Calcul intégral — Terminale spécialité

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés

Présentation

L'intégrale $\int_a^b f(x)\,dx$ se calcule avec une primitive F de f : c'est $F(b) - F(a)$. Quand $f \geq 0$, elle représente l'aire sous la courbe entre a et b. Ces exercices corrigés couvrent calcul d'intégrales, aire, valeur moyenne, linéarité, intégration par parties et problèmes type bac. Difficulté croissante, correction d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-specialite/integrales

Exercice 1 – Intégrale d'une constante

Un mobile se déplace à vitesse constante $v(t) = 2$ (en m/s) entre les instants $t = 1$ et $t = 4$ (en secondes). La distance parcourue est donnée par l'intégrale $\int_1^4 2\,dt$.

1. Donner une primitive de la fonction constante $t \mapsto 2$.

2. En déduire la valeur de $\int_1^4 2\,dt$.

Exercice 2 – Intégrale d'un monôme

On considère la fonction identité $f(x) = x$ sur l'intervalle $[0; 2]$. On veut calculer l'intégrale $\int_0^2 x\,dx$, qui correspond à l'aire du triangle sous la droite $y = x$.

1. Déterminer une primitive F de la fonction $f(x) = x$.

2. Calculer $\int_0^2 x\,dx$ à l'aide de $[F(x)]_0^2$.

Exercice 3 – Intégrale d'un polynôme

Soit $f(x) = 3x^2 + 1$, une fonction polynôme du second degré. On souhaite calculer son intégrale sur $[0; 1]$: $\int_0^1 (3x^2 + 1)\,dx$.

1. Donner une primitive F de f en primitivant terme à terme.

2. En déduire la valeur de $\int_0^1 (3x^2 + 1)\,dx$.

Exercice 4 – Relation de Chasles

On sait que $\int_0^2 f(x)\,dx = 5$ et $\int_2^5 f(x)\,dx = -1$. Calculer $\int_0^5 f(x)\,dx$ et $\int_5^0 f(x)\,dx$.

Exercice 5 – Intégrale avec exponentielle

On étudie la fonction exponentielle $f(x) = e^x$, centrale en Terminale. On veut calculer l'aire sous sa courbe entre 0 et 1, c'est-à-dire $\int_0^1 e^x\,dx$.

1. Rappeler une primitive de la fonction $x \mapsto e^x$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

2. Calculer $\int_0^1 e^x\,dx$ et en donner une valeur approchée.

Exercice 6 – Intégrale avec 1/x

On considère la fonction inverse $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$. On veut calculer l'aire sous sa courbe entre $x = 1$ et $x = e$, soit $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx$.

1. Donner une primitive de $\frac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$.

2. En déduire la valeur de $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx$.

Exercice 7 – Linéarité de l'intégrale

Deux fonctions f et g sont telles que $\int_0^1 f = 3$ et $\int_0^1 g = -2$. Sans connaître f ni g, on peut calculer l'intégrale d'une combinaison linéaire grâce à la propriété de linéarité.

1. Énoncer la propriété de linéarité permettant de décomposer $\int_0^1 (2f+g)$.

2. Calculer $\int_0^1 (2f+g)$.

Exercice 8 – Intégrale avec 1/x

Calculer $I = \int_1^e \left(\frac{1}{x} + 2x\right)dx$.

Exercice 9 – Aire sous une courbe

Dans un repère orthonormé, on considère la parabole d'équation $f(x) = x^2$. On veut mesurer l'aire du domaine D compris entre cette courbe, l'axe des abscisses et les droites verticales $x = 0$ et $x = 3$.

1. Justifier que cette aire est égale à $\int_0^3 x^2\,dx$.

2. Calculer cette intégrale et conclure sur l'aire en unités d'aire.

Exercice 10 – Aire entre deux courbes

On considère les courbes des fonctions $f(x) = x$ (une droite) et $g(x) = x^2$ (une parabole) sur l'intervalle $[0;1]$. Ces deux courbes délimitent un domaine dont on cherche l'aire.

1. Déterminer, sur $[0;1]$, laquelle des deux courbes est au-dessus de l'autre.

2. Exprimer l'aire cherchée sous forme d'une intégrale, puis la calculer.

Exercice 11 – Valeur moyenne

On reprend la fonction $f(x) = x^2$ sur l'intervalle $[0;3]$. On veut déterminer sa valeur moyenne μ, c'est-à-dire la hauteur du rectangle de base $[0;3]$ ayant la même aire que le domaine sous la courbe.

1. Écrire la formule donnant la valeur moyenne μ de f sur $[0;3]$.

2. Sachant que $\int_0^3 x^2\,dx = 9$, calculer μ.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 12 – Intégrale par reconnaissance u'/u

On veut calculer $\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx$. Plutôt que de chercher une primitive « à l'aveugle », on reconnaît une forme $\frac{u'}{u}$, dont une primitive est $\ln|u|$.

1. Identifier la fonction u telle que l'intégrande s'écrive $\frac{u'}{u}$, et en déduire une primitive.

2. Calculer $\int_0^1 \frac{2x}{x^2+1}\,dx$.

Exercice 13 – Encadrer une intégrale qu'on ne sait pas calculer

On ne connaît pas de primitive de $x \mapsto e^{x^2}$. Montrer que $1 \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq e$.

Exercice 14 – Type bac : intégration par parties

On veut calculer l'intégrale $\int_0^1 x\,e^x\,dx$. Le produit $x\,e^x$ ne se primitive pas directement : on utilise la technique de l'intégration par parties (IPP).

1. Choisir u et v', puis écrire la formule d'intégration par parties pour cette intégrale.

2. Mener le calcul jusqu'au résultat final.

Exercice 15 – Type bac : IPP avec logarithme

La fonction ln n'a pas de primitive « évidente ». Pour calculer $\int_1^e \ln(x)\,dx$, on utilise une intégration par parties astucieuse en posant $v' = 1$.

1. Poser $u = \ln(x)$ et $v' = 1$, puis écrire la formule d'IPP.

2. Achever le calcul de $\int_1^e \ln(x)\,dx$.

Exercice 16 – Type bac : aire et valeur exacte

On considère la fonction $f(x) = (2-x)e^x$ définie sur $[0;2]$. On admet que $F(x) = (3-x)e^x$ est une primitive de f. On cherche l'aire exacte du domaine situé sous la courbe de f sur cet intervalle.

1. Justifier que $f(x) \geq 0$ sur $[0;2]$, de sorte que l'aire vaut $\int_0^2 f(x)\,dx$.

2. Vérifier que F est bien une primitive de f, puis calculer l'aire.

Exercice 17 – Type bac : intégrale d'un cosinus

On étudie la fonction trigonométrique $f(x) = \cos x$ sur l'intervalle $[0;\frac{\pi}{2}]$. On veut calculer l'aire sous sa courbe, donnée par $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$.

1. Donner une primitive de la fonction cosinus.

2. Calculer $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 18 – Type bac : valeur moyenne d'une exponentielle

On considère la fonction $f(x) = e^x$ sur l'intervalle $[0; 1]$. On souhaite déterminer sa valeur moyenne μ sur cet intervalle.

1. Écrire la formule de la valeur moyenne μ de f sur $[0; 1]$.

2. Calculer μ et en donner une valeur approchée.

Exercice 19 – Type bac : aire, intégration par parties et valeur moyenne

Soit f définie sur $[0; 1]$ par $f(x) = x\,e^x$, de courbe C.

1. Justifier que f est positive et croissante sur $[0; 1]$.

2. Vérifier que $F(x) = (x - 1)e^x$ est une primitive de f sur $[0; 1]$.

3. En déduire l'aire A, en unités d'aire, du domaine compris entre C, l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = 1$.

4. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $J = \int_0^1 x^2 e^x\,dx$.

5. Déterminer la valeur moyenne m de f sur $[0; 1]$.

Exercice 20 – Type bac : intégration par parties avec sinus

Calculer $I = \int_0^{\pi} x \sin x\,dx$ par une intégration par parties.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).