Limites de suites — Terminale spécialité

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

Une suite peut converger (tendre vers un nombre fini) ou diverger (tendre vers $\pm\infty$ ou n'avoir aucune limite). Ces exercices corrigés couvrent les limites de référence, les limites de suites géométriques (q^n), les formes indéterminées, le théorème des gendarmes, le théorème de comparaison et le théorème de la limite monotone. Difficulté croissante, correction d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-specialite/limites-de-suites

Exercice 1 – Limites de référence

Déterminer $\lim_{n\to+\infty} n^2$, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}$ et $\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n}$.

Exercice 2 – Limite d'une suite géométrique (1)

Déterminer $\lim_{n\to+\infty} 2^n$ et $\lim_{n\to+\infty} 0{,}5^n$.

Exercice 3 – Limite et suite alternée

Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \left(5 - \frac{3}{n^2}\right)$ et $\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.

Exercice 4 – Limite d'une suite géométrique (2)

Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n$ et $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{2}\right)^n$.

Exercice 5 – Somme/différence de limites

Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \left(3 + \frac{2}{n}\right)$ et $\lim_{n\to+\infty} \left(n^2 + \frac{1}{n}\right)$.

Exercice 6 – Forme indéterminée (polynôme)

Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \left(n^2 - 3n\right)$.

Exercice 7 – Raison négative

Étudier la limite de $(-0{,}5)^n$ et de $(-2)^n$.

Exercice 8 – Forme indéterminée (quotient)

Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \frac{2n+1}{n+3}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Avec une suite géométrique au quotient

Déterminer $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{2^n + 1}{2^n}$.

Exercice 10 – Théorème des gendarmes

Déterminer $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{\sin n}{n}$.

Exercice 11 – Théorème de comparaison

Soit (u_n) telle que $u_n \geq n^2 - 5$ pour tout n. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 12 – Limite et croissance comparée

Déterminer $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{n}{2^n}$.

Exercice 13 – Différence de deux suites géométriques

Déterminer $\lim_{n \to +\infty} \left(3^n - 2^n\right)$.

Exercice 14 – Type bac : convergence par limite monotone

Soit (u_n) croissante et majorée par 10. Que peut-on affirmer sur sa convergence ? Et si une suite est croissante mais non majorée ?

Exercice 15 – Type bac : suite récurrente et point fixe

Soit (u_n) avec $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$. On admet qu'elle converge vers un réel ℓ. Déterminer ℓ.

Exercice 16 – Type bac : forme indéterminée avec conjuguée

Déterminer $\lim_{n \to +\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$.

Exercice 17 – Type bac : limite d'un quotient en n²

Déterminer $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{n^2 + 1}{2n^2 - 3}$.

Exercice 18 – Type bac : suite récurrente et point fixe

Soit (u_n) avec $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = 0{,}5\,u_n + 2$. On admet qu'elle converge vers ℓ. Déterminer ℓ.

Exercice 19 – Type bac : limites par q ⁿ, encadrement et seuil

On considère les suites définies pour $n \geq 0$ par $u_n = 2 + 3 \times 0{,}5^n$ et $v_n = \dfrac{\cos(n)}{n+1}$.

1. Déterminer la limite de (u_n) et justifier.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

2. Étudier le sens de variation de (u_n).

3. Montrer que pour tout n, $-\dfrac{1}{n+1} \leq v_n \leq \dfrac{1}{n+1}$, puis en déduire la limite de (v_n).

4. En déduire la limite de la suite (w_n) définie par $w_n = u_n + v_n$.

5. Déterminer le plus petit entier n tel que $|u_n - 2| < 10^{-2}$.

Exercice 20 – Type bac : une somme télescopique

Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = \dfrac{1}{1\times 2} + \dfrac{1}{2\times 3} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)}$.

1. Vérifier que $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$.

2. En déduire une expression simple de S_n.

3. Déterminer la limite de (S_n).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Limites de référence

$\lim_{n \to +\infty} n^2 = +\infty$ (la suite croît sans limite).

$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ (l'inverse d'un nombre de plus en plus grand tend vers 0).

$\lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

Réponse. $n^2 \to +\infty$; $\frac{1}{n} \to 0$; $\sqrt{n} \to +\infty$.

Rappel de cours. Limites de référence : n, n^2, n^3, $\sqrt{n} \to +\infty$; $\frac{1}{n}$, $\frac{1}{n^2} \to 0$.

Correction de l'exercice 2 – Limite d'une suite géométrique (1)

$q = 2 > 1$: $\lim_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$.

$q = 0{,}5$ avec $-1 < 0{,}5 < 1$: $\lim_{n \to +\infty} 0{,}5^n = 0$.

Réponse. $2^n \to +\infty$; $0{,}5^n \to 0$.

Rappel de cours. Pour q^n : si $q > 1$, $\to +\infty$; si $-1 < q < 1$, $\to 0$; si $q = 1$, $\to 1$; si $q \leq -1$, pas de limite.

Correction de l'exercice 3 – Limite et suite alternée

$\frac{3}{n^2} \to 0$, donc $5 - \frac{3}{n^2} \to 5$.

$-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$, et les deux bornes tendent vers 0. Par le théorème des gendarmes, la limite est 0.

Réponse. 5 et 0.

Rappel de cours. Théorème des gendarmes : si $v_n \leq u_n \leq w_n$ avec v_n et w_n de même limite ℓ, alors $u_n \to \ell$.

Correction de l'exercice 4 – Limite d'une suite géométrique (2)

$\frac{3}{4} = 0{,}75$ avec $-1 < 0{,}75 < 1$: la limite est 0.

$\frac{5}{2} = 2{,}5 > 1$: la limite est $+\infty$.

Réponse. $\left(\frac{3}{4}\right)^n \to 0$; $\left(\frac{5}{2}\right)^n \to +\infty$.

Rappel de cours. On compare la raison à 1 : une fraction < 1 donne 0, une fraction > 1 donne $+\infty$.

Correction de l'exercice 5 – Somme/différence de limites

$\frac{2}{n} \to 0$, donc $3 + \frac{2}{n} \to 3$.

$n^2 \to +\infty$ et $\frac{1}{n} \to 0$, donc la somme $\to +\infty$.

Réponse. $3 + \frac{2}{n} \to 3$; $n^2 + \frac{1}{n} \to +\infty$.

Rappel de cours. On combine les limites terme à terme, sauf en cas de forme indéterminée ($\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \times \infty$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 6 – Forme indéterminée (polynôme)

Forme indéterminée $\infty - \infty$. On factorise par le terme dominant n^2.

$n^2 - 3n = n^2\left(1 - \frac{3}{n}\right)$.

$n^2 \to +\infty$ et $1 - \frac{3}{n} \to 1$, donc le produit $\to +\infty$.

Réponse. $\lim_{n \to +\infty} \left(n^2 - 3n\right) = +\infty$.

Rappel de cours. Comme pour les fonctions : face à $\infty - \infty$, on factorise par le terme dominant.

Correction de l'exercice 7 – Raison négative

$|-0{,}5| < 1$: $(-0{,}5)^n \to 0$ (les termes alternent de signe mais leur valeur absolue $0{,}5^n$ tend vers 0).

$(-2)^n$ vaut 2^n pour n pair et -2^n pour n impair : elle prend des valeurs aussi grandes qu'on veut, positives et négatives. Elle n'a pas de limite.

Réponse. $(-0{,}5)^n \to 0$; $(-2)^n$ n'a pas de limite.

Rappel de cours. $q^n \to 0$ si $-1 < q < 1$; $q^n \to +\infty$ si $q > 1$; pas de limite si $q \leq -1$.

Correction de l'exercice 8 – Forme indéterminée (quotient)

Forme $\frac{\infty}{\infty}$. On factorise haut et bas par n.

$$\frac{2n+1}{n+3} = \frac{n\left(2 + \frac{1}{n}\right)}{n\left(1 + \frac{3}{n}\right)} = \frac{2 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{3}{n}}.$$

$\frac{1}{n} \to 0$ et $\frac{3}{n} \to 0$, donc la limite vaut $\frac{2}{1} = 2$.

Réponse. $\lim_{n \to +\infty} \frac{2n+1}{n+3} = 2$.

Rappel de cours. Quotient de polynômes en n : la limite est le quotient des termes dominants (ici $\frac{2n}{n} = 2$).

Correction de l'exercice 9 – Avec une suite géométrique au quotient

On sépare : $\frac{2^n + 1}{2^n} = \frac{2^n}{2^n} + \frac{1}{2^n} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

$\left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$, donc la limite vaut $1 + 0 = 1$.

Réponse. $\lim_{n \to +\infty} \frac{2^n + 1}{2^n} = 1$.

Rappel de cours. $\frac{1}{2^n} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \to 0$. Séparer la fraction simplifie souvent le calcul.

Correction de l'exercice 10 – Théorème des gendarmes

Pour tout n, $-1 \leq \sin n \leq 1$. En divisant par $n > 0$: $-\frac{1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$.

$-\frac{1}{n} \to 0$ et $\frac{1}{n} \to 0$.

Par le théorème des gendarmes, $\lim_{n \to +\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{\sin n}{n} = 0$.

Rappel de cours. Théorème des gendarmes : si $a_n \leq u_n \leq b_n$ avec a_n et $b_n \to \ell$, alors $u_n \to \ell$. Utile avec sin, cos, $(-1)^n$.

Correction de l'exercice 11 – Théorème de comparaison

$n^2 - 5 \to +\infty$ quand $n \to +\infty$.

Or $u_n \geq n^2 - 5$: la suite (u_n) est minorée par une suite qui tend vers $+\infty$.

Par le théorème de comparaison, $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Réponse. $\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Rappel de cours. Comparaison : si $u_n \geq v_n$ et $v_n \to +\infty$, alors $u_n \to +\infty$ (et symétriquement vers $-\infty$ avec $\leq$).

Correction de l'exercice 12 – Limite et croissance comparée

On compare la croissance de n (polynomiale) et de 2^n (exponentielle).

L'exponentielle l'emporte sur toute puissance de n : $\dfrac{n}{2^n} \to 0$.

Réponse. $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{n}{2^n} = 0$.

Rappel de cours. Croissance comparée version suites : $\dfrac{n^k}{q^n} \to 0$ si $q > 1$. « L'exponentielle écrase le polynôme. »

Correction de l'exercice 13 – Différence de deux suites géométriques

Forme $\infty - \infty$. On factorise par le terme dominant : $3^n - 2^n = 3^n\left(1 - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n\right)$.

$\left(\dfrac{2}{3}\right)^n \to 0$, donc la parenthèse tend vers 1 ; $3^n \to +\infty$.

Par produit, la limite est $+\infty$.

Réponse. $\lim_{n \to +\infty} (3^n - 2^n) = +\infty$.

Rappel de cours. Face à une forme indéterminée, on factorise par le terme qui « l'emporte ».

Correction de l'exercice 14 – Type bac : convergence par limite monotone

Le théorème de la limite monotone affirme : toute suite croissante et majorée converge (vers un réel $\ell \leq 10$).

Donc (u_n) converge.

En revanche, une suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$ (elle diverge).

Réponse. Croissante + majorée ⇒ converge ; croissante + non majorée ⇒ $+\infty$.

Rappel de cours. Théorème de la limite monotone : croissante majorée ⇒ converge ; décroissante minorée ⇒ converge.

Erreur fréquente. Le théorème donne la convergence, mais pas la valeur de la limite : il ne dit pas que $\ell = 10$, seulement $\ell \leq 10$.

Correction de l'exercice 15 – Type bac : suite récurrente et point fixe

Si $u_n \to \ell$, alors $u_{n+1} \to \ell$ aussi. Par continuité de la fonction racine, l'égalité

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$ « passe à la limite » : $\ell = \sqrt{\ell + 2}$.

On élève au carré ($\ell \geq 0$) : $\ell^2 = \ell + 2$, soit $\ell^2 - \ell - 2 = 0$.

$\Delta = 1 + 8 = 9$, $\ell = \dfrac{1 \pm 3}{2}$: $\ell = 2$ ou $\ell = -1$. Comme $\ell \geq 0$, on garde $\ell = 2$.

Réponse. $\ell = 2$.

Rappel de cours. La limite ℓ d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$ (avec f continue) vérifie l'équation de point fixe $\ell = f(\ell)$.

Erreur fréquente. On élimine la solution $\ell = -1$ car les termes vérifient $u_n \geq 0$: la limite ne peut pas être négative.

Correction de l'exercice 16 – Type bac : forme indéterminée avec conjuguée

Forme $\infty - \infty$. On multiplie par la quantité conjuguée $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$.

$\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{(n+1) - n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$.

Le dénominateur $\to +\infty$, donc le quotient $\to 0$.

Réponse. $\lim_{n \to +\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = 0$.

Rappel de cours. Quantité conjuguée : $(\sqrt{a} - \sqrt{b})\dfrac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \dfrac{a - b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$. Élimine la différence de racines.

Correction de l'exercice 17 – Type bac : limite d'un quotient en n²

Forme $\frac{\infty}{\infty}$. On factorise par n^2 : $\dfrac{n^2(1 + \frac{1}{n^2})}{n^2(2 - \frac{3}{n^2})} = \dfrac{1 + \frac{1}{n^2}}{2 - \frac{3}{n^2}}$.

$\frac{1}{n^2} \to 0$ et $\frac{3}{n^2} \to 0$, donc la limite vaut $\frac{1}{2}$.

Réponse. $\lim_{n \to +\infty} \dfrac{n^2 + 1}{2n^2 - 3} = \dfrac{1}{2}$.

Rappel de cours. Quotient de polynômes en n : limite = quotient des termes dominants.

Correction de l'exercice 18 – Type bac : suite récurrente et point fixe

Si $u_n \to \ell$, alors $u_{n+1} \to \ell$ aussi. En passant à la limite : $\ell = 0{,}5\,\ell + 2$.

$\ell - 0{,}5\,\ell = 2$, soit $0{,}5\,\ell = 2$, donc $\ell = 4$.

Réponse. $\ell = 4$.

Rappel de cours. La limite d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$ (f continue) vérifie $\ell = f(\ell)$.

Correction de l'exercice 19 – Type bac : limites par q ⁿ, encadrement et seuil

$0 < 0{,}5 < 1$ donc $0{,}5^n \to 0$, d'où $u_n = 2 + 3 \times 0{,}5^n \to 2$.

$u_{n+1} - u_n = 3(0{,}5^{n+1} - 0{,}5^n) = 3 \times 0{,}5^n(0{,}5 - 1) = -1{,}5 \times 0{,}5^n < 0$: (u_n) est strictement décroissante.

Pour tout réel, $-1 \leq \cos(n) \leq 1$; en divisant par $n + 1 > 0$, $-\frac{1}{n+1} \leq v_n \leq \frac{1}{n+1}$. Or $\pm\frac{1}{n+1} \to 0$: par le théorème des gendarmes, $v_n \to 0$.

Par somme des limites, $w_n = u_n + v_n \to 2 + 0 = 2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$|u_n - 2| = 3 \times 0{,}5^n < 10^{-2} \Leftrightarrow 0{,}5^n < \dfrac{1}{300} \Leftrightarrow n > \dfrac{\ln(1/300)}{\ln(0{,}5)} \approx 8{,}23$. Le plus petit entier est $n = 9$.

Réponse. $u_n \to 2$ (décroissante) ; $v_n \to 0$ (gendarmes) ; $w_n \to 2$; $|u_n - 2| < 10^{-2}$ dès $n = 9$.

Rappel de cours. $q^n \to 0$ si $|q| < 1$; un terme borné divisé par $n+1$ tend vers 0 par encadrement (gendarmes).

Correction de l'exercice 20 – Type bac : une somme télescopique

1) $\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1} = \dfrac{(k+1)-k}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k(k+1)}$.

2) $S_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$. Les termes intermédiaires s'annulent deux à deux : $S_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$.

3) $\dfrac{1}{n+1} \to 0$, donc $S_n \to 1$.

Réponse. $S_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$, qui tend vers 1.

Rappel de cours. Somme télescopique : chaque terme annule une partie du suivant, il ne reste que le premier et le dernier morceau.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).