Géométrie dans l'espace et produit scalaire — Terminale spécialité

40 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

Dans l'espace muni d'un repère, un point a trois coordonnées (x, y, z) et un vecteur de même. On manipule coordonnées, normes, produit scalaire, représentations paramétriques de droites et équations cartésiennes de plans (via un vecteur normal). Le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$ s'annule exactement quand deux vecteurs sont orthogonaux : il donne des angles, un vecteur normal à un plan et des distances. Ces exercices corrigés couvrent vecteurs, colinéarité et coplanarité, droites et plans, puis produit scalaire, orthogonalité, angles, vecteur normal, équations de plans et distances, du plus simple au type bac. Difficulté croissante, correction d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-specialite/geometrie-dans-lespace

Exercice 1 – Coordonnées d'un vecteur

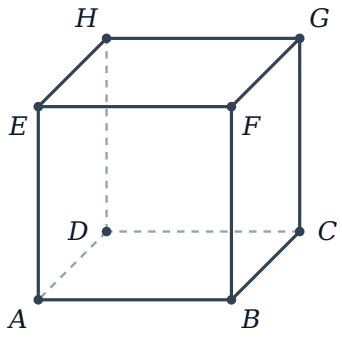
Soit $A(1\,;2\,;3)$ et $B(4\,;0\,;5)$. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Exercice 2 – Norme d'un vecteur

Calculer la norme du vecteur $\vec{u} = (2\,;-1\,;2)$.

Exercice 3 – Lire les coordonnées des sommets d'un cube

$ABCDEFGH$ est un cube. On se place dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$. À l'aide de la figure, donner les coordonnées des sommets B, D, F et G.



Cube ABCDEFGH dans le repère (A ; AB, AD, AE)

Exercice 4 – Vecteurs colinéaires

Les vecteurs $\vec{u}(2\,;-4\,;6)$ et $\vec{v}(-1\,;2\,;-3)$ sont-ils colinéaires ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Produit scalaire par coordonnées

Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ avec $\vec{u} = (3\,;0\,;-2)$ et $\vec{v} = (1\,;4\,;2)$.

Exercice 6 – Produit scalaire d'un vecteur par lui-même

Calculer $\vec{u} \cdot \vec{u}$ pour $\vec{u} = (2\,;-1\,;2)$, et en déduire $\|\vec{u}\|$.

Exercice 7 – Orthogonalité

Les vecteurs $\vec{u} = (1\,;2\,;2)$ et $\vec{v} = (2\,;1\,;-2)$ sont-ils orthogonaux ?

Exercice 8 – Vecteur unitaire

Soit $\vec{u}(1\,;2\,;2)$. Calculer $\|\vec{u}\|$ et donner un vecteur unitaire de même direction et de même sens.

Exercice 9 – Produit scalaire (coordonnées)

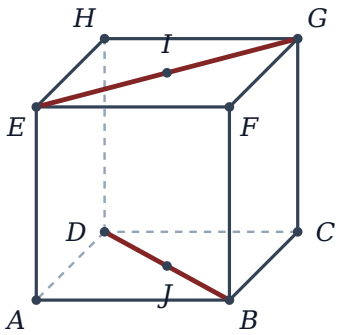
Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ avec $\vec{u} = (1\,;2\,;-1)$ et $\vec{v} = (3\,;-1\,;4)$.

Exercice 10 – Tester l'orthogonalité

Les vecteurs $\vec{u} = (2\,;1\,;-1)$ et $\vec{v} = (1\,;-1\,;1)$ sont-ils orthogonaux ?

Exercice 11 – Milieux dans le cube

$ABCDEFGH$ est un cube, repère $(A\,;\vec{AB},\vec{AD},\vec{AE})$. On note I le milieu de $[EG]$ et J le milieu de $[BD]$. Déterminer les coordonnées de I et J.



Exercice 12 – Trois points alignés ?

Les points $A(1\,;2\,;0)$, $B(3\,;1\,;2)$ et $C(7\,;-1\,;6)$ sont-ils alignés ?

Exercice 13 – Produit scalaire avec norme et angle

Deux vecteurs vérifient $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 4$ et l'angle entre eux mesure $60°$. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 14 – Trouver une coordonnée pour l'orthogonalité

Déterminer a pour que $\vec{u} = (1\,;a\,;3)$ et $\vec{v} = (2\,;-1\,;1)$ soient orthogonaux.

Exercice 15 – Calcul d'un angle

Calculer le cosinus de l'angle entre $\vec{u} = (1\,;0\,;0)$ et $\vec{v} = (1\,;1\,;0)$.

Exercice 16 – Triangle rectangle dans l'espace

Soient $A(1\,;0\,;0)$, $B(0\,;1\,;0)$ et $C(1\,;0\,;2)$. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A et calculer son aire.

Exercice 17 – Représentation paramétrique d'une droite

Donner une représentation paramétrique de la droite passant par $A(1\,;0\,;2)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = (2\,;-1\,;3)$.

Exercice 18 – Point appartenant à une droite

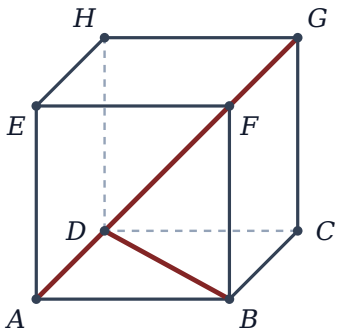
La droite a pour représentation $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$. Le point $B(5\,;-2\,;8)$ appartient-il à cette droite ?

Exercice 19 – Vecteur normal et équation de plan

Donner une équation cartésienne du plan passant par $A(1\,;2\,;-1)$ et de vecteur normal $\vec{n} = (2\,;-1\,;3)$.

Exercice 20 – Diagonale et orthogonalité dans le cube

$ABCDEFGH$ est un cube, repère orthonormé $(A\,;\vec{AB},\vec{AD},\vec{AE})$. Démontrer que la grande diagonale (AG) est orthogonale à la diagonale (BD) de la face inférieure.



Diagonales [AG] et [BD]

Exercice 21 – Vecteurs coplanaires

Montrer que $\vec{u}(1\,;0\,;1)$, $\vec{v}(0\,;1\,;1)$ et $\vec{w}(2\,;3\,;5)$ sont coplanaires.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 22 – Vecteur normal à un plan (2 vecteurs)

Un plan contient les vecteurs $\vec{u} = (1\,;0\,;1)$ et $\vec{v} = (0\,;1\,;1)$. Déterminer un vecteur normal $\vec{n} = (a\,;b\,;c)$ à ce plan.

Exercice 23 – Équation de plan par un point et une normale

Donner une équation du plan passant par $A(2\,;1\,;0)$ et de vecteur normal $\vec{n} = (3\,;-1\,;2)$.

Exercice 24 – Point dans un plan

Le point $B(1\,;2\,;3)$ appartient-il au plan $P{:}2x + y - z - 1 = 0$?

Exercice 25 – Projeté et calcul de longueur

Avec $A(0\,;0\,;0)$, $B(2\,;0\,;0)$, $C(2\,;3\,;0)$, calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et en déduire si l'angle $B\hat{A}C$ est aigu, droit ou obtus.

Exercice 26 – Plans perpendiculaires

Les plans $P{:}x + y + z = 1$ et $Q{:}x - 2y + z = 3$ sont-ils perpendiculaires ?

Exercice 27 – Type bac : droite orthogonale à un plan

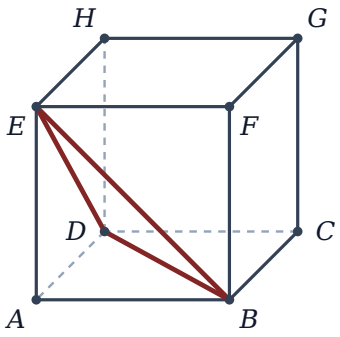
Soit le plan $P{:}x + 2y - z + 3 = 0$. La droite D passe par $A(0\,;0\,;3)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u} = (1\,;2\,;-1)$. Montrer que D est orthogonale à P.

Exercice 28 – Type bac : intersection droite-plan

Déterminer le point d'intersection de la droite $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = -t \end{cases}$ avec le plan $P{:}x + y + z - 4 = 0$.

Exercice 29 – Type bac : triangle BDE équilatéral

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 1, repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$. Démontrer que le triangle BDE est équilatéral.



Triangle BDE

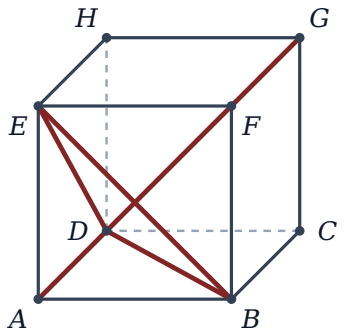
mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 30 – Type bac : distance entre deux points

Calculer la longueur AB avec $A(1\,;-2\,;3)$ et $B(4\,;2\,;3)$, puis dire si le triangle OAB (avec O origine) est rectangle en... on calcule juste AB.

Exercice 31 – Type bac : plan (BDE), équation et distance

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 1, repère orthonormé $(A\,;\vec{AB},\vec{AD},\vec{AE})$. On considère le plan (BDE). 1) Vérifier que $\vec{AG}(1\,;1\,;1)$ est normal au plan (BDE). 2) En déduire une équation cartésienne de (BDE). 3) Calculer la distance du point A au plan (BDE).



Plan (BDE) et diagonale [AG]

Exercice 32 – Type bac : plan (BDE) du cube, équation et distance

On considère le cube $ABCDEFGH$ d'arête 1, muni du repère orthonormé $(A\,;\vec{AB},\vec{AD},\vec{AE})$. On a ainsi $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $D(0;1;0)$, $E(0;0;1)$ et $G(1;1;1)$.

1. Donner les coordonnées de $\vec{AG}$, $\vec{BD}$ et $\vec{BE}$.

2. Démontrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).

3. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (BDE) est $x+y+z-1=0$.

4. Déterminer les coordonnées du point K d'intersection de (AG) et du plan (BDE).

5. Calculer la distance du point A au plan (BDE).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

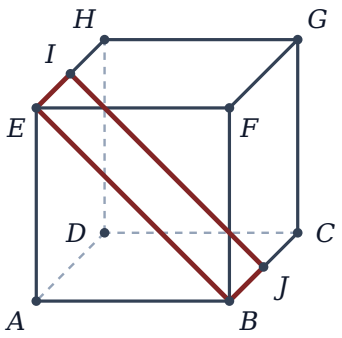
Exercice 33 – Type bac : une section du cube

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 1, repère $(A\,;\vec{AB},\vec{AD},\vec{AE})$. I est le milieu de $[EH]$ et J le milieu de $[BC]$.

1. Donner les coordonnées de I et J.

2. Montrer que (IJ) et (EB) sont parallèles, puis que $EIJB$ est un parallélogramme.

3. Montrer que le centre Ω du cube est le milieu de $[IJ]$.



Exercice 34 – Type bac : plan défini par trois points

Soit $A(1\,;0\,;0)$, $B(0\,;2\,;0)$, $C(0\,;0\,;3)$. 1) Donner deux vecteurs directeurs du plan (ABC). 2) Déterminer une équation cartésienne de ce plan.

Exercice 35 – Type bac : distance d'un point à un plan

Calculer la distance du point $A(1\,;2\,;2)$ au plan $P{:}2x+y-2z+1=0$.

Exercice 36 – Type bac : projeté orthogonal

Soit $P{:}x+y+z-3=0$ et $A(2\,;2\,;2)$. Déterminer le projeté orthogonal H de A sur P.

Exercice 37 – Type bac : orthogonalité dans un tétraèdre

Dans un repère orthonormé, $O(0;0;0)$, $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$. Montrer que (OA) est orthogonale au plan (OBC).

Exercice 38 – Type bac : angle entre deux vecteurs (3D)

Calculer le cosinus de l'angle entre $\vec{u}(1\,;1\,;0)$ et $\vec{v}(1\,;0\,;1)$.

Exercice 39 – Type bac : angles d'une diagonale du cube

On considère le cube $ABCDEFGH$ d'arête 1 muni du repère orthonormé $(A\,;\vec{AB},\vec{AD},\vec{AE})$, avec $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(1;1;0)$ et $G(1;1;1)$. La droite (AG) est la grande diagonale du cube.

1. Donner les coordonnées de $\vec{AG}$, $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$, puis calculer les normes $\|\vec{AG}\|$ et $\|\vec{AC}\|$.

2. Calculer le produit scalaire $\vec{AG}\cdot\vec{AC}$.

3. En déduire une valeur approchée, au dixième de degré, de l'angle $C\hat{A}G$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

4. Calculer $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AB}$ et en déduire une valeur approchée de l'angle $B\hat{A}G$.

5. Comparer les angles $C\hat{A}G$ et $B\hat{A}G$ et interpréter géométriquement.

Exercice 40 – Type bac : aire d'un triangle par un volume

Soient $O(0\,;0\,;0)$, $A(2\,;0\,;0)$, $B(0\,;3\,;0)$ et $C(0\,;0\,;6)$.

1. Calculer le volume du tétraèdre $OABC$.

2. Vérifier que $3x + 2y + z - 6 = 0$ est une équation du plan (ABC).

3. Calculer la distance de O au plan (ABC), puis en déduire l'aire du triangle ABC.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 40 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Coordonnées d'un vecteur

$\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A\,;\, y_B - y_A\,;\, z_B - z_A)$.

$\overrightarrow{AB} = (4-1\,;\,0-2\,;\,5-3) = (3\,;\,-2\,;\,2)$.

Réponse. $\overrightarrow{AB} = (3\,;\,-2\,;\,2)$.

Rappel de cours. Coordonnées d'un vecteur : (arrivée − départ) sur chaque axe. $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A\,;\, y_B - y_A\,;\, z_B - z_A)$.

Correction de l'exercice 2 – Norme d'un vecteur

$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

$\|\vec{u}\| = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{4 + 1 + 4} = \sqrt{9} = 3$.

Réponse. $\|\vec{u}\| = 3$.

Rappel de cours. Norme (longueur) : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. C'est le théorème de Pythagore en 3D.

Correction de l'exercice 3 – Lire les coordonnées des sommets d'un cube

Dans ce repère, A est l'origine et les arêtes $[AB]$, $[AD]$, $[AE]$ portent les vecteurs de base. Chaque coordonnée vaut 0 ou 1 selon que le sommet est « au départ » ou « au bout » de l'arête.

B est au bout de $\overrightarrow{AB}$: $B(1\,;\,0\,;\,0)$. D est au bout de $\overrightarrow{AD}$: $D(0\,;\,1\,;\,0)$.

F est au-dessus de B (d'une unité selon $\overrightarrow{AE}$) : $F(1\,;\,0\,;\,1)$. G est le sommet opposé à A : $G(1\,;\,1\,;\,1)$.

Réponse. $B(1\,;\,0\,;\,0)$, $D(0\,;\,1\,;\,0)$, $F(1\,;\,0\,;\,1)$, $G(1\,;\,1\,;\,1)$.

Rappel de cours. Dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ d'un cube, les huit sommets ont des coordonnées formées de 0 et de 1.

Correction de l'exercice 4 – Vecteurs colinéaires

On cherche k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$: $2 = -k$, $-4 = 2k$, $6 = -3k$. Les trois égalités donnent $k = -2$.

Donc $\vec{u} = -2\vec{v}$.

Réponse. Oui : $\vec{u} = -2\vec{v}$.

Rappel de cours. Dans l'espace, il faut le même coefficient sur les trois coordonnées.

Correction de l'exercice 5 – Produit scalaire par coordonnées

$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

$= 3 \times 1 + 0 \times 4 + (-2) \times 2 = 3 + 0 - 4 = -1$.

Réponse. $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$.

Rappel de cours. Produit scalaire en repère orthonormé : on multiplie les coordonnées deux à deux et on additionne.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 6 – Produit scalaire d'un vecteur par lui-même

$\vec{u} \cdot \vec{u} = 2^2 + (-1)^2 + 2^2 = 4 + 1 + 4 = 9$.

Or $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$, donc $\|\vec{u}\| = \sqrt{9} = 3$.

Réponse. $\vec{u} \cdot \vec{u} = 9$ et $\|\vec{u}\| = 3$.

Rappel de cours. $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$: le produit scalaire d'un vecteur par lui-même est le carré de sa norme.

Correction de l'exercice 7 – Orthogonalité

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 2 + 2 \times 1 + 2 \times (-2) = 2 + 2 - 4 = 0$.

Le produit scalaire est nul : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Réponse. Oui, $\vec{u} \perp \vec{v}$ ($\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$).

Rappel de cours. $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Correction de l'exercice 8 – Vecteur unitaire

$\|\vec{u}\| = \sqrt{1 + 4 + 4} = \sqrt{9} = 3$.

$\frac{1}{3}\vec{u} = \left(\frac{1}{3} ; \frac{2}{3} ; \frac{2}{3}\right)$ a pour norme 1.

Réponse. $\|\vec{u}\| = 3$; vecteur unitaire $\left(\frac{1}{3} ; \frac{2}{3} ; \frac{2}{3}\right)$.

Rappel de cours. $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ dans un repère orthonormé.

Correction de l'exercice 9 – Produit scalaire (coordonnées)

Produit scalaire : $\vec{u} \cdot \vec{v} = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$.

$= 1 \times 3 + 2 \times (-1) + (-1) \times 4 = 3 - 2 - 4 = -3$.

Réponse. $\vec{u} \cdot \vec{v} = -3$.

Rappel de cours. Produit scalaire en coordonnées : on multiplie composante par composante et on additionne.

Correction de l'exercice 10 – Tester l'orthogonalité

Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 1 + 1 \times (-1) + (-1) \times 1 = 2 - 1 - 1 = 0$.

Le produit scalaire est nul : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Réponse. Oui, $\vec{u} \perp \vec{v}$ ($\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$).

Rappel de cours. $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$. Critère central pour l'orthogonalité dans l'espace.

Correction de l'exercice 11 – Milieux dans le cube

On utilise les coordonnées des sommets : $E(0\,;0\,;1)$, $G(1\,;1\,;1)$, $B(1\,;0\,;0)$, $D(0\,;1\,;0)$.

I milieu de $[EG]$: $I\left(\frac{0+1}{2} ; \frac{0+1}{2} ; \frac{1+1}{2}\right) = I(0{,}5\,;0{,}5\,;1)$.

J milieu de $[BD]$: $J\left(\frac{1+0}{2} ; \frac{0+1}{2} ; \frac{0+0}{2}\right) = J(0{,}5\,;0{,}5\,;0)$.

I et J ont les mêmes abscisse et ordonnée : I est exactement au-dessus de J, d'une unité (la hauteur du cube).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $I(0{,}5\,;0{,}5\,;1)$ et $J(0{,}5\,;0{,}5\,;0)$.

Rappel de cours. Milieu : moyenne des coordonnées. Les centres des deux faces horizontales d'un cube sont à la même verticale.

Correction de l'exercice 12 – Trois points alignés ?

$\overrightarrow{AB}(2\,;-1\,;2)$ et $\overrightarrow{AC}(6\,;-3\,;6)$.

$\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$: les vecteurs sont colinéaires et ont le point A en commun.

Réponse. Oui, A, B, C sont alignés ($\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$).

Rappel de cours. A, B, C alignés $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires.

Correction de l'exercice 13 – Produit scalaire avec norme et angle

Formule : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta$.

$= 3 \times 4 \times \cos 60° = 12 \times 0{,}5 = 6$.

Réponse. $\vec{u}\cdot\vec{v} = 6$.

Rappel de cours. $\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|\cos\theta$, où θ est l'angle entre les vecteurs. $\cos 60° = 0{,}5$.

Correction de l'exercice 14 – Trouver une coordonnée pour l'orthogonalité

Orthogonaux $\Leftrightarrow$ $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0$.

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 1 \times 2 + a \times (-1) + 3 \times 1 = 2 - a + 3 = 5 - a$.

$5 - a = 0$, donc $a = 5$.

Réponse. $a = 5$.

Rappel de cours. On pose le produit scalaire égal à 0 et on résout l'équation en l'inconnue.

Correction de l'exercice 15 – Calcul d'un angle

$\cos\theta = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\|}$.

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 1$, $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

$\cos\theta = \dfrac{1}{1 \times \sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, soit $\theta = 45°$.

Réponse. $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, donc $\theta = 45°$.

Rappel de cours. $\cos\theta = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\|\vec{v}\|}$. On reconnaît $\frac{\sqrt{2}}{2}$ comme cosinus de 45°.

Correction de l'exercice 16 – Triangle rectangle dans l'espace

$\overrightarrow{AB}(-1\,;1\,;0)$, $\overrightarrow{AC}(0\,;0\,;2)$. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 0 + 0 + 0 = 0$: $(AB) \perp (AC)$, le triangle est rectangle en A.

$AB = \sqrt{2}$, $AC = 2$. Aire $= \dfrac{AB \times AC}{2} = \dfrac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$.

Réponse. Rectangle en A ; aire $\sqrt{2}$.

Rappel de cours. Deux vecteurs non nuls sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 17 – Représentation paramétrique d'une droite

Un point $M(x;y;z)$ est sur la droite s'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = t\,\vec{u}$.

Cela donne : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 0 - t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Réponse. $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

Rappel de cours. Droite par A de vecteur directeur $\vec{u}$: $M = A + t\vec{u}$, une équation par coordonnée avec le même paramètre t.

Correction de l'exercice 18 – Point appartenant à une droite

On cherche t tel que les trois équations soient vérifiées. De $x = 5$: $1 + 2t = 5$, donc $t = 2$.

On teste cette valeur : $y = -2$ ✓ ($-t = -2$) et $z = 2 + 3 \times 2 = 8$ ✓.

La même valeur $t = 2$ convient pour les trois coordonnées : B appartient à la droite.

Réponse. Oui, B est sur la droite (pour $t = 2$).

Rappel de cours. Un point est sur la droite s'il existe UNE valeur de t vérifiant les trois équations à la fois.

Erreur fréquente. Il faut la MÊME valeur de t pour les trois coordonnées. Si t diffère, le point n'est pas sur la droite.

Correction de l'exercice 19 – Vecteur normal et équation de plan

Un plan de vecteur normal $\vec{n} = (a;b;c)$ a une équation $ax + by + cz + d = 0$, ici $2x - y + 3z + d = 0$.

On détermine d en injectant A : $2 \times 1 - 2 + 3 \times (-1) + d = 0$, soit $2 - 2 - 3 + d = 0$, donc $d = 3$.

Équation : $2x - y + 3z + 3 = 0$.

Réponse. $2x - y + 3z + 3 = 0$.

Rappel de cours. Les coefficients $(a;b;c)$ de l'équation $ax + by + cz + d = 0$ sont les coordonnées d'un vecteur normal au plan.

Correction de l'exercice 20 – Diagonale et orthogonalité dans le cube

Coordonnées des sommets : $A(0\,;0\,;0)$, $G(1\,;1\,;1)$, $B(1\,;0\,;0)$, $D(0\,;1\,;0)$.

$\overrightarrow{AG} = (1\,;1\,;1)$ et $\overrightarrow{BD} = (0-1\,;1-0\,;0-0) = (-1\,;1\,;0)$.

Le repère étant orthonormé, on calcule le produit scalaire :
$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = 1 \times (-1) + 1 \times 1 + 1 \times 0 = -1 + 1 + 0 = 0$.

Le produit scalaire est nul : les droites (AG) et (BD) sont orthogonales.

Réponse. $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$: $(AG) \perp (BD)$.

Rappel de cours. Dans un repère orthonormé, deux droites sont orthogonales lorsque le produit scalaire de leurs vecteurs directeurs est nul.

Correction de l'exercice 21 – Vecteurs coplanaires

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires ($\vec{u}$ a une première coordonnée non nulle, $\vec{v}$ non).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

On cherche a, b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v} = (a\,;b\,;a+b)$. Il faut $a = 2$, $b = 3$ et $a + b = 5$: cette dernière condition est vérifiée.

Donc $\vec{w} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$: les trois vecteurs sont coplanaires.

Réponse. $\vec{w} = 2\vec{u} + 3\vec{v}$: vecteurs coplanaires.

Rappel de cours. $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ coplanaires $\Leftrightarrow$ l'un s'écrit comme combinaison linéaire des deux autres (non colinéaires).

Correction de l'exercice 22 – Vecteur normal à un plan (2 vecteurs)

$\vec{n}$ doit être orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$: $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$.

$\vec{n} \cdot \vec{u} = a + c = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{v} = b + c = 0$. Donc $a = -c$ et $b = -c$.

En choisissant $c = 1$: $\vec{n} = (-1\,;-1\,;1)$ (ou tout vecteur colinéaire).

Réponse. $\vec{n} = (-1\,;-1\,;1)$ convient.

Rappel de cours. Un vecteur normal au plan est orthogonal à deux vecteurs directeurs : on résout le système de deux produits scalaires nuls.

Correction de l'exercice 23 – Équation de plan par un point et une normale

Équation de la forme $3x - y + 2z + d = 0$ (les coefficients sont ceux de $\vec{n}$).

A appartient au plan : $3 \times 2 - 1 + 2 \times 0 + d = 0$, soit $6 - 1 + d = 0$, donc $d = -5$.

Équation : $3x - y + 2z - 5 = 0$.

Réponse. $3x - y + 2z - 5 = 0$.

Rappel de cours. Plan de normale $(a;b;c)$ passant par A : $ax + by + cz + d = 0$, avec d déterminé en injectant A.

Correction de l'exercice 24 – Point dans un plan

On remplace les coordonnées de B dans l'équation.

$2 \times 1 + 2 - 3 - 1 = 2 + 2 - 3 - 1 = 0$.

Le résultat est 0 : B appartient au plan P.

Réponse. Oui, $B \in P$ (l'équation est vérifiée : $0 = 0$).

Rappel de cours. Un point est dans un plan si ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne (on doit obtenir 0).

Correction de l'exercice 25 – Projeté et calcul de longueur

$\overrightarrow{AB} = (2;0;0)$ et $\overrightarrow{AC} = (2;3;0)$.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times 2 + 0 \times 3 + 0 \times 0 = 4$.

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 > 0$: l'angle $B\hat{A}C$ est aigu (le cosinus, de même signe que le produit scalaire, est positif).

Réponse. $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 > 0$: angle aigu.

Rappel de cours. Signe du produit scalaire = signe du cosinus : > 0 angle aigu, $= 0$ angle droit, < 0 angle obtus.

Correction de l'exercice 26 – Plans perpendiculaires

Vecteurs normaux : $\vec{n}_P(1\,;1\,;1)$ et $\vec{n}_Q(1\,;-2\,;1)$.

$\vec{n}_P \cdot \vec{n}_Q = 1 - 2 + 1 = 0$: les vecteurs normaux sont orthogonaux.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Donc les plans P et Q sont perpendiculaires.

Réponse. Oui, $P \perp Q$.

Rappel de cours. Deux plans sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.

Correction de l'exercice 27 – Type bac : droite orthogonale à un plan

Un vecteur normal de P se lit sur les coefficients : $\vec{n} = (1; 2; -1)$.

Le vecteur directeur de D est $\vec{u} = (1; 2; -1)$.

$\vec{u} = \vec{n}$: le vecteur directeur de la droite est colinéaire au vecteur normal du plan, donc D est orthogonale à P.

Réponse. $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{n}$: la droite D est orthogonale au plan P.

Rappel de cours. Une droite est orthogonale à un plan ⇔ son vecteur directeur est colinéaire à un vecteur normal du plan.

Correction de l'exercice 28 – Type bac : intersection droite-plan

On remplace x, y, z (en fonction de t) dans l'équation du plan.

$(1 + t) + (2t) + (-t) - 4 = 0$, soit $1 + t + 2t - t - 4 = 0$, donc $2t - 3 = 0$ et $t = 1{,}5$.

On reporte $t = 1{,}5$: $x = 2{,}5$, $y = 3$, $z = -1{,}5$.

Réponse. Le point d'intersection est $(2{,}5\,;\,3\,;\,-1{,}5)$.

Rappel de cours. Intersection droite-plan : injecter la représentation paramétrique dans l'équation du plan, résoudre en t, puis calculer le point.

Correction de l'exercice 29 – Type bac : triangle BDE équilatéral

Coordonnées : $B(1\,;0\,;0)$, $D(0\,;1\,;0)$, $E(0\,;0\,;1)$.

$\overrightarrow{BD} = (-1\,;1\,;0)$, donc $BD = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2}$.

$\overrightarrow{DE} = (0\,;-1\,;1)$, donc $DE = \sqrt{0^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

$\overrightarrow{BE} = (-1\,;0\,;1)$, donc $BE = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Les trois côtés sont égaux ($BD = DE = BE = \sqrt{2}$) : le triangle BDE est équilatéral.

Réponse. $BD = DE = BE = \sqrt{2}$: le triangle BDE est équilatéral.

Rappel de cours. Les diagonales des faces d'un cube d'arête a mesurent toutes $a\sqrt{2}$: un triangle reliant trois de ces diagonales est équilatéral.

Correction de l'exercice 30 – Type bac : distance entre deux points

$\overrightarrow{AB} = (4 - 1\,;2 - (-2)\,;3 - 3) = (3\,;4\,;0)$.

$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 0^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$.

Réponse. $AB = 5$.

Rappel de cours. Distance entre deux points = norme du vecteur :
$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 31 – Type bac : plan (BDE), équation et distance

1) $\overrightarrow{BD} = (-1\,;1\,;0)$ et $\overrightarrow{BE} = (-1\,;0\,;1)$ dirigent le plan (BDE). On calcule : $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BD} = -1+1+0 = 0$ et $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BE} = -1+0+1 = 0$. $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan : il en est un vecteur normal.

2) Le plan a une équation $x+y+z+d=0$ (coefficients donnés par $\overrightarrow{AG}$). Il passe par $B(1\,;0\,;0)$: $1+0+0+d=0$, donc $d=-1$. Équation de (BDE) : $x+y+z-1=0$. (On vérifie : $D(0\,;1\,;0)$ et $E(0\,;0\,;1)$ la satisfont.)

3) Distance de $A(0\,;0\,;0)$ au plan : $d(A,(BDE)) = \dfrac{|0+0+0-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Réponse. $\overrightarrow{AG}$ normal à (BDE) ; équation $x+y+z-1=0$; $d(A,(BDE)) = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}58$.

Rappel de cours. Distance point-plan : $d = \dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. La grande diagonale (AG) d'un cube est orthogonale au plan (BDE).

Correction de l'exercice 32 – Type bac : plan (BDE) du cube, équation et distance

$\overrightarrow{AG} = (1;1;1)$; $\overrightarrow{BD} = D-B = (-1;1;0)$; $\overrightarrow{BE} = E-B = (-1;0;1)$.

$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BD} = -1+1+0 = 0$ et $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BE} = -1+0+1 = 0$: $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BDE), donc (AG) est orthogonale à (BDE) et $\overrightarrow{AG}$ en est un vecteur normal.

Le plan admet $\overrightarrow{AG} = (1;1;1)$ pour normale : il a une équation $x+y+z+d=0$. Il passe par $B(1;0;0)$: $1+0+0+d=0$, donc $d=-1$. Équation : $x+y+z-1=0$.

(AG) est dirigée par $(1;1;1)$ et passe par A : ses points sont $(t;t;t)$. En reportant dans l'équation du plan : $t+t+t-1=0$, soit $t=\frac{1}{3}$. Donc $K(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3})$.

$d(A,(BDE)) = \dfrac{|0+0+0-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}58$. (C'est la distance AK.)

Réponse. $\overrightarrow{AG} = (1;1;1)$ normal à (BDE) ; plan : $x+y+z-1=0$; $K(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3})$; $d(A,(BDE)) = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

Rappel de cours. Orthogonale à deux vecteurs non colinéaires d'un plan ⇒ orthogonale au plan ; distance d'un point à un plan : $\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Correction de l'exercice 33 – Type bac : une section du cube

1) $E(0\,;0\,;1)$, $H(0\,;1\,;1)$, donc $I\left(0\,;\frac{1}{2}\,;1\right)$. $B(1\,;0\,;0)$, $C(1\,;1\,;0)$, donc $J\left(1\,;\frac{1}{2}\,;0\right)$.

2) $\overrightarrow{IJ}(1\,;0\,;-1)$ et $\overrightarrow{EB}(1\,;0\,;-1)$: $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{EB}$, donc $(IJ) \parallel (EB)$.

De plus $\overrightarrow{EI}\left(0\,;\frac{1}{2}\,;0\right) = \overrightarrow{BJ}$: $EIJB$ est un parallélogramme (non aplati car $\overrightarrow{EI}$ et $\overrightarrow{EB}$ ne sont pas colinéaires).

3) Milieu de $[IJ]$: $\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$, qui est le milieu de la grande diagonale $[AG]$, c'est-à-dire le centre Ω du cube.

Réponse. $I\left(0\,;\frac{1}{2}\,;1\right)$, $J\left(1\,;\frac{1}{2}\,;0\right)$; $EIJB$ parallélogramme ; $\Omega\left(\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$ milieu de $[IJ]$.

Rappel de cours. Dans un cube, choisir le repère $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$ transforme la

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

géométrie en calculs de coordonnées.

Correction de l'exercice 34 – Type bac : plan défini par trois points

Vecteurs directeurs : $\overrightarrow{AB} = (-1; 2; 0)$ et $\overrightarrow{AC} = (-1; 0; 3)$.

On cherche $\vec{n} = (a; b; c)$ orthogonal aux deux : $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = -a + 2b = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = -a + 3c = 0$. Donc $a = 2b$ et $a = 3c$. En prenant $a = 6$: $b = 3$, $c = 2$, soit $\vec{n} = (6; 3; 2)$.

Équation $6x + 3y + 2z + d = 0$. Avec $A(1; 0; 0)$: $6 + d = 0$, donc $d = -6$.

Équation : $6x + 3y + 2z - 6 = 0$.

Réponse. $\vec{n} = (6; 3; 2)$; plan (ABC):$6x + 3y + 2z - 6 = 0$.

Rappel de cours. Plan par 3 points : deux vecteurs $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$, un vecteur normal par produits scalaires nuls, puis l'équation en injectant un point.

Correction de l'exercice 35 – Type bac : distance d'un point à un plan

Formule : $d(A, P) = \dfrac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$ avec $(a; b; c) = (2; 1; -2)$.

Numérateur : $|2 \times 1 + 2 - 2 \times 2 + 1| = |2 + 2 - 4 + 1| = |1| = 1$.

Dénominateur : $\sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{4 + 1 + 4} = \sqrt{9} = 3$.

$d(A, P) = \dfrac{1}{3}$.

Réponse. $d(A, P) = \dfrac{1}{3}$.

Rappel de cours. Distance point-plan : $d = \dfrac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$. Valeur absolue au numérateur, norme de la normale au dénominateur.

Correction de l'exercice 36 – Type bac : projeté orthogonal

La droite (AH) est orthogonale à P, donc dirigée par $\vec{n} = (1; 1; 1)$: $H = A + t\vec{n}$, soit $H(2 + t\,; 2 + t\,; 2 + t)$.

$H \in P$: $(2 + t) + (2 + t) + (2 + t) - 3 = 0$, soit $6 + 3t - 3 = 0$, donc $3t = -3$ et $t = -1$.

$H(2 - 1\,; 2 - 1\,; 2 - 1) = H(1\,; 1\,; 1)$.

Réponse. $H(1\,; 1\,; 1)$.

Rappel de cours. Projeté orthogonal : suivre la droite passant par A dirigée par la normale $\vec{n}$, et trouver son intersection avec le plan.

Correction de l'exercice 37 – Type bac : orthogonalité dans un tétraèdre

Le plan (OBC) est dirigé par $\overrightarrow{OB} = (0; 1; 0)$ et $\overrightarrow{OC} = (0; 0; 1)$.

$\overrightarrow{OA} = (1; 0; 0)$. On calcule : $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$ et $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$.

$\overrightarrow{OA}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires de (OBC) : donc (OA) est orthogonale au plan (OBC).

Réponse. $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OC}$: (OA) est orthogonale au plan (OBC).

Rappel de cours. Une droite est orthogonale à un plan si son vecteur directeur est orthogonal à DEUX vecteurs directeurs non colinéaires du plan.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 38 – Type bac : angle entre deux vecteurs (3D)

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 1 + 1 \times 0 + 0 \times 1 = 1$.

$\|\vec{u}\| = \sqrt{2}$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{2}$. $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$, donc $\theta = 60°$.

Réponse. $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$, $\theta = 60°$.

Rappel de cours. $\cos\theta = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|}$.

Correction de l'exercice 39 – Type bac : angles d'une diagonale du cube

$\overrightarrow{AG} = (1;1;1)$, $\overrightarrow{AB} = (1;0;0)$, $\overrightarrow{AC} = (1;1;0)$. $\|\overrightarrow{AG}\| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$ et $\|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}$.

$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 0 = 2$.

$\cos C\hat{A}G = \dfrac{\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AG}\| \, \|\overrightarrow{AC}\|} = \dfrac{2}{\sqrt{3} \times \sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{6}} = \dfrac{\sqrt{6}}{3} \approx 0{,}816$, donc $C\hat{A}G \approx 35{,}3°$.

$\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AB} = 1$. $\cos B\hat{A}G = \dfrac{1}{\sqrt{3} \times 1} = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \approx 0{,}577$, donc $B\hat{A}G \approx 54{,}7°$.

$C\hat{A}G \approx 35{,}3° < B\hat{A}G \approx 54{,}7°$: la diagonale (AG) fait un angle plus petit avec la diagonale de face (AC) qu'avec l'arête (AB). La diagonale du cube est « plus proche » du plan de la base que de l'arête verticale.

Réponse. $\|\overrightarrow{AG}\| = \sqrt{3}$; $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \Rightarrow C\hat{A}G \approx 35{,}3°$; $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AB} = 1 \Rightarrow B\hat{A}G \approx 54{,}7°$.

Rappel de cours. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos\theta$ donne l'angle : $\cos\theta = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|}$.

Correction de l'exercice 40 – Type bac : aire d'un triangle par un volume

1) Base OAB, rectangle en O, d'aire $\dfrac{2 \times 3}{2} = 3$; hauteur $OC = 6$. $V = \dfrac{1}{3} \times 3 \times 6 = 6$.

2) A : $6 + 0 + 0 - 6 = 0$; B : $0 + 6 + 0 - 6 = 0$; C : $0 + 0 + 6 - 6 = 0$. Les trois points (non alignés) vérifient l'équation.

3) $d(O,(ABC)) = \dfrac{|0+0+0-6|}{\sqrt{9+4+1}} = \dfrac{6}{\sqrt{14}}$.

Le volume vaut aussi $\dfrac{1}{3} \times \text{aire}(ABC) \times d$: $6 = \dfrac{1}{3} \times \text{aire} \times \dfrac{6}{\sqrt{14}}$, d'où $\text{aire}(ABC) = 3\sqrt{14} \approx 11{,}2$.

Réponse. $V = 6$; $d = \dfrac{6}{\sqrt{14}}$; aire de ABC : $3\sqrt{14}$.

Rappel de cours. Distance d'un point M au plan $ax + by + cz + d = 0$: $\dfrac{|ax_M + by_M + cz_M + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).