Fonction logarithme népérien — Terminale spécialité

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés

Présentation

La fonction logarithme népérien ln est la fonction réciproque de l'exponentielle : $\ln(e^x) = x$ et $e^{\ln(x)} = x$ pour $x > 0$. Ces exercices corrigés couvrent tout le programme de Terminale spécialité : calculs et propriétés algébriques, équations et inéquations, dérivation, limites par croissances comparées et études de fonctions type bac. La difficulté est croissante : commence par les premiers, l'énoncé puis la correction détaillée s'affichent d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables : mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-specialite/fonction-logarithme

Exercice 1 – Valeurs de référence du logarithme

Le logarithme népérien ln est la fonction réciproque de l'exponentielle. Avant de manipuler des expressions complexes, il faut maîtriser ses valeurs de base, sans calculatrice.

1. Donner la valeur exacte de $\ln(1)$ et de $\ln(e)$.

2. Calculer $\ln(e^3)$.

3. Calculer $e^{\ln(5)}$.

Exercice 2 – Propriétés algébriques du logarithme

Les propriétés algébriques du logarithme permettent de transformer une somme ou une différence de logarithmes en un logarithme unique. On considère $A = \ln(2) + \ln(3)$, $B = \ln(12) - \ln(4)$ et $C = 3\ln(2)$.

1. Écrire A sous la forme d'un seul logarithme.

2. Écrire B sous la forme d'un seul logarithme.

3. Écrire C sous la forme d'un seul logarithme.

Exercice 3 – Équation ln(x) = k

Résoudre une équation de la forme $\ln(x) = k$ revient à utiliser le fait que ln est une bijection de $]0;+\infty[$ sur $\mathbb{R}$. On travaille sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.

1. Résoudre $\ln(x) = 3$.

2. Résoudre $\ln(x) = -1$ et donner la solution sous forme de fraction.

Exercice 4 – Simplifier avec e

Calculer $A = \ln(e^3) - \ln\left(\frac{1}{e}\right) + \ln(\sqrt{e})$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Équations avec exponentielle

Pour isoler une inconnue placée en exposant, on applique le logarithme népérien, fonction réciproque de l'exponentielle. On résout dans $\mathbb{R}$.

1. Résoudre $e^{x} = 7$.

2. Résoudre $e^{2x} = 5$.

Exercice 6 – Équation avec domaine de définition

On considère l'équation $\ln(x) + \ln(x-1) = \ln(6)$. Lorsque l'inconnue apparaît dans un logarithme, il faut d'abord déterminer le domaine d'existence avant de résoudre.

1. Déterminer l'ensemble des valeurs de x pour lesquelles l'équation a un sens.

2. Résoudre l'équation sur ce domaine.

Exercice 7 – Inéquations logarithmiques

La fonction ln étant strictement croissante, elle conserve le sens des inégalités. On résout deux inéquations en tenant compte du domaine.

1. Résoudre $\ln(x) \leq 2$.

2. Résoudre $\ln(2x-1) > 0$.

Exercice 8 – Exprimer en fonction de ln 2

En utilisant la propriété $\ln(a^{n}) = n\ln(a)$, on peut exprimer de nombreux logarithmes en fonction de $\ln(2)$. On considère $\ln(8)$, $\ln\dfrac{1}{4}$ et $\ln(\sqrt{2})$.

1. Exprimer $\ln(8)$ en fonction de $\ln(2)$.

2. Exprimer $\ln\dfrac{1}{4}$ en fonction de $\ln(2)$.

3. Exprimer $\ln(\sqrt{2})$ en fonction de $\ln(2)$.

Exercice 9 – Dérivées avec logarithme

La dérivée de référence $(\ln(x))' = \dfrac{1}{x}$ permet, combinée aux règles usuelles, de dériver des fonctions faisant intervenir ln. On travaille sur $]0;+\infty[$ avec $f(x) = \ln(x) + x^{2}$ et $g(x) = x\ln(x)$.

1. Calculer $f'(x)$.

2. Calculer $g'(x)$ en utilisant la dérivée d'un produit.

Exercice 10 – Deux équations avec domaine

Résoudre (E_1) $\ln(2x-1) = \ln(x+3)$ et (E_2) $\ln(x+1) - \ln(x) = \ln 2$.

Exercice 11 – Étude de f(x) = ln(x)/x

On considère la fonction $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$ définie sur $]0;+\infty[$. On souhaite étudier ses variations et déterminer son maximum.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

1. Calculer $f'(x)$ en utilisant la dérivée d'un quotient.

2. Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire les variations de f.

3. En déduire le maximum de f et la valeur où il est atteint.

Exercice 12 – Équation par changement de variable

On considère l'équation $2(\ln(x))^2 - 3\ln(x) + 1 = 0$ sur $]0;+\infty[$. Lorsque $\ln(x)$ apparaît au carré et au premier degré, un changement de variable ramène à un trinôme du second degré.

1. En posant $X = \ln(x)$, écrire l'équation vérifiée par X et la résoudre.

2. Revenir à l'inconnue x et conclure.

Exercice 13 – Limites par croissances comparées

Les croissances comparées permettent de lever des formes indéterminées mêlant ln et puissances de x. On souhaite déterminer deux limites.

1. Déterminer $\lim_{x \to 0^+} x\ln(x)$.

2. Déterminer $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$.

Exercice 14 – Fonction composée ln(x²+1)

On considère la fonction $f(x) = \ln(x^2+1)$. On souhaite justifier son domaine, la dériver et dresser son tableau de variations.

1. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. Calculer $f'(x)$ à l'aide de la dérivée d'un logarithme composé.

3. Étudier le signe de $f'(x)$, dresser le tableau de variations et donner le minimum.

Exercice 15 – Seuil d'une suite géométrique

Une population diminue de 10% par an : au bout de n années il en reste une proportion $0{,}9^n$ de la population initiale. On veut déterminer à partir de quelle année il en reste moins de 1%, c'est-à-dire résoudre $0{,}9^n < 0{,}01$.

1. En appliquant le logarithme népérien, transformer l'inéquation $0{,}9^n < 0{,}01$ en une inéquation sur n.

2. Conclure en donnant la première année entière qui convient.

Exercice 16 – Inéquation et intersection avec le domaine

Résoudre $\ln(x) + \ln(x+2) \leq \ln 3$.

Exercice 17 – Type bac : inégalité ln x ≤ x − 1

On considère la fonction $f(x) = x - \ln(x)$ définie sur $]0;+\infty[$. L'objectif est de démontrer une inégalité de référence du cours en passant par l'étude des variations de f.

1. Calculer $f'(x)$, étudier son signe et dresser le tableau de variations de f.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

2. En déduire que pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leq x - 1$.

Exercice 18 – Type bac : étude de x·ln x − x

On considère la fonction $f(x) = x\ln(x) - x$ définie sur $]0;+\infty[$. On étudie son comportement au bord du domaine puis ses variations.

1. Déterminer $\lim_{x \to 0^+} f(x)$.

2. Calculer $f'(x)$, dresser le tableau de variations et donner le minimum de f.

Exercice 19 – Type bac : étude de ln(x)/x et inégalité

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$, de courbe C. On rappelle que $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.

1. Déterminer les limites de f en 0^+ et en $+\infty$, et interpréter graphiquement.

2. Montrer que pour tout $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{1 - \ln(x)}{x^2}$.

3. Étudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f.

4. Résoudre $f(x) = 0$ et préciser le signe de f sur $]0;+\infty[$.

5. En déduire que pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leq \dfrac{x}{e}$.

Exercice 20 – Type bac : étude de x² − 2 ln x

Soit $f(x) = x^2 - 2\ln x$ sur $]0\,;+\infty[$.

1. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

2. Étudier les variations de f.

3. En déduire que $\ln x < \dfrac{x^2}{2}$ pour tout $x > 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).