Calcul intégral — Terminale spécialité

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

L'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ se calcule avec une primitive F de f : c'est $F(b) - F(a)$. Quand $f \geq 0$, elle représente l'aire sous la courbe entre a et b. Ces exercices corrigés couvrent calcul d'intégrales, aire, valeur moyenne, linéarité, intégration par parties et problèmes type bac. Difficulté croissante, correction d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-specialite/integrales

Exercice 1 – Intégrale d'une constante

Un mobile se déplace à vitesse constante $v(t) = 2$ (en m/s) entre les instants $t = 1$ et $t = 4$ (en secondes). La distance parcourue est donnée par l'intégrale $\int_1^4 2\,dt$.

1. Donner une primitive de la fonction constante $t \mapsto 2$.

2. En déduire la valeur de $\int_1^4 2\,dt$.

Exercice 2 – Intégrale d'un monôme

On considère la fonction identité $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0; 2]$. On veut calculer l'intégrale $\int_0^2 x\,dx$, qui correspond à l'aire du triangle sous la droite $y = x$.

1. Déterminer une primitive F de la fonction $f(x) = x$.

2. Calculer $\int_0^2 x\,dx$ à l'aide de $[F(x)]_0^2$.

Exercice 3 – Intégrale d'un polynôme

Soit $f(x) = 3x^2 + 1$, une fonction polynôme du second degré. On souhaite calculer son intégrale sur $[0; 1]$: $\int_0^1 (3x^2 + 1)\,dx$.

1. Donner une primitive F de f en primitivant terme à terme.

2. En déduire la valeur de $\int_0^1 (3x^2 + 1)\,dx$.

Exercice 4 – Relation de Chasles

On sait que $\int_0^2 f(x)\,dx = 5$ et $\int_2^5 f(x)\,dx = -1$. Calculer $\int_0^5 f(x)\,dx$ et $\int_5^0 f(x)\,dx$.

Exercice 5 – Intégrale avec exponentielle

On étudie la fonction exponentielle $f(x) = e^x$, centrale en Terminale. On veut calculer l'aire sous sa courbe entre 0 et 1, c'est-à-dire $\int_0^1 e^x\,dx$.

1. Rappeler une primitive de la fonction $x \mapsto e^x$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

2. Calculer $\int_0^1 e^x\,dx$ et en donner une valeur approchée.

Exercice 6 – Intégrale avec 1/x

On considère la fonction inverse $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$. On veut calculer l'aire sous sa courbe entre $x = 1$ et $x = e$, soit $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx$.

1. Donner une primitive de $\frac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$.

2. En déduire la valeur de $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx$.

Exercice 7 – Linéarité de l'intégrale

Deux fonctions f et g sont telles que $\int_0^1 f = 3$ et $\int_0^1 g = -2$. Sans connaître f ni g, on peut calculer l'intégrale d'une combinaison linéaire grâce à la propriété de linéarité.

1. Énoncer la propriété de linéarité permettant de décomposer $\int_0^1 (2f+g)$.

2. Calculer $\int_0^1 (2f+g)$.

Exercice 8 – Intégrale avec 1/x

Calculer $I = \int_1^e \left(\frac{1}{x} + 2x\right)dx$.

Exercice 9 – Aire sous une courbe

Dans un repère orthonormé, on considère la parabole d'équation $f(x) = x^2$. On veut mesurer l'aire du domaine D compris entre cette courbe, l'axe des abscisses et les droites verticales $x = 0$ et $x = 3$.

1. Justifier que cette aire est égale à $\int_0^3 x^2\,dx$.

2. Calculer cette intégrale et conclure sur l'aire en unités d'aire.

Exercice 10 – Aire entre deux courbes

On considère les courbes des fonctions $f(x) = x$ (une droite) et $g(x) = x^2$ (une parabole) sur l'intervalle $[0;1]$. Ces deux courbes délimitent un domaine dont on cherche l'aire.

1. Déterminer, sur $[0;1]$, laquelle des deux courbes est au-dessus de l'autre.

2. Exprimer l'aire cherchée sous forme d'une intégrale, puis la calculer.

Exercice 11 – Valeur moyenne

On reprend la fonction $f(x) = x^2$ sur l'intervalle $[0;3]$. On veut déterminer sa valeur moyenne μ, c'est-à-dire la hauteur du rectangle de base $[0;3]$ ayant la même aire que le domaine sous la courbe.

1. Écrire la formule donnant la valeur moyenne μ de f sur $[0;3]$.

2. Sachant que $\int_0^3 x^2\,dx = 9$, calculer μ.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 12 – Intégrale par reconnaissance u'/u

On veut calculer $\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx$. Plutôt que de chercher une primitive « à l'aveugle », on reconnaît une forme $\frac{u'}{u}$, dont une primitive est $\ln|u|$.

1. Identifier la fonction u telle que l'intégrande s'écrive $\frac{u'}{u}$, et en déduire une primitive.

2. Calculer $\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx$.

Exercice 13 – Encadrer une intégrale qu'on ne sait pas calculer

On ne connaît pas de primitive de $x \mapsto e^{x^2}$. Montrer que $1 \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq e$.

Exercice 14 – Type bac : intégration par parties

On veut calculer l'intégrale $\int_0^1 x\,e^x\,dx$. Le produit $x\,e^x$ ne se primitive pas directement : on utilise la technique de l'intégration par parties (IPP).

1. Choisir u et v', puis écrire la formule d'intégration par parties pour cette intégrale.

2. Mener le calcul jusqu'au résultat final.

Exercice 15 – Type bac : IPP avec logarithme

La fonction ln n'a pas de primitive « évidente ». Pour calculer $\int_1^e \ln(x)\,dx$, on utilise une intégration par parties astucieuse en posant $v' = 1$.

1. Poser $u = \ln(x)$ et $v' = 1$, puis écrire la formule d'IPP.

2. Achever le calcul de $\int_1^e \ln(x)\,dx$.

Exercice 16 – Type bac : aire et valeur exacte

On considère la fonction $f(x) = (2-x)e^x$ définie sur $[0;2]$. On admet que $F(x) = (3-x)e^x$ est une primitive de f. On cherche l'aire exacte du domaine situé sous la courbe de f sur cet intervalle.

1. Justifier que $f(x) \geq 0$ sur $[0;2]$, de sorte que l'aire vaut $\int_0^2 f(x)\,dx$.

2. Vérifier que F est bien une primitive de f, puis calculer l'aire.

Exercice 17 – Type bac : intégrale d'un cosinus

On étudie la fonction trigonométrique $f(x) = \cos x$ sur l'intervalle $[0;\frac{\pi}{2}]$. On veut calculer l'aire sous sa courbe, donnée par $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$.

1. Donner une primitive de la fonction cosinus.

2. Calculer $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 18 – Type bac : valeur moyenne d'une exponentielle

On considère la fonction $f(x) = e^x$ sur l'intervalle $[0; 1]$. On souhaite déterminer sa valeur moyenne μ sur cet intervalle.

1. Écrire la formule de la valeur moyenne μ de f sur $[0; 1]$.

2. Calculer μ et en donner une valeur approchée.

Exercice 19 – Type bac : aire, intégration par parties et valeur moyenne

Soit f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = x\,e^x$, de courbe C.

1. Justifier que f est positive et croissante sur $[0; 1]$.

2. Vérifier que $F(x) = (x - 1)e^x$ est une primitive de f sur $[0; 1]$.

3. En déduire l'aire A, en unités d'aire, du domaine compris entre C, l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = 1$.

4. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $J = \int_0^1 x^2 e^x\,dx$.

5. Déterminer la valeur moyenne m de f sur $[0; 1]$.

Exercice 20 – Type bac : intégration par parties avec sinus

Calculer $I = \int_0^{\pi} x \sin x\,dx$ par une intégration par parties.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Intégrale d'une constante

On cherche une primitive de la fonction constante $f(x) = 2$. Une fonction dont la dérivée vaut 2 est $F(x) = 2x$ (en effet $F'(x) = 2$).

On applique la formule $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$:

$\int_1^4 2\,dx = [2x]_1^4 = F(4) - F(1) = 2 \times 4 - 2 \times 1 = 8 - 2 = 6.$

Réponse. $\int_1^4 2\,dx = 6$.

Rappel de cours. $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f. On note souvent $[F(x)]_a^b$.

Correction de l'exercice 2 – Intégrale d'un monôme

Une primitive de x est $F(x) = \dfrac{x^2}{2}$: en dérivant, $F'(x) = \dfrac{2x}{2} = x$. ✓

On évalue entre les bornes : $\int_0^2 x\,dx = \left[\dfrac{x^2}{2}\right]_0^2 = \dfrac{2^2}{2} - \dfrac{0^2}{2} = \dfrac{4}{2} - \dfrac{0}{2} = 2.$

Réponse. $\int_0^2 x\,dx = 2$.

Rappel de cours. On calcule la primitive, on remplace par la borne du haut, on soustrait la valeur en la borne du bas.

Correction de l'exercice 3 – Intégrale d'un polynôme

On primitive terme à terme. Une primitive de $3x^2$ est x^3 (car $(x^3)' = 3x^2$), et une primitive de 1 est x. Donc $F(x) = x^3 + x$.

On évalue : $\int_0^1 (3x^2 + 1)\,dx = [x^3 + x]_0^1 = (1^3 + 1) - (0^3 + 0) = (1 + 1) - (0 + 0) = 2.$

Réponse. $\int_0^1 (3x^2 + 1)\,dx = 2$.

Rappel de cours. Une primitive de $3x^2$ est x^3 : pratique car le 3 « disparaît ». Toujours vérifier en dérivant.

Correction de l'exercice 4 – Relation de Chasles

Chasles : $\int_0^5 f = \int_0^2 f + \int_2^5 f = 5 - 1 = 4.$

Échanger les bornes change le signe : $\int_5^0 f = -\int_0^5 f = -4.$

Réponse. 4 et -4.

Rappel de cours. $\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f$ et $\int_b^a f = -\int_a^b f$.

Correction de l'exercice 5 – Intégrale avec exponentielle

La fonction exponentielle est sa propre primitive : une primitive de e^x est $F(x) = e^x$.

On évalue entre les bornes : $\int_0^1 e^x\,dx = [e^x]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1.$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Numériquement, $e \approx 2{,}718$, donc $e - 1 \approx 1{,}72$.

Réponse. $\int_0^1 e^x\,dx = e - 1 \approx 1{,}72$.

Rappel de cours. e^x est sa propre primitive. $e^0 = 1$.

Correction de l'exercice 6 – Intégrale avec 1/x

Sur $]0;+\infty[$, une primitive de $\frac{1}{x}$ est $F(x) = \ln(x)$ (par définition, $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$).

On évalue : $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx = [\ln(x)]_1^e = \ln(e) - \ln(1)$.

Or $\ln(e) = 1$ et $\ln(1) = 0$, donc le résultat est $1 - 0 = 1$.

Réponse. $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx = 1$.

Rappel de cours. $\ln(e) = 1$ et $\ln(1) = 0$. C'est l'intégrale « qui vaut exactement 1 ».

Correction de l'exercice 7 – Linéarité de l'intégrale

Par linéarité de l'intégrale, on peut sortir les constantes et séparer la somme :
$\int_0^1 (2f + g) = 2\int_0^1 f + \int_0^1 g$.

On remplace par les valeurs données : $= 2 \times 3 + (-2) = 6 - 2 = 4$.

Réponse. $\int_0^1 (2f + g) = 4$.

Rappel de cours. Linéarité : $\int(\alpha f + \beta g) = \alpha\int f + \beta\int g$. On peut « sortir » les constantes et séparer les sommes.

Correction de l'exercice 8 – Intégrale avec 1/x

Une primitive est $F(x) = \ln x + x^2$ sur $[1\,;e]$.

$I = F(e) - F(1) = (1 + e^2) - (0 + 1) = e^2$.

Réponse. $I = e^2$.

Rappel de cours. $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ pour toute primitive F de f.

Correction de l'exercice 9 – Aire sous une courbe

Sur $[0;3]$, on a $f(x) = x^2 \geq 0$: la courbe est au-dessus de l'axe des abscisses. L'aire du domaine est donc $\int_0^3 x^2\,dx$.

Une primitive de x^2 est $\frac{x^3}{3}$. On évalue : $\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{27}{3} - 0 = 9$.

Réponse. L'aire vaut 9 unités d'aire.

Rappel de cours. Si $f \geq 0$ sur $[a;b]$, l'aire sous la courbe est $\int_a^b f(x)\,dx$ (en unités d'aire).

Correction de l'exercice 10 – Aire entre deux courbes

Sur $[0;1]$, on compare : $f(x) - g(x) = x - x^2 = x(1 - x)$. Comme $x \geq 0$ et $1 - x \geq 0$ sur cet intervalle, $x - x^2 \geq 0$: la courbe de f est au-dessus de celle de g.

L'aire est l'intégrale de la différence (courbe du haut moins courbe du bas) :
Aire $= \int_0^1 (f - g)\,dx = \int_0^1 (x - x^2)\,dx$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Une primitive de $x - x^2$ est $\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$. On évalue : $\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^1 = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) - 0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

Réponse. L'aire entre les deux courbes vaut $\frac{1}{6}$ unité d'aire.

Rappel de cours. Aire entre deux courbes : $\int_a^b (\text{courbe du haut} - \text{courbe du bas})\,dx$. Déterminer d'abord laquelle est au-dessus.

Correction de l'exercice 11 – Valeur moyenne

La valeur moyenne de f sur $[a;b]$ est $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$. Ici $a = 0$ et $b = 3$, donc $\mu = \frac{1}{3-0}\int_0^3 x^2\,dx$.

On a calculé précédemment $\int_0^3 x^2\,dx = 9$, donc $\mu = \frac{9}{3} = 3$.

Réponse. La valeur moyenne de f sur $[0;3]$ est 3.

Rappel de cours. Valeur moyenne de f sur $[a;b]$: $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f$. C'est la « hauteur » du rectangle de même aire.

Correction de l'exercice 12 – Intégrale par reconnaissance u'/u

On pose $u = x^2 + 1$, alors $u' = 2x$. L'intégrande $\frac{2x}{x^2+1}$ est exactement de la forme $\frac{u'}{u}$. Comme $u = x^2 + 1 > 0$, une primitive est $\ln(x^2 + 1)$.

On évalue : $\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx = [\ln(x^2+1)]_0^1 = \ln(1^2+1) - \ln(0^2+1) = \ln(2) - \ln(1) = \ln(2)$.

Réponse. $\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx = \ln(2)$.

Rappel de cours. Reconnaître la forme $\frac{u'}{u}$ avant de calculer évite de chercher une primitive « à l'aveugle ».

Correction de l'exercice 13 – Encadrer une intégrale qu'on ne sait pas calculer

Pour $x \in [0\,;1]$, $0 \leq x^2 \leq 1$. L'exponentielle étant croissante : $1 \leq e^{x^2} \leq e$.

Positivité de l'intégrale (bornes dans l'ordre croissant) : $\int_0^1 1\,dx \leq \int_0^1 e^{x^2}dx \leq \int_0^1 e\,dx$.

Soit $1 \leq \int_0^1 e^{x^2}dx \leq e$.

Réponse. $1 \leq \int_0^1 e^{x^2}dx \leq e$.

Rappel de cours. Si $f \leq g$ sur $[a\,;b]$ avec $a \leq b$, alors $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Correction de l'exercice 14 – Type bac : intégration par parties

La formule d'IPP est $\int_a^b u\,v' = [u\,v]_a^b - \int_a^b u'\,v$. On choisit $u = x$ (qui se simplifie en dérivant : $u' = 1$) et $v' = e^x$ (qu'on sait primitiver : $v = e^x$).

On applique : $\int_0^1 x\,e^x\,dx = [x\,e^x]_0^1 - \int_0^1 1 \cdot e^x\,dx$.

Le terme tout intégré : $[x\,e^x]_0^1 = 1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0 = e - 0 = e$. L'intégrale restante : $\int_0^1 e^x\,dx = [e^x]_0^1 = e - 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

On rassemble : $\int_0^1 x\,e^x\,dx = e - (e-1) = e - e + 1 = 1$.

Réponse. $\int_0^1 x\,e^x\,dx = 1$.

Rappel de cours. IPP : $\int uv' = [uv] - \int u'v$. On choisit u qui se simplifie en dérivant (ici $x \to 1$) et v' qu'on sait primitiver.

Correction de l'exercice 15 – Type bac : IPP avec logarithme

On pose $u = \ln(x)$ (donc $u' = \frac{1}{x}$) et $v' = 1$ (donc $v = x$). La formule d'IPP donne $\int_1^e u\,v' = [u\,v]_1^e - \int_1^e u'\,v$.

Soit $\int_1^e \ln(x)\,dx = [x\ln(x)]_1^e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x}\,dx = [x\ln(x)]_1^e - \int_1^e 1\,dx$.

Le terme tout intégré : $[x\ln(x)]_1^e = e\ln(e) - 1\cdot\ln(1) = e \times 1 - 0 = e$. L'intégrale restante : $\int_1^e 1\,dx = [x]_1^e = e - 1$.

On conclut : $\int_1^e \ln(x)\,dx = e - (e-1) = 1$.

Réponse. $\int_1^e \ln(x)\,dx = 1$.

Rappel de cours. Pour intégrer $\ln(x)$, l'astuce est l'IPP avec $u = \ln(x)$ et $v' = 1$: le $\frac{1}{x}$ simplifie le x.

Correction de l'exercice 16 – Type bac : aire et valeur exacte

Sur $[0;2]$, on a $2 - x \geq 0$ et $e^x > 0$, donc le produit $f(x) = (2-x)e^x \geq 0$: la courbe est au-dessus de l'axe des abscisses, l'aire vaut $\int_0^2 f(x)\,dx$.

Vérification de F : $F'(x) = (-1)\cdot e^x + (3-x)\cdot e^x = (-1+3-x)e^x = (2-x)e^x = f(x)$. ✓

On évalue : $\int_0^2 f = [F(x)]_0^2 = F(2) - F(0) = (3-2)e^2 - (3-0)e^0 = 1\cdot e^2 - 3\cdot 1 = e^2 - 3$.

Numériquement, $e^2 \approx 7{,}389$, donc $e^2 - 3 \approx 4{,}39$.

Réponse. L'aire vaut $e^2 - 3 \approx 4{,}39$ unités d'aire.

Rappel de cours. Quand l'énoncé fournit une primitive, on la vérifie en dérivant, puis on applique $F(b) - F(a)$. Penser à justifier le signe de f pour parler d'aire.

Correction de l'exercice 17 – Type bac : intégrale d'un cosinus

Une primitive de $\cos x$ est $F(x) = \sin x$ (car $(\sin x)' = \cos x$).

On évalue entre les bornes : $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = [\sin x]_0^{\pi/2} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0$.

Or $\sin\frac{\pi}{2} = 1$ et $\sin 0 = 0$, donc le résultat est $1 - 0 = 1$.

Réponse. $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx = 1$.

Rappel de cours. Primitive de cos : sin. $\sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\sin 0 = 0$.

Correction de l'exercice 18 – Type bac : valeur moyenne d'une exponentielle

La valeur moyenne de f sur $[a;b]$ est $\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f$. Ici $a = 0$, $b = 1$, donc $\mu = \frac{1}{1-0}\int_0^1 e^x\,dx = \int_0^1 e^x\,dx$.

On calcule l'intégrale : $\int_0^1 e^x\,dx = [e^x]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1$. Donc $\mu = e - 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Numériquement, $\mu \approx 2{,}718 - 1 \approx 1{,}72$.

Réponse. $\mu = e - 1 \approx 1{,}72$.

Rappel de cours. Valeur moyenne de f sur $[a;b]$: $\frac{1}{b-a}\int_a^b f$.

Correction de l'exercice 19 – Type bac : aire, intégration par parties et valeur moyenne

Sur $[0;1]$, $x \geq 0$ et $e^x > 0$, donc $f(x) \geq 0$. De plus $f'(x) = e^x + xe^x = (x+1)e^x > 0$: f est croissante.

$F'(x) = e^x + (x-1)e^x = e^x[1 + (x-1)] = xe^x = f(x)$: F est bien une primitive de f.

Comme $f \geq 0$ sur $[0;1]$, $A = \int_0^1 f(x)\,dx = F(1) - F(0) = 0 \cdot e - (-1) \cdot 1 = 1$ u.a.

IPP avec $u = x^2$ ($u' = 2x$) et $v' = e^x$ ($v = e^x$) : $J = [x^2e^x]_0^1 - \int_0^1 2xe^x\,dx = e - 2\int_0^1 xe^x\,dx$. Or $\int_0^1 xe^x\,dx = A = 1$, donc $J = e - 2$.

$m = \frac{1}{1-0}\int_0^1 f(x)\,dx = A = 1$.

Réponse. $A = 1$ u.a. ; $J = e - 2 \approx 0{,}72$; valeur moyenne $m = 1$.

Rappel de cours. Aire avec $f \geq 0$: $F(b) - F(a)$. Pour $\int x^2e^x$, une IPP la ramène à $\int xe^x$ déjà calculée.

Correction de l'exercice 20 – Type bac : intégration par parties avec sinus

On pose $u(x) = x$, $v'(x) = \sin x$, donc $u'(x) = 1$, $v(x) = -\cos x$.

$I = [-x\cos x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}(-\cos x)\,dx = [-x\cos x]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\cos x\,dx$.

$[-x\cos x]_0^{\pi} = -\pi\cos\pi - 0 = \pi$.

$\int_0^{\pi}\cos x\,dx = [\sin x]_0^{\pi} = 0$. Donc $I = \pi$.

Réponse. $I = \pi$.

Rappel de cours. IPP : $\int_a^b uv' = [uv]_a^b - \int_a^b u'v$. On choisit u qui se simplifie en dérivant.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).