Limites de fonctions — Terminale spécialité

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

Calculer une limite, c'est décrire le comportement d'une fonction quand x tend vers $+\infty$, $-\infty$ ou une valeur interdite. Ces exercices corrigés couvrent tout le programme de Terminale spécialité : limites à l'infini, asymptotes, formes indéterminées (par factorisation du terme dominant), limites par quotient, croissances comparées et théorème des gendarmes. Difficulté croissante, correction détaillée d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-specialite/limites-de-fonctions

Exercice 1 – Limite d'un polynôme en $+\infty$

Déterminer $\lim_{x \to +\infty} \left(x^2 - 5x + 3\right)$.

Exercice 2 – Limite d'un polynôme en $-\infty$

Déterminer $\lim_{x \to -\infty} \left(-2x^3 + x\right)$.

Exercice 3 – Limite faisant intervenir 1/x

Déterminer $\lim_{x \to +\infty} \left(3 + \frac{1}{x}\right)$ et $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x}$.

Exercice 4 – Limites en 0

Déterminer $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x^2} + 3\right)$ et $\lim_{x \to 0^+} \left(-\frac{2}{x}\right)$.

Exercice 5 – Asymptote horizontale

Soit $f(x) = \frac{2x+1}{x}$. Déterminer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et en déduire une asymptote.

Exercice 6 – Asymptote verticale

Soit $f(x) = \frac{1}{x-2}$. Déterminer les limites en 2^+ et 2^-, puis donner l'asymptote verticale.

Exercice 7 – Forme indéterminée $\infty - \infty$

Déterminer $\lim_{x \to +\infty} \left(x^2 - x\right)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 8 – Limite d'un quotient de polynômes

Déterminer $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2+1}{x^2-4}$.

Exercice 9 – Quotients en $-\infty$

Déterminer $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{2x^3-x}{x^3+4}$ et $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{x^2+1}{1-x}$.

Exercice 10 – Quotient avec degrés différents

Déterminer $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{x^2+3}$ et $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3}{x^2+1}$.

Exercice 11 – Limite avec valeur interdite

Déterminer $\lim_{x \to 3} \dfrac{x^2-9}{x-3}$.

Exercice 12 – Croissances comparées

Déterminer $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2}$ et $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x}$.

Exercice 13 – Théorème des gendarmes

Déterminer $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\cos x}{x}$.

Exercice 14 – Limites de fonctions composées

Déterminer $\lim_{x \to +\infty} e^{-x^2+1}$ et $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{4x^2+1}}{x}$.

Exercice 15 – Type bac : asymptote oblique

Soit $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$ pour $x > 0$. 1) Montrer que $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$. 2) En déduire que la droite $y = x$ est asymptote oblique en $+\infty$.

Exercice 16 – Type bac : forme indéterminée avec exponentielle

Déterminer $\lim_{x \to +\infty} (e^x - x)$ puis $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^x-1}{x}$.

Exercice 17 – Type bac : limite par quantité conjuguée

Déterminer $\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$.

Exercice 18 – Type bac : asymptote horizontale

Soit $f(x) = \dfrac{3x-1}{x+2}$. Déterminer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et en déduire une asymptote.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 19 – Type bac : étude complète d'une fonction homographique

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3}{x + 1}$. On note C sa courbe représentative et D la droite d'équation $y = 2x - 2$.

1. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. Vérifier que pour tout $x \neq -1$, $f(x) = 2x - 2 + \dfrac{5}{x + 1}$.

3. En déduire les limites de f en -1 à gauche et à droite, et interpréter graphiquement.

4. Démontrer que D est asymptote oblique à C en $+\infty$ et en $-\infty$.

5. Étudier la position relative de C et de D.

Exercice 20 – Type bac : limites et nombre dérivé

En reconnaissant des taux d'accroissement, déterminer $\lim_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x - 1}$ et $\lim_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Limite d'un polynôme en +∞

À l'infini, un polynôme a la même limite que son terme de plus haut degré : ici x^2.

$\lim_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$, donc la limite cherchée vaut $+\infty$.

Réponse. $\lim_{x \to +\infty} \left(x^2 - 5x + 3\right) = +\infty$.

Rappel de cours. En $\pm\infty$, un polynôme se comporte comme son terme dominant (degré le plus élevé).

Erreur fréquente. On n'écrit pas « $+\infty - \infty$ ». Le terme dominant tranche directement : pas de forme indéterminée ici.

Correction de l'exercice 2 – Limite d'un polynôme en −∞

Terme dominant : $-2x^3$.

$\lim_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$, donc $-2x^3 \to -2 \times (-\infty) = +\infty$.

Réponse. $\lim_{x \to -\infty} \left(-2x^3 + x\right) = +\infty$.

Rappel de cours. $x^3 \to -\infty$ en $-\infty$ (puissance impaire). Le facteur -2 change ensuite le signe.

Correction de l'exercice 3 – Limite faisant intervenir 1/x

En $+\infty$, $\frac{1}{x} \to 0$, donc $3 + \frac{1}{x} \to 3 + 0 = 3$.

En 0^+ ($x > 0$ tend vers 0), $\frac{1}{x} \to +\infty$.

Réponse. $\lim_{x \to +\infty} \left(3 + \frac{1}{x}\right) = 3$; $\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$.

Rappel de cours. Limites de référence : $\frac{1}{x} \to 0$ en $\pm\infty$; $\frac{1}{x} \to +\infty$ en 0^+ et $\to -\infty$ en 0^-.

Correction de l'exercice 4 – Limites en 0

Quand $x \to 0$, $x^2 \to 0^+$ (un carré est positif), donc $\frac{1}{x^2} \to +\infty$ et la somme tend vers $+\infty$.

Quand $x \to 0^+$, $\frac{1}{x} \to +\infty$, donc $-\frac{2}{x} \to -\infty$.

Réponse. $+\infty$ et $-\infty$.

Rappel de cours. $\frac{1}{x}$ a des limites différentes à droite et à gauche de 0, alors que $\frac{1}{x^2} \to +\infty$ des deux côtés.

Correction de l'exercice 5 – Asymptote horizontale

On simplifie : $f(x) = \frac{2x}{x} + \frac{1}{x} = 2 + \frac{1}{x}$.

En $+\infty$, $\frac{1}{x} \to 0$, donc $f(x) \to 2$.

La droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale à la courbe en $+\infty$.

Réponse. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 2$; asymptote horizontale $y = 2$.

Rappel de cours. Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$ (réel), la droite $y = \ell$ est asymptote horizontale en

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$+\infty$.

Correction de l'exercice 6 – Asymptote verticale

Quand $x \to 2^+$, $x-2 \to 0^+$ (positif), donc $\dfrac{1}{x-2} \to +\infty$.

Quand $x \to 2^-$, $x-2 \to 0^-$ (négatif), donc $\dfrac{1}{x-2} \to -\infty$.

La droite $x = 2$ est asymptote verticale.

Réponse. $\lim_{x \to 2^+} f = +\infty$, $\lim_{x \to 2^-} f = -\infty$; asymptote verticale $x = 2$.

Rappel de cours. Une limite infinie en une valeur a signale une asymptote verticale $x = a$. Étudier le signe du dénominateur de part et d'autre.

Erreur fréquente. Bien distinguer 2^+ et 2^- : le signe de $x-2$ change, donc la limite aussi ($+\infty$ d'un côté, $-\infty$ de l'autre).

Correction de l'exercice 7 – Forme indéterminée $\infty - \infty$

On a une forme indéterminée « $+\infty - \infty$ ». On factorise par le terme dominant x^2.

$x^2 - x = x^2\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)$.

En $+\infty$, $x^2 \to +\infty$ et $1 - \dfrac{1}{x} \to 1$, donc le produit tend vers $+\infty$.

Réponse. $\lim_{x \to +\infty} \left(x^2 - x\right) = +\infty$.

Rappel de cours. Face à $\infty - \infty$, on factorise par le terme de plus haut degré pour lever l'indétermination.

Correction de l'exercice 8 – Limite d'un quotient de polynômes

Forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$. On factorise haut et bas par le terme dominant x^2.

$$\frac{3x^2+1}{x^2-4} = \frac{x^2\left(3 + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1 - \frac{4}{x^2}\right)} = \frac{3 + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{4}{x^2}}.$$

En $+\infty$, $\dfrac{1}{x^2} \to 0$ et $\dfrac{4}{x^2} \to 0$, donc la limite vaut $\dfrac{3}{1} = 3$.

Réponse. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{3x^2+1}{x^2-4} = 3$.

Rappel de cours. Pour un quotient de polynômes en $\pm\infty$, la limite est celle du quotient des termes dominants (ici $\dfrac{3x^2}{x^2} = 3$).

Correction de l'exercice 9 – Quotients en $-\infty$

On factorise par les termes de plus haut degré : $\dfrac{x^3\left(2 - \frac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(1 + \frac{4}{x^3}\right)} = \dfrac{2 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{4}{x^3}} \to \dfrac{2}{1} = 2$.

$\dfrac{x^2\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)}{x\left(\frac{1}{x} - 1\right)} = x \times \dfrac{1 + \frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x} - 1}$. La fraction tend vers $\dfrac{1}{-1} = -1$ et $x \to -\infty$: le produit tend vers $+\infty$.

Réponse. 2 et $+\infty$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Rappel de cours. En l'infini, une fraction rationnelle a la même limite que le quotient de ses termes de plus haut degré.

Correction de l'exercice 10 – Quotient avec degrés différents

Premier quotient : termes dominants $\frac{x}{x^2} = \frac{1}{x} \to 0$. Donc la limite vaut 0.

Second quotient : termes dominants $\frac{2x^3}{x^2} = 2x \to +\infty$. Donc la limite vaut $+\infty$.

Réponse. $\frac{x+1}{x^2+3} \to 0$; $\frac{2x^3}{x^2+1} \to +\infty$.

Rappel de cours. Quotient des termes dominants : si le degré du bas l'emporte, la limite est 0 ; si c'est le haut, elle est infinie.

Correction de l'exercice 11 – Limite avec valeur interdite

En $x = 3$, numérateur et dénominateur s'annulent : forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

On factorise le numérateur : $x^2 - 9 = (x-3)(x+3)$.

Donc $\frac{x^2-9}{x-3} = \frac{(x-3)(x+3)}{x-3} = x+3$ (pour $x \neq 3$).

Quand $x \to 3$, $x+3 \to 6$.

Réponse. $\lim_{x \to 3} \frac{x^2-9}{x-3} = 6$.

Rappel de cours. Pour une forme $\frac{0}{0}$, on factorise pour simplifier le facteur qui s'annule (ici $x-3$).

Correction de l'exercice 12 – Croissances comparées

$\frac{e^x}{x^2}$: forme $\frac{\infty}{\infty}$. Par croissance comparée, l'exponentielle l'emporte sur toute puissance : $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty$.

$\frac{\ln(x)}{x}$: par croissance comparée, x l'emporte sur $\ln(x)$: $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

Réponse. $\frac{e^x}{x^2} \to +\infty$; $\frac{\ln(x)}{x} \to 0$.

Rappel de cours. Croissances comparées : $\frac{e^x}{x^n} \to +\infty$ et $\frac{\ln(x)}{x} \to 0$ en $+\infty$. « L'exponentielle l'emporte, le logarithme se fait dominer. »

Correction de l'exercice 13 – Théorème des gendarmes

Pour tout x, $-1 \leq \cos x \leq 1$. En divisant par $x > 0$: $-\frac{1}{x} \leq \frac{\cos x}{x} \leq \frac{1}{x}$.

Or $-\frac{1}{x} \to 0$ et $\frac{1}{x} \to 0$ en $+\infty$.

D'après le théorème des gendarmes (encadrement), $\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$.

Réponse. $\lim_{x \to +\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$.

Rappel de cours. Théorème des gendarmes : si $u \leq f \leq v$ avec u et v de même limite ℓ, alors $f \to \ell$. Utile dès qu'apparaît cos ou sin.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 14 – Limites de fonctions composées

$-x^2+1 \to -\infty$ et $\lim_{X\to-\infty} e^X = 0$: par composition, la limite est 0.

Pour $x>0$, $\sqrt{4x^2+1} = \sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x^2}\right)} = x\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}$ (car $\sqrt{x^2}=x$ pour $x>0$).

Donc $\dfrac{\sqrt{4x^2+1}}{x} = \sqrt{4+\frac{1}{x^2}} \to \sqrt{4} = 2$.

Réponse. 0 et 2.

Rappel de cours. Composition : si $u(x)\to a$ et $g(X)\to b$ quand $X\to a$, alors $g(u(x))\to b$.

Erreur fréquente. $\sqrt{x^2}=|x|$: en $-\infty$, on obtiendrait -2.

Correction de l'exercice 15 – Type bac : asymptote oblique

$f(x) = \dfrac{x^2+1}{x} = \dfrac{x^2}{x}+\dfrac{1}{x} = x+\dfrac{1}{x}$.

On étudie $f(x)-x = \dfrac{1}{x}$. En $+\infty$, $\dfrac{1}{x}\to 0$.

Comme $f(x)-x\to 0$, la droite $y=x$ est asymptote oblique à la courbe en $+\infty$.

Réponse. $f(x) = x+\dfrac{1}{x}$; $f(x)-x=\dfrac{1}{x}\to 0$, donc $y=x$ est asymptote oblique.

Rappel de cours. La droite $y=ax+b$ est asymptote oblique en $+\infty$ si $f(x)-(ax+b)\to 0$.

Correction de l'exercice 16 – Type bac : forme indéterminée avec exponentielle

$e^x - x$: forme $\infty-\infty$. On factorise par e^x : $e^x - x = e^x\left(1-\dfrac{x}{e^x}\right)$.

Or $\dfrac{x}{e^x}\to 0$ (croissance comparée), donc $1-\dfrac{x}{e^x}\to 1$ et $e^x\to+\infty$: le produit tend vers $+\infty$.

$\dfrac{e^x-1}{x} = \dfrac{e^x}{x}-\dfrac{1}{x}$. En $+\infty$, $\dfrac{e^x}{x}\to+\infty$ et $\dfrac{1}{x}\to 0$, donc la limite vaut $+\infty$.

Réponse. $e^x-x\to+\infty$; $\dfrac{e^x-1}{x}\to+\infty$.

Rappel de cours. Face à une indétermination avec e^x, factoriser par e^x et utiliser $\dfrac{x}{e^x}\to 0$.

Correction de l'exercice 17 – Type bac : limite par quantité conjuguée

Forme indéterminée $\infty-\infty$. On multiplie et divise par la quantité conjuguée $\sqrt{x^2+1}+x$.

$$\sqrt{x^2+1}-x = \frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{(x^2+1)-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}.$$

En $+\infty$, le dénominateur tend vers $+\infty$, donc le quotient tend vers 0.

Réponse. $\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=0$.

Rappel de cours. Astuce de la quantité conjuguée : multiplier par $\dfrac{\sqrt{A}+B}{\sqrt{A}+B}$ pour faire disparaître la racine grâce à $(\sqrt{A})^2=A$.

Erreur fréquente. Conclure « $\sqrt{x^2+1}\approx x$ donc la différence vaut 0 » sans justification ne suffit pas au bac : la quantité conjuguée est la méthode rigoureuse attendue.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 18 – Type bac : asymptote horizontale

On factorise haut et bas par x : $f(x) = \dfrac{x(3-\frac{1}{x})}{x(1+\frac{2}{x})} = \dfrac{3-\frac{1}{x}}{1+\frac{2}{x}}$.

En $+\infty$, $\frac{1}{x} \to 0$ et $\frac{2}{x} \to 0$, donc $f(x) \to \dfrac{3}{1} = 3$.

La droite $y = 3$ est asymptote horizontale en $+\infty$.

Réponse. $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$; asymptote horizontale $y = 3$.

Rappel de cours. Quotient de polynômes de même degré : la limite est le quotient des coefficients dominants.

Correction de l'exercice 19 – Type bac : étude complète d'une fonction homographique

Le numérateur est de degré 2, le dénominateur de degré 1 : le quotient se comporte comme $\dfrac{2x^2}{x} = 2x$. En $+\infty$, $f(x) \to +\infty$; en $-\infty$, $f(x) \to -\infty$.

On réduit au même dénominateur :
$2x - 2 + \dfrac{5}{x+1} = \dfrac{(2x-2)(x+1)+5}{x+1} = \dfrac{2x^2-2+5}{x+1} = \dfrac{2x^2+3}{x+1} = f(x)$.

Quand $x \to -1$, $2x - 2 \to -4$. Pour $x \to -1^+$, $x + 1 \to 0^+$ donc $\dfrac{5}{x+1} \to +\infty$ et $f(x) \to +\infty$; pour $x \to -1^-$, $\dfrac{5}{x+1} \to -\infty$ et $f(x) \to -\infty$. La droite $x = -1$ est asymptote verticale à C.

$f(x) - (2x-2) = \dfrac{5}{x+1} \to 0$ quand $x \to +\infty$ et $x \to -\infty$. Donc D: $y = 2x - 2$ est asymptote oblique à C en $+\infty$ et en $-\infty$.

Le signe de $f(x) - (2x-2) = \dfrac{5}{x+1}$ est celui de $x + 1$: pour $x > -1$, il est positif et C est au-dessus de D ; pour $x < -1$, il est négatif et C est en dessous de D.

Réponse. $\lim_{+\infty} f = +\infty$, $\lim_{-\infty} f = -\infty$; asymptote verticale $x = -1$; asymptote oblique $y = 2x - 2$; C au-dessus de D pour $x > -1$, en dessous pour $x < -1$.

Rappel de cours. Écrire un quotient sous la forme « partie affine + reste $\to 0$ » donne directement l'asymptote oblique et la position relative.

Erreur fréquente. Une asymptote oblique ne se déduit pas de $f(x) \to \pm\infty$: il faut montrer que $f(x) - (ax + b) \to 0$.

Correction de l'exercice 20 – Type bac : limites et nombre dérivé

Ce sont des formes « $\frac{0}{0}$ ». On reconnaît $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Avec $f = \ln$ et $a = 1$: $\dfrac{\ln x - \ln 1}{x-1} \to f'(1) = \dfrac{1}{1} = 1$.

Avec $g = \exp$ et $a = 0$: $\dfrac{e^x - e^0}{x-0} \to g'(0) = e^0 = 1$.

Réponse. Les deux limites valent 1.

Rappel de cours. Si f est dérivable en a, $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).