftrightarrow x = e^k$ (pour tout réel k), car ln est une bijection de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$.

Correction de l'exercice 4 – Simplifier avec e

$\ln(e^3) = 3$ car ln et exp sont réciproques.

$\ln\left(\frac{1}{e}\right) = -\ln(e) = -1$.

$\ln(\sqrt{e}) = \ln\left(e^{1/2}\right) = \frac{1}{2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$A = 3 - (-1) + \frac{1}{2} = \frac{9}{2}$.

Réponse. $A = \frac{9}{2}$.

Rappel de cours. $\ln(e^a) = a$, $\ln\frac{1}{b} = -\ln b$, $\ln(\sqrt{b}) = \frac{1}{2}\ln b$.

Correction de l'exercice 5 – Équations avec exponentielle

On cherche les solutions de $e^x = 7$. On applique ln aux deux membres, ce qui est possible car $7 > 0$: $\ln(e^x) = \ln(7)$. Or $\ln(e^x) = x$, donc $x = \ln(7)$.

On cherche les solutions de $e^{2x} = 5$. On applique ln aux deux membres (possible car $5 > 0$) : $\ln(e^{2x}) = \ln(5)$, c'est-à-dire $2x = \ln(5)$. On divise alors par 2 : $x = \frac{\ln(5)}{2}$.

Réponse. $x = \ln(7)$; $x = \frac{\ln(5)}{2}$.

Rappel de cours. $e^x = k$ a une solution si et seulement si $k > 0$, et alors $x = \ln(k)$.

Erreur fréquente. $\frac{\ln(5)}{2}$ n'est pas $\ln\left(\frac{5}{2}\right)$ ni $\ln(2{,}5)$. On divise le logarithme par 2, on ne divise pas l'argument.

Correction de l'exercice 6 – Équation avec domaine de définition

On cherche le domaine. Pour que $\ln(x)$ et $\ln(x-1)$ existent, il faut $x > 0$ et $x - 1 > 0$, donc $x > 1$. On résout sur $]1; +\infty[$.

On regroupe le membre de gauche avec la propriété du produit : $\ln(x) + \ln(x-1) = \ln(x(x-1))$. L'équation devient $\ln(x(x-1)) = \ln(6)$. Par injectivité de ln, $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$, d'où $x(x-1) = 6$, soit $x^2 - x - 6 = 0$. Le discriminant vaut $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 1 + 24 = 25$, et les racines sont $x = \frac{1 \pm 5}{2}$, c'est-à-dire $x = 3$ ou $x = -2$. On ne garde que les solutions > 1 : $x = -2$ est rejetée, seule $x = 3$ convient.

Réponse. $S = \{3\}$.

Rappel de cours. $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$ (avec $a, b > 0$). Toujours commencer par le domaine quand l'inconnue est dans un ln.

Erreur fréquente. Oublier le domaine fait accepter $x = -2$, qui rend $\ln(x)$ impossible. Le domaine n'est pas optionnel.

Correction de l'exercice 7 – Inéquations logarithmiques

On cherche à résoudre $\ln(x) \leq 2$. Le domaine impose $x > 0$. Comme ln est strictement croissante, on peut appliquer l'exponentielle en conservant le sens : $\ln(x) \leq 2 \Leftrightarrow x \leq e^2$. En croisant avec le domaine $x > 0$, on obtient $0 < x \leq e^2$.

On cherche à résoudre $\ln(2x-1) > 0$. Le domaine impose $2x - 1 > 0$, soit $x > \frac{1}{2}$. On écrit $0 = \ln(1)$, donc l'inéquation devient $\ln(2x-1) > \ln(1)$. Par stricte croissance de ln, cela équivaut à $2x - 1 > 1$, soit $x > 1$. L'intersection avec le domaine $x > \frac{1}{2}$ donne finalement $x > 1$.

Réponse. $S_1 =]0\,;e^2]$; $S_2 =]1\,;+\infty[$.

Rappel de cours. ln est strictement croissante : elle conserve le sens des inégalités. On compare souvent à $\ln(1) = 0$ ou $\ln(e) = 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 8 – Exprimer en fonction de ln 2

On cherche $\ln(8)$. On écrit 8 comme une puissance de 2 : $8 = 2^3$. Donc $\ln(8) = \ln(2^3) = 3\ln(2)$.

On cherche $\ln\frac{1}{4}$. On écrit $\frac{1}{4} = 4^{-1} = (2^2)^{-1} = 2^{-2}$. La propriété de la puissance (valable pour un exposant négatif) donne $\ln\frac{1}{4} = \ln(2^{-2}) = -2\ln(2)$.

On cherche $\ln(\sqrt{2})$. On écrit $\sqrt{2} = 2^{1/2}$. La propriété de la puissance (valable pour un exposant fractionnaire) donne $\ln(\sqrt{2}) = \ln(2^{1/2}) = \frac{1}{2}\ln(2)$.

Réponse. $\ln(8) = 3\ln(2)$; $\ln\frac{1}{4} = -2\ln(2)$; $\ln(\sqrt{2}) = \frac{1}{2}\ln(2)$.

Rappel de cours. Tout s'écrit avec $\ln(a^n) = n\ln(a)$, valable aussi pour n négatif ou fractionnaire ($\sqrt{a} = a^{1/2}$).

Correction de l'exercice 9 – Dérivées avec logarithme

On cherche $f'(x)$ avec $f(x) = \ln(x) + x^2$. On dérive terme à terme : $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$ et $(x^2)' = 2x$. La dérivée d'une somme étant la somme des dérivées, $f'(x) = \frac{1}{x} + 2x$.

On cherche $g'(x)$ avec $g(x) = x\ln(x)$. C'est un produit uv avec $u = x$ (donc $u' = 1$) et $v = \ln(x)$ (donc $v' = \frac{1}{x}$). La formule $(uv)' = u'v + uv'$ donne $g'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$.

Réponse. $f'(x) = \frac{1}{x} + 2x$; $g'(x) = \ln(x) + 1$.

Rappel de cours. Dérivée de référence : $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$. Pour un produit : $(uv)' = u'v + uv'$.

Correction de l'exercice 10 – Deux équations avec domaine

(E₁) Domaine : $2x - 1 > 0$ et $x + 3 > 0$, soit $x > \frac{1}{2}$. Comme ln est strictement croissante, $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$: $2x - 1 = x + 3 \Leftrightarrow x = 4$, qui est dans le domaine.

(E₂) Domaine : $x > 0$. $\ln(x+1) - \ln x = \ln\frac{x+1}{x}$, donc l'équation équivaut à $\frac{x+1}{x} = 2 \Leftrightarrow x + 1 = 2x \Leftrightarrow x = 1$, dans le domaine.

Réponse. (E₁) : $S = \{4\}$; (E₂) : $S = \{1\}$.

Rappel de cours. On détermine toujours le domaine avant de transformer une équation avec ln.

Correction de l'exercice 11 – Étude de f(x) = ln(x)/x

On cherche $f'(x)$. On dérive un quotient $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u = \ln(x)$ ($u' = \frac{1}{x}$) et $v = x$ ($v' = 1$). On obtient $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}\cdot x - \ln(x)\cdot 1}{x^2} = \dfrac{1 - \ln(x)}{x^2}$.

On étudie le signe de $f'(x)$. Le dénominateur $x^2 > 0$, donc $f'(x)$ a le signe du numérateur $1 - \ln(x)$. Or $1 - \ln(x) > 0 \Leftrightarrow \ln(x) < 1 \Leftrightarrow x < e$. Ainsi $f'(x) > 0$ sur $]0;e[$ et $f'(x) < 0$ sur $]e;+\infty[$: f est croissante sur $]0;e]$ puis décroissante sur $[e;+\infty[$.

Le changement de sens en $x = e$ signifie que f y atteint son maximum. On calcule $f(e) = \frac{\ln(e)}{e} = \frac{1}{e}$ (car $\ln(e) = 1$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $f'(x) = \dfrac{1 - \ln(x)}{x^2}$; maximum $f(e) = \dfrac{1}{e} \approx 0{,}37$ atteint en $x = e$.

Rappel de cours. Le signe de la dérivée donne les variations. Ici tout se ramène au signe de $1 - \ln(x)$, comparé à $\ln(e) = 1$.

Correction de l'exercice 12 – Équation par changement de variable

On pose $X = \ln(x)$. L'équation devient $2X^2 - 3X + 1 = 0$, un trinôme du second degré en X. Son discriminant vaut $\Delta = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 9 - 8 = 1$, et ses racines sont $X = \dfrac{3 \pm 1}{4}$, c'est-à-dire $X = 1$ ou $X = \dfrac{1}{2}$.

On revient à x en résolvant $\ln(x) = X$. D'une part $\ln(x) = 1 \Leftrightarrow x = e$. D'autre part $\ln(x) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = e^{1/2} = \sqrt{e}$. Les deux valeurs sont strictement positives, donc dans le domaine : elles conviennent.

Réponse. $S = \{\sqrt{e}\,; e\}$.

Rappel de cours. Quand $\ln(x)$ apparaît au carré et au premier degré, le changement $X = \ln(x)$ ramène à un trinôme du second degré.

Correction de l'exercice 13 – Limites par croissances comparées

On cherche $\lim_{x \to 0^+} x \ln(x)$. Quand $x \to 0^+$, on a $x \to 0$ et $\ln(x) \to -\infty$: c'est une forme indéterminée $0 \times (-\infty)$. Le cours fournit la croissance comparée $\lim_{x \to 0^+} x \ln(x) = 0$: la puissance x « l'emporte » sur $\ln(x)$.

On cherche $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$. Quand $x \to +\infty$, $\ln(x) \to +\infty$ et $x \to +\infty$: c'est une forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$. La croissance comparée donne $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$, car x croît bien plus vite que $\ln(x)$.

Réponse. $\lim_{x \to 0^+} x \ln(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.

Rappel de cours. Croissances comparées à connaître : $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\lim_{x \to 0^+} x \ln(x) = 0$.

Correction de l'exercice 14 – Fonction composée ln(x²+1)

On justifie le domaine. La fonction $\ln(u)$ n'existe que si $u > 0$. Ici $u = x^2 + 1$ et $x^2 \geq 0$ entraîne $x^2 + 1 \geq 1 > 0$ pour tout réel : f est donc bien définie sur $\mathbb{R}$.

On cherche $f'(x)$. On dérive un logarithme composé $(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$ avec $u = x^2 + 1$ et $u' = 2x$. D'où $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$.

On étudie le signe de $f'(x)$. Le dénominateur $x^2 + 1 > 0$, donc $f'(x)$ a le signe du numérateur $2x$, c'est-à-dire le signe de x. Ainsi f est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$: elle atteint un minimum en $x = 0$, où $f(0) = \ln(0^2 + 1) = \ln(1) = 0$.

Réponse. $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$; minimum $f(0) = 0$, décroissante puis croissante.

Rappel de cours. Dérivée d'un logarithme composé : $(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$, avec $u > 0$.

Correction de l'exercice 15 – Seuil d'une suite géométrique

On applique ln, strictement croissante, aux deux membres : $\ln(0{,}9^n) < \ln(0{,}01)$. La propriété de la puissance donne $n \ln(0{,}9) < \ln(0{,}01)$. Comme $0 < 0{,}9 < 1$, on a $\ln(0{,}9) < 0$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

: en divisant par ce nombre négatif, l'inégalité change de sens et $n > \dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}9)}$.

On évalue numériquement le second membre : $\dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}9)} \approx \dfrac{-4{,}605}{-0{,}105} \approx 43{,}7$. Comme n est un entier, la condition $n > 43{,}7$ est vérifiée dès $n = 44$.

Réponse. Il reste moins de 1% à partir de $n = 44$ années.

Rappel de cours. Pour un seuil $q^n < a$ avec $0 < q < 1$: passer au ln puis diviser par $\ln(q) < 0$ inverse le sens de l'inégalité.

Erreur fréquente. Ne pas oublier d'inverser l'inégalité en divisant par $\ln(0{,}9)$ qui est négatif. C'est l'erreur classique de ce type de question.

Correction de l'exercice 16 – Inéquation et intersection avec le domaine

Domaine : $x > 0$ et $x + 2 > 0$, soit $x > 0$.

Sur ce domaine, $\ln x + \ln(x + 2) = \ln(x(x + 2))$. Par stricte croissance de ln : $x(x + 2) \leq 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 \leq 0$.

$x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-3\,;1]$.

On intersecte avec le domaine $]0\,;+\infty[$.

Réponse. $S =]0\,;1]$.

Rappel de cours. $\ln a + \ln b = \ln(ab)$ n'est valable que pour $a > 0$ et $b > 0$.

Erreur fréquente. Oublier le domaine donne $[-3\,;1]$, où $\ln x$ n'existe pas pour $x \leq 0$.

Correction de l'exercice 17 – Type bac : inégalité ln x ≤ x − 1

On cherche $f'(x)$. On dérive terme à terme : $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$. Sur $]0;+\infty[$, $x > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de $x - 1$. Ainsi f est décroissante sur $]0;1]$ et croissante sur $[1;+\infty[$, avec un minimum en $x = 1$.

Le minimum vaut $f(1) = 1 - \ln(1) = 1 - 0 = 1$. Donc pour tout $x > 0$, $f(x) \geq f(1) = 1$, c'est-à-dire $x - \ln(x) \geq 1$. En réarrangeant, $x - \ln(x) \geq 1 \Leftrightarrow \ln(x) \leq x - 1$: l'inégalité est démontrée, avec égalité en $x = 1$.

Réponse. Minimum $f(1) = 1$; on en déduit $\ln(x) \leq x - 1$ pour tout $x > 0$ (égalité en $x = 1$).

Rappel de cours. Démontrer une inégalité $g(x) \geq 0$ revient souvent à étudier le minimum de g via le signe de g'.

Correction de l'exercice 18 – Type bac : étude de x·ln x − x

On cherche $\lim_{x \to 0^+} f(x)$. Le terme $x\ln(x)$ est une forme indéterminée $0 \times (-\infty)$ que la croissance comparée tranche : $x\ln(x) \to 0$. Le terme $-x \to 0$. Par somme, $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$.

On cherche $f'(x)$. La dérivée du produit donne $(x\ln(x))' = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$, et $(-x)' = -1$. Donc $f'(x) = \ln(x) + 1 - 1 = \ln(x)$. Ce $f'(x) = \ln(x)$ est négatif sur $]0;1[$, nul en 1, positif sur $]1;+\infty[$: f décroît puis croît, avec un minimum en $x = 1$. On calcule $f(1) = 1 \times \ln(1) - 1 = 0 - 1 = -1$.

Réponse. $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$; $f'(x) = \ln(x)$; minimum $f(1) = -1$ atteint en $x = 1$.

Rappel de cours. $(x\ln(x))' = \ln(x) + 1$ est un classique. Pense aux croissances comparées pour lever l'indétermination $0 \times \ln$ en 0^+.

Erreur fréquente. Pour la limite en 0^+, ne pas conclure « $0 \times (-\infty)$ donc $-\infty$ » : c'est une forme indéterminée que seule la croissance comparée tranche.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 19 – Type bac : étude de ln(x)/x et inégalité

En 0^+ : $\ln(x) \to -\infty$ et $\frac{1}{x} \to +\infty$, donc $f(x) = \ln(x) \times \frac{1}{x} \to -\infty$ (l'axe des ordonnées est asymptote verticale). En $+\infty$: $f(x) \to 0$ par croissance comparée, donc l'axe des abscisses est asymptote horizontale.

Avec $u = \ln x$ ($u' = \frac{1}{x}$) et $v = x$ ($v' = 1$) : $f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln(x) \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$.

$x^2 > 0$, donc $f'(x)$ a le signe de $1 - \ln(x)$: positif pour $\ln(x) < 1$ c'est-à-dire $x < e$, négatif pour $x > e$. f croît sur $]0; e]$, décroît sur $[e; +\infty[$, avec un maximum $f(e) = \frac{\ln(e)}{e} = \frac{1}{e}$.

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Comme $x > 0$, le signe de f est celui de $\ln(x)$: négatif sur $]0; 1[$, nul en 1, positif sur $]1; +\infty[$.

Pour tout $x > 0$, $f(x) \leq f(e) = \frac{1}{e}$, soit $\frac{\ln(x)}{x} \leq \frac{1}{e}$. En multipliant par $x > 0$, $\ln(x) \leq \frac{x}{e}$ (avec égalité en $x = e$).

Réponse. $\lim_{0^+} f = -\infty$, $\lim_{+\infty} f = 0$; $\max f(e) = \frac{1}{e}$; $f(x) = 0$ en $x = 1$; $\ln(x) \leq \frac{x}{e}$ pour tout $x > 0$.

Rappel de cours. Le maximum d'une fonction fournit une inégalité valable partout : ici $\frac{\ln x}{x} \leq \frac{1}{e}$ donne $\ln x \leq \frac{x}{e}$.

Correction de l'exercice 20 – Type bac : étude de x² − 2 ln x

1) En 0^+ : $x^2 \to 0$ et $-2\ln x \to +\infty$, donc $f(x) \to +\infty$.

En $+\infty$: forme $\infty - \infty$. On factorise : $f(x) = x^2\left(1 - \frac{2\ln x}{x^2}\right)$. Par croissances comparées, $\frac{\ln x}{x^2} \to 0$, donc la parenthèse tend vers 1 et $f(x) \to +\infty$.

2) $f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2(x^2 - 1)}{x} = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}$. Sur $]0\,; +\infty[$, le signe est celui de $x - 1$: f décroît sur $]0\,; 1]$ et croît sur $[1\,; +\infty[$.

3) Minimum : $f(1) = 1 - 0 = 1 > 0$. Donc $f(x) > 0$, soit $x^2 > 2\ln x$, c'est-à-dire $\ln x < \frac{x^2}{2}$.

Réponse. Limites $+\infty$ aux deux bornes ; minimum 1 en $x = 1$; d'où $\ln x < \frac{x^2}{2}$.

Rappel de cours. $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ pour $n \geq 1$: la puissance l'emporte sur le logarithme.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).