Géométrie dans l’espace et produit scalaire — Terminale spécialité

40 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés

Présentation

Dans l’espace muni d’un repère, un point a trois coordonnées (x, y, z) et un vecteur de même. On manipule coordonnées, normes, produit scalaire, représentations paramétriques de droites et équations cartésiennes de plans (via un vecteur normal). Le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$ s’annule exactement quand deux vecteurs sont orthogonaux : il donne des angles, un vecteur normal à un plan et des distances. Ces exercices corrigés couvrent vecteurs, colinéarité et coplanarité, droites et plans, puis produit scalaire, orthogonalité, angles, vecteur normal, équations de plans et distances, du plus simple au type bac. Difficulté croissante, correction d’un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-specialite/geometrie-dans-lespace

Exercice 1 – Coordonnées d’un vecteur

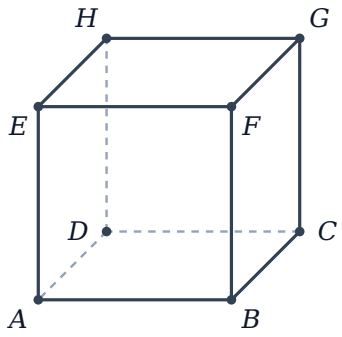
Soit $A(1\,;2\,;3)$ et $B(4\,;0\,;5)$. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Exercice 2 – Norme d’un vecteur

Calculer la norme du vecteur $\vec{u} = (2\,;-1\,;2)$.

Exercice 3 – Lire les coordonnées des sommets d’un cube

$ABCDEFGH$ est un cube. On se place dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$. À l’aide de la figure, donner les coordonnées des sommets B, D, F et G.



Cube ABCDEFGH dans le repère (A ; AB, AD, AE)

Exercice 4 – Vecteurs colinéaires

Les vecteurs $\vec{u}(2\,;-4\,;6)$ et $\vec{v}(-1\,;2\,;-3)$ sont-ils colinéaires ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Produit scalaire par coordonnées

Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ avec $\vec{u} = (3\,;0\,;-2)$ et $\vec{v} = (1\,;4\,;2)$.

Exercice 6 – Produit scalaire d'un vecteur par lui-même

Calculer $\vec{u} \cdot \vec{u}$ pour $\vec{u} = (2\,;-1\,;2)$, et en déduire $\|\vec{u}\|$.

Exercice 7 – Orthogonalité

Les vecteurs $\vec{u} = (1\,;2\,;2)$ et $\vec{v} = (2\,;1\,;-2)$ sont-ils orthogonaux ?

Exercice 8 – Vecteur unitaire

Soit $\vec{u}(1\,;2\,;2)$. Calculer $\|\vec{u}\|$ et donner un vecteur unitaire de même direction et de même sens.

Exercice 9 – Produit scalaire (coordonnées)

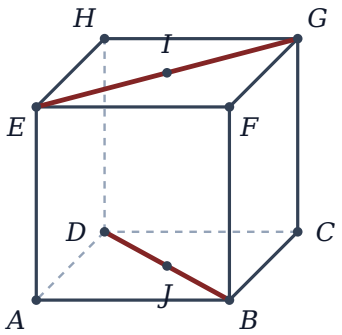
Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$ avec $\vec{u} = (1\,;2\,;-1)$ et $\vec{v} = (3\,;-1\,;4)$.

Exercice 10 – Tester l'orthogonalité

Les vecteurs $\vec{u} = (2\,;1\,;-1)$ et $\vec{v} = (1\,;-1\,;1)$ sont-ils orthogonaux ?

Exercice 11 – Milieux dans le cube

$ABCDEFGH$ est un cube, repère $(A\,;\vec{AB},\vec{AD},\vec{AE})$. On note I le milieu de $[EG]$ et J le milieu de $[BD]$. Déterminer les coordonnées de I et J.



Exercice 12 – Trois points alignés ?

Les points $A(1\,;2\,;0)$, $B(3\,;1\,;2)$ et $C(7\,;-1\,;6)$ sont-ils alignés ?

Exercice 13 – Produit scalaire avec norme et angle

Deux vecteurs vérifient $\|\vec{u}\| = 3$, $\|\vec{v}\| = 4$ et l'angle entre eux mesure $60°$. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 14 – Trouver une coordonnée pour l'orthogonalité

Déterminer a pour que $\vec{u} = (1\,;a\,;3)$ et $\vec{v} = (2\,;-1\,;1)$ soient orthogonaux.

Exercice 15 – Calcul d'un angle

Calculer le cosinus de l'angle entre $\vec{u} = (1\,;0\,;0)$ et $\vec{v} = (1\,;1\,;0)$.

Exercice 16 – Triangle rectangle dans l'espace

Soient $A(1\,;0\,;0)$, $B(0\,;1\,;0)$ et $C(1\,;0\,;2)$. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A et calculer son aire.

Exercice 17 – Représentation paramétrique d'une droite

Donner une représentation paramétrique de la droite passant par $A(1\,;0\,;2)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = (2\,;-1\,;3)$.

Exercice 18 – Point appartenant à une droite

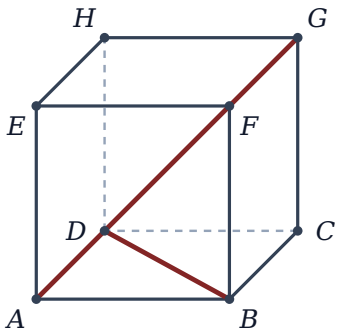
La droite a pour représentation $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$. Le point $B(5\,;-2\,;8)$ appartient-il à cette droite ?

Exercice 19 – Vecteur normal et équation de plan

Donner une équation cartésienne du plan passant par $A(1\,;2\,;-1)$ et de vecteur normal $\vec{n} = (2\,;-1\,;3)$.

Exercice 20 – Diagonale et orthogonalité dans le cube

$ABCDEFGH$ est un cube, repère orthonormé $(A\,;\vec{AB},\vec{AD},\vec{AE})$. Démontrer que la grande diagonale (AG) est orthogonale à la diagonale (BD) de la face inférieure.



Diagonales [AG] et [BD]

Exercice 21 – Vecteurs coplanaires

Montrer que $\vec{u}(1\,;0\,;1)$, $\vec{v}(0\,;1\,;1)$ et $\vec{w}(2\,;3\,;5)$ sont coplanaires.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 22 – Vecteur normal à un plan (2 vecteurs)

Un plan contient les vecteurs $\vec{u} = (1\,;0\,;1)$ et $\vec{v} = (0\,;1\,;1)$. Déterminer un vecteur normal $\vec{n} = (a\,;b\,;c)$ à ce plan.

Exercice 23 – Équation de plan par un point et une normale

Donner une équation du plan passant par $A(2\,;1\,;0)$ et de vecteur normal $\vec{n} = (3\,;-1\,;2)$.

Exercice 24 – Point dans un plan

Le point $B(1\,;2\,;3)$ appartient-il au plan $P{:}2x + y - z - 1 = 0$?

Exercice 25 – Projeté et calcul de longueur

Avec $A(0\,;0\,;0)$, $B(2\,;0\,;0)$, $C(2\,;3\,;0)$, calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et en déduire si l'angle $B\hat{A}C$ est aigu, droit ou obtus.

Exercice 26 – Plans perpendiculaires

Les plans $P{:}x + y + z = 1$ et $Q{:}x - 2y + z = 3$ sont-ils perpendiculaires ?

Exercice 27 – Type bac : droite orthogonale à un plan

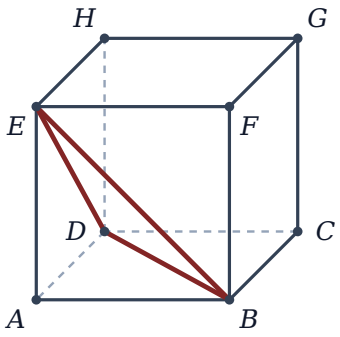
Soit le plan $P{:}x + 2y - z + 3 = 0$. La droite D passe par $A(0\,;0\,;3)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u} = (1\,;2\,;-1)$. Montrer que D est orthogonale à P.

Exercice 28 – Type bac : intersection droite-plan

Déterminer le point d'intersection de la droite $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = -t \end{cases}$ avec le plan $P{:}x + y + z - 4 = 0$.

Exercice 29 – Type bac : triangle BDE équilatéral

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 1, repère orthonormé $(A\,;\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$. Démontrer que le triangle BDE est équilatéral.



Triangle BDE

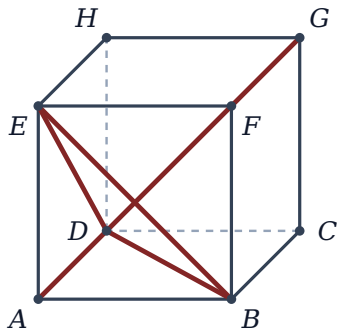
mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 30 – Type bac : distance entre deux points

Calculer la longueur AB avec $A(1\,;-2\,;3)$ et $B(4\,;2\,;3)$, puis dire si le triangle OAB (avec O origine) est rectangle en... on calcule juste AB.

Exercice 31 – Type bac : plan (BDE), équation et distance

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 1, repère orthonormé $(A\,;\vec{AB},\vec{AD},\vec{AE})$. On considère le plan (BDE). 1) Vérifier que $\vec{AG}(1\,;1\,;1)$ est normal au plan (BDE). 2) En déduire une équation cartésienne de (BDE). 3) Calculer la distance du point A au plan (BDE).



Plan (BDE) et diagonale [AG]

Exercice 32 – Type bac : plan (BDE) du cube, équation et distance

On considère le cube $ABCDEFGH$ d'arête 1, muni du repère orthonormé $(A\,;\vec{AB},\vec{AD},\vec{AE})$. On a ainsi $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $D(0;1;0)$, $E(0;0;1)$ et $G(1;1;1)$.

1. Donner les coordonnées de $\vec{AG}$, $\vec{BD}$ et $\vec{BE}$.

2. Démontrer que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).

3. En déduire qu'une équation cartésienne du plan (BDE) est $x+y+z-1=0$.

4. Déterminer les coordonnées du point K d'intersection de (AG) et du plan (BDE).

5. Calculer la distance du point A au plan (BDE).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

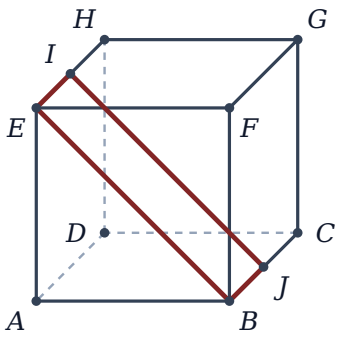
Exercice 33 – Type bac : une section du cube

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête 1, repère $(A\,;\vec{AB},\vec{AD},\vec{AE})$. I est le milieu de $[EH]$ et J le milieu de $[BC]$.

1. Donner les coordonnées de I et J.

2. Montrer que (IJ) et (EB) sont parallèles, puis que $EIJB$ est un parallélogramme.

3. Montrer que le centre Ω du cube est le milieu de $[IJ]$.



Exercice 34 – Type bac : plan défini par trois points

Soit $A(1\,;0\,;0)$, $B(0\,;2\,;0)$, $C(0\,;0\,;3)$. 1) Donner deux vecteurs directeurs du plan (ABC). 2) Déterminer une équation cartésienne de ce plan.

Exercice 35 – Type bac : distance d'un point à un plan

Calculer la distance du point $A(1\,;2\,;2)$ au plan $P{:}2x+y-2z+1=0$.

Exercice 36 – Type bac : projeté orthogonal

Soit $P{:}x+y+z-3=0$ et $A(2\,;2\,;2)$. Déterminer le projeté orthogonal H de A sur P.

Exercice 37 – Type bac : orthogonalité dans un tétraèdre

Dans un repère orthonormé, $O(0;0;0)$, $A(1;0;0)$, $B(0;1;0)$, $C(0;0;1)$. Montrer que (OA) est orthogonale au plan (OBC).

Exercice 38 – Type bac : angle entre deux vecteurs (3D)

Calculer le cosinus de l'angle entre $\vec{u}(1\,;1\,;0)$ et $\vec{v}(1\,;0\,;1)$.

Exercice 39 – Type bac : angles d'une diagonale du cube

On considère le cube $ABCDEFGH$ d'arête 1 muni du repère orthonormé $(A\,;\vec{AB},\vec{AD},\vec{AE})$, avec $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(1;1;0)$ et $G(1;1;1)$. La droite (AG) est la grande diagonale du cube.

1. Donner les coordonnées de $\vec{AG}$, $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$, puis calculer les normes $\|\vec{AG}\|$ et $\|\vec{AC}\|$.

2. Calculer le produit scalaire $\vec{AG}\cdot\vec{AC}$.

3. En déduire une valeur approchée, au dixième de degré, de l'angle $C\hat{A}G$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

4. Calculer $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AB}$ et en déduire une valeur approchée de l'angle $B\hat{A}G$.

5. Comparer les angles $C\hat{A}G$ et $B\hat{A}G$ et interpréter géométriquement.

Exercice 40 – Type bac : aire d'un triangle par un volume

Soient $O(0\,;0\,;0)$, $A(2\,;0\,;0)$, $B(0\,;3\,;0)$ et $C(0\,;0\,;6)$.

1. Calculer le volume du tétraèdre $OABC$.

2. Vérifier que $3x + 2y + z - 6 = 0$ est une équation du plan (ABC).

3. Calculer la distance de O au plan (ABC), puis en déduire l'aire du triangle ABC.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).