Variables aléatoires et loi binomiale — Terminale spécialité

40 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

Une variable aléatoire X associe un nombre à chaque issue d'une expérience ; de sa loi on déduit l'espérance $E(X)$, la variance $V(X)$ et l'écart-type. La loi binomiale $B(n, p)$ compte le nombre de succès lors de n répétitions indépendantes d'une épreuve de Bernoulli de probabilité de succès p. Sa formule clé est $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Ces exercices corrigés couvrent loi de probabilité, espérance, variance (König-Huygens), transformations affines, jeux équitables, puis coefficients binomiaux, probabilités binomiales, espérance et écart-type de $B(n, p)$, probabilités cumulées et problèmes type bac. Difficulté croissante, correction d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-specialite/loi-binomiale

Exercice 1 – Coefficients binomiaux

Calculer $\binom{5}{0}$, $\binom{5}{1}$, $\binom{5}{5}$ et $\binom{5}{2}$.

Exercice 2 – Reconnaître une loi binomiale

On lance 10 fois un dé équilibré et on compte le nombre X de « 6 » obtenus. Justifier que X suit une loi binomiale et donner ses paramètres.

Exercice 3 – Répondre au hasard à un QCM

Un QCM comporte 10 questions indépendantes, chacune avec 4 réponses dont une seule juste. Un élève répond au hasard. X est le nombre de bonnes réponses. Justifier la loi de X et calculer $E(X)$.

Exercice 4 – Vérifier une loi de probabilité

Une variable X prend les valeurs $1, 2, 3$ avec $P(X = 1) = 0{,}2$, $P(X = 2) = 0{,}5$, $P(X = 3) = p$. Déterminer p.

Exercice 5 – Calculer une espérance

Avec $P(X = 1) = 0{,}2$, $P(X = 2) = 0{,}5$, $P(X = 3) = 0{,}3$, calculer $E(X)$.

Exercice 6 – Interpréter l'espérance

À un jeu, le gain X (en €) vaut $+5$ avec proba 0,3 et -2 avec proba 0,7. Calculer $E(X)$ et dire si le jeu est favorable au joueur.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 7 – Loi uniforme

On tire au hasard un jeton numéroté parmi 1, 2, 3, 4. X est le numéro obtenu. Donner la loi de X et son espérance.

Exercice 8 – Calcul direct P(X=k)

Soit $X \sim B(4\,;0{,}5)$. Calculer $P(X = 2)$.

Exercice 9 – Probabilité d'aucun succès

Soit $X \sim B(5\,;0{,}2)$. Calculer $P(X = 0)$.

Exercice 10 – Espérance et écart-type

Soit $X \sim B(20\,;0{,}3)$. Calculer l'espérance $E(X)$, la variance $V(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$.

Exercice 11 – Calcul direct avec un coefficient binomial

Soit $X \sim B(6\,;0{,}5)$. Calculer $P(X = 3)$.

Exercice 12 – Construire une loi

On lance deux pièces équilibrées. Soit X le nombre de « Pile ». Donner la loi de probabilité de X.

Exercice 13 – Espérance d'un jeu

Avec la loi de X (nombre de Pile sur 2 lancers), calculer $E(X)$.

Exercice 14 – Variance par la définition

Avec $P(X = 1) = 0{,}2$, $P(X = 2) = 0{,}5$, $P(X = 3) = 0{,}3$ et $E(X) = 2{,}1$, calculer $V(X)$ par la définition.

Exercice 15 – Au moins un succès

Soit $X \sim B(8\,;0{,}25)$. Calculer $P(X \geq 1)$.

Exercice 16 – Probabilité cumulée P(X ≤ k)

Soit $X \sim B(3\,;0{,}4)$. Calculer $P(X \leq 1)$.

Exercice 17 – Intervalle de valeurs

Soit $X \sim B(3\,;0{,}4)$. Calculer $P(1 \leq X \leq 2)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 18 – Au moins deux succès

Soit $X \sim B(10\,;0{,}5)$. Exprimer $P(X \geq 2)$ à l'aide de $P(X = 0)$ et $P(X = 1)$, puis calculer.

Exercice 19 – Avoir la moyenne au hasard ?

Un QCM comporte 10 questions à 4 réponses dont une seule juste, et un élève répond au hasard : le nombre X de bonnes réponses suit $B(10\,;0{,}25)$. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 5 bonnes réponses ?

Exercice 20 – Variance par König-Huygens

Avec $P(X = 1) = 0{,}2$, $P(X = 2) = 0{,}5$, $P(X = 3) = 0{,}3$ et $E(X) = 2{,}1$, calculer $V(X)$ par la formule de König-Huygens.

Exercice 21 – Écart-type

Sachant $V(X) = 0{,}49$, calculer l'écart-type $\sigma(X)$.

Exercice 22 – Transformation affine de l'espérance

On pose $Y = 2X + 3$ avec $E(X) = 2{,}1$ et $V(X) = 0{,}49$. Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.

Exercice 23 – Espérance d'un gain net

Un jeu coûte 3 € pour jouer. On gagne 10 € avec proba 0,25 et 0 € sinon. Soit G le gain net (gain − mise). Calculer $E(G)$.

Exercice 24 – Somme de deux variables indépendantes

X et Y sont indépendantes avec $E(X) = 2$, $V(X) = 1$, $E(Y) = 3$, $V(Y) = 4$. Calculer $E(X + Y)$, $V(X + Y)$ et $\sigma(X + Y)$.

Exercice 25 – Moyenne d'un échantillon

La masse (en g) d'une pomme est une variable aléatoire d'espérance 150 et de variance 400. On prend 25 pommes indépendantes et on note M leur masse moyenne. Calculer $E(M)$, $V(M)$ et $\sigma(M)$.

Exercice 26 – Type bac : contrôle qualité

Dans une production, 5% des pièces sont défectueuses. On prélève 20 pièces (assimilé à un tirage indépendant). Soit X le nombre de pièces défectueuses. 1) Justifier la loi de X. 2) Calculer la probabilité qu'il y ait exactement 1 pièce défectueuse. 3) Calculer la probabilité qu'il y en ait au moins une.

Exercice 27 – Type bac : valeur la plus probable

Soit $X \sim B(5\,;0{,}6)$. Calculer $P(X = 2)$ et $P(X = 3)$, puis dire quelle valeur de X est la plus probable parmi $\{2, 3\}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 28 – Type bac : seuil de répétitions

Une opération réussit avec probabilité $p = 0{,}3$. On la répète n fois (indépendamment). Quel nombre minimal n de répétitions faut-il pour avoir au moins 95% de chances d'obtenir au moins un succès ?

Exercice 29 – Type bac : intervalle de fluctuation

Soit $X \sim B(100\,;0{,}5)$. 1) Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$. 2) On admet que l'intervalle $[E(X) - 2\sigma\,;E(X) + 2\sigma]$ contient X avec une forte probabilité. Donner cet intervalle.

Exercice 30 – Type bac : contrôle qualité B(50 ; 0,02)

Soit $X \sim B(50\,;0{,}02)$ (nombre de pièces défectueuses sur 50). Calculer $P(X = 0)$ puis $P(X \geq 1)$.

Exercice 31 – Type bac : espérance et écart-type B(200 ; 0,01)

Soit $X \sim B(200\,;0{,}01)$. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

Exercice 32 – Type bac : contrôle qualité et taille d'échantillon

Dans une production, chaque pièce est défectueuse, indépendamment des autres, avec la probabilité $p = 0{,}05$. On prélève un lot de 20 pièces et on note X le nombre de pièces défectueuses.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres, puis donner $E(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$.

2. Calculer $P(X = 0)$, arrondie à 10^{-2}.

3. En déduire la probabilité qu'il y ait au moins une pièce défectueuse.

4. Calculer $P(X \leq 2)$, arrondie à 10^{-2}.

5. On prélève maintenant n pièces. Déterminer le plus petit entier n pour lequel la probabilité d'avoir au moins une pièce défectueuse dépasse 0,99.

Exercice 33 – Type bac : surréservation d'un vol

Une compagnie vend 52 billets pour un avion de 50 places. Chaque passager se présente indépendamment avec une probabilité de 0,95. X est le nombre de passagers qui se présentent.

1. Donner la loi de X et son espérance.

2. Calculer la probabilité que des passagers soient refusés à l'embarquement.

Exercice 34 – Type bac : mise équitable

Un jeu rapporte 8 € avec proba 0,3 et 0 € sinon. Quelle mise m rend le jeu équitable (espérance du gain net nulle) ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 35 – Type bac : loi avec paramètre

X prend les valeurs $0, 1, 2$ avec $P(X = 0) = 0{,}5$, $P(X = 1) = a$, $P(X = 2) = 0{,}2$. 1) Déterminer a. 2) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 36 – Type bac : somme de variables (linéarité)

Une partie comporte deux tirages indépendants de même loi, d'espérance $E(X) = 1{,}5$ chacune. On note $S = X_1 + X_2$ le total. Calculer $E(S)$.

Exercice 37 – Type bac : décision par l'espérance

Une assurance propose : prime annuelle 120 €. Elle rembourse 2000 € en cas de sinistre, dont la probabilité annuelle est 0,05. Soit B le bénéfice de l'assureur par client. Calculer $E(B)$ et conclure.

Exercice 38 – Type bac : variance d'un jeu

À un jeu, le gain X vaut $+3$ € avec proba 0,4 et -2 € avec proba 0,6. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 39 – Type bac : jeu, espérance, mise équitable et variance

Un jeu consiste à lancer un dé équilibré à six faces. Le joueur gagne 6 € s'il obtient un 6, 2 € s'il obtient un 4 ou un 5, et rien sinon. On note G le gain (en euros) avant déduction de la mise.

1. Déterminer la loi de probabilité de G.

2. Calculer l'espérance $E(G)$.

3. Le joueur doit payer une mise m pour jouer. Déterminer m pour que le jeu soit équitable.

4. Calculer la variance $V(G)$ et l'écart-type $\sigma(G)$, arrondi à 10^{-2}.

5. Si la mise est de 2 €, déterminer le gain moyen net du joueur et interpréter.

Exercice 40 – Type bac : au plus trois lancers

On lance un dé équilibré jusqu'à obtenir un 6, avec au plus 3 lancers. X est le nombre de lancers effectués.

1. Donner la loi de X.

2. Calculer $E(X)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 40 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Coefficients binomiaux

$\binom{5}{0} = 1$ et $\binom{5}{5} = 1$ (une seule façon de choisir 0 ou 5 éléments).

$\binom{5}{1} = 5$ (cinq façons de choisir 1 élément parmi 5).

$\binom{5}{2} = \dfrac{5 \times 4}{2} = 10$.

Réponse. $\binom{5}{0} = 1$, $\binom{5}{1} = 5$, $\binom{5}{5} = 1$, $\binom{5}{2} = 10$.

Rappel de cours. $\binom{n}{k}$ compte les façons de choisir k éléments parmi n. $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$, $\binom{n}{1} = n$.

Correction de l'exercice 2 – Reconnaître une loi binomiale

Chaque lancer est une épreuve de Bernoulli : succès « obtenir 6 » de probabilité $p = \dfrac{1}{6}$, échec sinon.

Les 10 lancers sont identiques et indépendants, et X compte les succès.

Donc X suit la loi binomiale $B\left(10, \dfrac{1}{6}\right)$.

Réponse. $X \sim B\left(10, \dfrac{1}{6}\right)$: $n = 10$ répétitions, $p = \dfrac{1}{6}$.

Rappel de cours. Conditions pour une loi binomiale : n épreuves identiques, indépendantes, à deux issues (succès/échec), et X = nombre de succès.

Correction de l'exercice 3 – Répondre au hasard à un QCM

Chaque question est une épreuve de Bernoulli de succès « bonne réponse », de probabilité $\dfrac{1}{4}$.

Les 10 épreuves sont identiques et indépendantes : X suit la loi binomiale $B(10\,;0{,}25)$.

$E(X) = np = 10 \times 0{,}25 = 2{,}5$.

Réponse. $X \sim B(10\,;0{,}25)$ et $E(X) = 2{,}5$.

Rappel de cours. Schéma de Bernoulli : n épreuves identiques, indépendantes, à deux issues. Le nombre de succès suit $B(n\,;p)$.

Correction de l'exercice 4 – Vérifier une loi de probabilité

La somme des probabilités d'une loi vaut toujours 1.

$0{,}2 + 0{,}5 + p = 1$, donc $p = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$.

Réponse. $p = P(X = 3) = 0{,}3$.

Rappel de cours. Dans une loi de probabilité, $\sum_i P(X = x_i) = 1$ et chaque probabilité est entre 0 et 1.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 5 – Calculer une espérance

$E(X) = \sum_i x_i P(X = x_i) = 1 \times 0{,}2 + 2 \times 0{,}5 + 3 \times 0{,}3$.

$= 0{,}2 + 1{,}0 + 0{,}9 = 2{,}1$.

Réponse. $E(X) = 2{,}1$.

Rappel de cours. Espérance : $E(X) = \sum_i x_i\, p_i$. C’est la moyenne des valeurs pondérée par leurs probabilités.

Correction de l’exercice 6 – Interpréter l’espérance

$E(X) = 5 \times 0{,}3 + (-2) \times 0{,}7 = 1{,}5 - 1{,}4 = 0{,}1$.

$E(X) = 0{,}1 > 0$: en moyenne le joueur gagne 0,10 € par partie, le jeu lui est favorable.

Réponse. $E(X) = 0{,}1$ € : jeu favorable au joueur.

Rappel de cours. $E(X) > 0$: favorable au joueur. $E(X) = 0$: jeu équitable. $E(X) < 0$: défavorable.

Correction de l’exercice 7 – Loi uniforme

Les 4 issues sont équiprobables : $P(X = k) = \frac{1}{4}$ pour $k = 1, 2, 3, 4$.

$E(X) = \frac{1+2+3+4}{4} = \frac{10}{4} = 2{,}5$.

Réponse. $P(X = k) = \frac{1}{4}$; $E(X) = 2{,}5$.

Rappel de cours. Pour une loi uniforme, l’espérance est la moyenne des valeurs.

Correction de l’exercice 8 – Calcul direct P(X=k)

Formule : $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

$P(X = 2) = \binom{4}{2} (0{,}5)^2 (0{,}5)^2 = 6 \times 0{,}25 \times 0{,}25$.

$= 6 \times 0{,}0625 = 0{,}375$.

Réponse. $P(X = 2) = 0{,}375$.

Rappel de cours. $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$: coefficient binomial × (succès) × (échec).

Correction de l’exercice 9 – Probabilité d’aucun succès

$P(X = 0) = \binom{5}{0} (0{,}2)^0 (0{,}8)^5 = 1 \times 1 \times 0{,}8^5$.

$0{,}8^5 = 0{,}32768 \approx 0{,}328$.

Réponse. $P(X = 0) = 0{,}8^5 \approx 0{,}328$.

Rappel de cours. $P(X = 0) = (1-p)^n$: aucun succès = échec à chaque épreuve.

Correction de l’exercice 10 – Espérance et écart-type

$E(X) = np = 20 \times 0{,}3 = 6$.

$V(X) = np(1-p) = 20 \times 0{,}3 \times 0{,}7 = 4{,}2$.

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{4{,}2} \approx 2{,}05$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $E(X) = 6$, $V(X) = 4{,}2$, $\sigma(X) \approx 2{,}05$.

Rappel de cours. Loi binomiale $B(n, p)$: $E(X) = np$, $V(X) = np(1-p)$, $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

Correction de l'exercice 11 – Calcul direct avec un coefficient binomial

$P(X = 3) = \binom{6}{3} \times 0{,}5^3 \times 0{,}5^3 = \binom{6}{3} \times 0{,}5^6$.

$\binom{6}{3} = \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} = 20$ et $0{,}5^6 = \frac{1}{64}$.

$P(X = 3) = \frac{20}{64} = 0{,}3125$.

Réponse. $P(X = 3) = 0{,}3125$.

Rappel de cours. $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Correction de l'exercice 12 – Construire une loi

Les issues équiprobables sont PP, PF, FP, FF (chacune $\frac{1}{4}$).

$X = 0$ (FF) : $P(X = 0) = \frac{1}{4}$. $X = 1$ (PF ou FP) : $P(X = 1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. $X = 2$ (PP) : $P(X = 2) = \frac{1}{4}$.

Vérification : $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 1$. ✓

Réponse. $P(X = 0) = \frac{1}{4}$, $P(X = 1) = \frac{1}{2}$, $P(X = 2) = \frac{1}{4}$.

Rappel de cours. Pour construire une loi : lister les issues, compter les cas favorables à chaque valeur, diviser par le nombre total d'issues.

Correction de l'exercice 13 – Espérance d'un jeu

$E(X) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} = 0 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$.

Réponse. $E(X) = 1$ (en moyenne, 1 Pile sur 2 lancers).

Rappel de cours. On retrouve $E(X) = np = 2 \times 0{,}5 = 1$ (loi binomiale $B(2; 0{,}5)$).

Correction de l'exercice 14 – Variance par la définition

$V(X) = \sum_i (x_i - E(X))^2 p_i$.

$= 0{,}2(1 - 2{,}1)^2 + 0{,}5(2 - 2{,}1)^2 + 0{,}3(3 - 2{,}1)^2$.

$= 0{,}2 \times 1{,}21 + 0{,}5 \times 0{,}01 + 0{,}3 \times 0{,}81 = 0{,}242 + 0{,}005 + 0{,}243 = 0{,}49$.

Réponse. $V(X) = 0{,}49$.

Rappel de cours. Variance (définition) : $V(X) = \sum_i (x_i - E(X))^2 p_i$, moyenne des carrés des écarts à l'espérance.

Correction de l'exercice 15 – Au moins un succès

On passe par l'événement contraire : $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$.

$P(X = 0) = (0{,}75)^8 \approx 0{,}1001$.

$P(X \geq 1) = 1 - 0{,}1001 \approx 0{,}900$.

Réponse. $P(X \geq 1) = 1 - 0{,}75^8 \approx 0{,}900$.

Rappel de cours. « Au moins un » se calcule par le contraire : $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$. Évite une longue somme.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Erreur fréquente. Ne pas calculer $P(X = 1) + P(X = 2) + \cdots$: le contraire $1 - P(X = 0)$ est bien plus rapide.

Correction de l'exercice 16 – Probabilité cumulée P(X ≤ k)

$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1)$.

$P(X = 0) = \binom{3}{0}(0{,}4)^0(0{,}6)^3 = 0{,}216$.

$P(X = 1) = \binom{3}{1}(0{,}4)^1(0{,}6)^2 = 3 \times 0{,}4 \times 0{,}36 = 0{,}432$.

$P(X \leq 1) = 0{,}216 + 0{,}432 = 0{,}648$.

Réponse. $P(X \leq 1) = 0{,}648$.

Rappel de cours. $P(X \leq k) = \sum_{i=0}^{k} P(X = i)$. À la calculatrice : fonction « binomFRép » ou « binomcdf ».

Correction de l'exercice 17 – Intervalle de valeurs

$P(1 \leq X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2)$.

$P(X = 1) = 0{,}432$ (vu précédemment).

$P(X = 2) = \binom{3}{2}(0{,}4)^2(0{,}6)^1 = 3 \times 0{,}16 \times 0{,}6 = 0{,}288$.

$P(1 \leq X \leq 2) = 0{,}432 + 0{,}288 = 0{,}720$.

Réponse. $P(1 \leq X \leq 2) = 0{,}720$.

Rappel de cours. On somme les $P(X = k)$ pour les k de l'intervalle, ou on calcule $P(X \leq 2) - P(X \leq 0)$.

Correction de l'exercice 18 – Au moins deux succès

Contraire de « $X \geq 2$ » : « $X \leq 1$ ». Donc $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$.

$P(X = 0) = (0{,}5)^{10} = \dfrac{1}{1024} \approx 0{,}000977$.

$P(X = 1) = \binom{10}{1}(0{,}5)^1(0{,}5)^9 = 10 \times (0{,}5)^{10} = \dfrac{10}{1024} \approx 0{,}00977$.

$P(X \geq 2) = 1 - 0{,}000977 - 0{,}00977 \approx 0{,}989$.

Réponse. $P(X \geq 2) \approx 0{,}989$.

Rappel de cours. « Au moins 2 » $= 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$. Le contraire de « ≥ 2 » est « ≤ 1 ».

Correction de l'exercice 19 – Avoir la moyenne au hasard ?

$P(X \geq 5) = 1 - P(X \leq 4)$.

À la calculatrice (loi binomiale cumulée) : $P(X \leq 4) \approx 0{,}9219$.

$P(X \geq 5) \approx 1 - 0{,}9219 = 0{,}0781$.

Réponse. $P(X \geq 5) \approx 0{,}078$, soit moins de 8 %.

Rappel de cours. « Au moins k » : passer par le contraire $1 - P(X \leq k - 1)$, que donne la calculatrice.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 20 – Variance par König-Huygens

Formule : $V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$.

$E(X^2) = 1^2 \times 0{,}2 + 2^2 \times 0{,}5 + 3^2 \times 0{,}3 = 0{,}2 + 2{,}0 + 2{,}7 = 4{,}9$.

$V(X) = 4{,}9 - 2{,}1^2 = 4{,}9 - 4{,}41 = 0{,}49$ (cohérent avec la définition).

Réponse. $V(X) = 0{,}49$.

Rappel de cours. König-Huygens : $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$, souvent plus rapide. Attention : $E(X^2) = \sum x_i^2 p_i$, pas $E(X)^2$.

Erreur fréquente. Ne pas confondre $E(X^2)$ (carrés des valeurs) et $E(X)^2$ (carré de l'espérance) : leur différence EST la variance.

Correction de l'exercice 21 – Écart-type

$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0{,}49} = 0{,}7$.

Réponse. $\sigma(X) = 0{,}7$.

Rappel de cours. L'écart-type $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ s'exprime dans la même unité que X : plus parlant que la variance.

Correction de l'exercice 22 – Transformation affine de l'espérance

Linéarité de l'espérance : $E(2X + 3) = 2E(X) + 3 = 2 \times 2{,}1 + 3 = 7{,}2$.

Variance : $V(2X + 3) = 2^2 V(X) = 4 \times 0{,}49 = 1{,}96$ (la constante +3 disparaît).

Réponse. $E(Y) = 7{,}2$; $V(Y) = 1{,}96$.

Rappel de cours. $E(aX + b) = aE(X) + b$; $V(aX + b) = a^2 V(X)$ (la constante b ne change pas la dispersion).

Erreur fréquente. Pour la variance, le $+b$ disparaît et le coefficient passe au carré : $V(2X + 3) = 4V(X)$, pas $2V(X) + 3$.

Correction de l'exercice 23 – Espérance d'un gain net

Gain net : si on gagne, $10 - 3 = 7$ € (proba 0,25) ; sinon $0 - 3 = -3$ € (proba 0,75).

$E(G) = 7 \times 0{,}25 + (-3) \times 0{,}75 = 1{,}75 - 2{,}25 = -0{,}5$.

$E(G) < 0$: en moyenne le joueur perd 0,50 € par partie.

Réponse. $E(G) = -0{,}5$ € : jeu défavorable au joueur.

Rappel de cours. Le gain net retranche la mise à chaque issue. Un $E(G) < 0$ signifie que le jeu profite à l'organisateur.

Correction de l'exercice 24 – Somme de deux variables indépendantes

Linéarité de l'espérance (toujours vraie) : $E(X + Y) = 2 + 3 = 5$.

Variables indépendantes : les variances s'additionnent, $V(X + Y) = 1 + 4 = 5$.

$\sigma(X + Y) = \sqrt{5} \approx 2{,}24$.

Réponse. $E = 5$, $V = 5$, $\sigma = \sqrt{5}$.

Rappel de cours. $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ si X et Y sont indépendantes.

Erreur fréquente. Les écarts types ne s'additionnent pas : $\sigma(X + Y) \neq 1 + 2 = 3$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 25 – Moyenne d'un échantillon

$M = \frac{X_1 + \cdots + X_{25}}{25}$. Linéarité : $E(M) = \frac{25 \times 150}{25} = 150$.

Indépendance : $V(X_1 + \cdots + X_{25}) = 25 \times 400$, et $V\left(\frac{S}{25}\right) = \frac{V(S)}{25^2}$. Donc $V(M) = \frac{25 \times 400}{625} = 16$.

$\sigma(M) = 4$ g, alors que $\sigma(X) = 20$ g pour une seule pomme.

Réponse. $E(M) = 150$, $V(M) = 16$, $\sigma(M) = 4$.

Rappel de cours. Pour la moyenne de n variables indépendantes de même loi : $E(M) = \mu$, $V(M) = \frac{\sigma^2}{n}$, $\sigma(M) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

Correction de l'exercice 26 – Type bac : contrôle qualité

Chaque pièce est défectueuse avec $p = 0{,}05$, indépendamment ; X compte les défectueuses sur 20 : $X \sim B(20\,;0{,}05)$.

$P(X = 1) = \binom{20}{1}(0{,}05)^1(0{,}95)^{19} = 20 \times 0{,}05 \times 0{,}95^{19} \approx 20 \times 0{,}05 \times 0{,}377 \approx 0{,}377$.

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - (0{,}95)^{20} \approx 1 - 0{,}358 = 0{,}642$.

Réponse. $X \sim B(20\,;0{,}05)$; $P(X = 1) \approx 0{,}377$; $P(X \geq 1) \approx 0{,}642$.

Rappel de cours. Schéma type bac : (1) identifier la loi binomiale et ses paramètres, (2) appliquer la formule, (3) utiliser le contraire pour « au moins un ».

Correction de l'exercice 27 – Type bac : valeur la plus probable

$P(X = 2) = \binom{5}{2}(0{,}6)^2(0{,}4)^3 = 10 \times 0{,}36 \times 0{,}064 = 0{,}2304$.

$P(X = 3) = \binom{5}{3}(0{,}6)^3(0{,}4)^2 = 10 \times 0{,}216 \times 0{,}16 = 0{,}3456$.

$P(X = 3) > P(X = 2)$: la valeur 3 est la plus probable des deux (cohérent avec $E(X) = np = 3$).

Réponse. $P(X = 2) = 0{,}2304$, $P(X = 3) = 0{,}3456$; $X = 3$ est la plus probable.

Rappel de cours. La valeur la plus probable est généralement proche de l'espérance $E(X) = np$ (ici $np = 3$).

Correction de l'exercice 28 – Type bac : seuil de répétitions

Soit $X \sim B(n\,;0{,}3)$. On veut $P(X \geq 1) \geq 0{,}95$, soit $1 - P(X = 0) \geq 0{,}95$.

$P(X = 0) = (0{,}7)^n$, donc la condition devient $(0{,}7)^n \leq 0{,}05$.

On applique ln : $n \ln(0{,}7) \leq \ln(0{,}05)$, et comme $\ln(0{,}7) < 0$: $n \geq \frac{\ln(0{,}05)}{\ln(0{,}7)} \approx \frac{-3{,}00}{-0{,}357} \approx 8{,}4$.

Le plus petit entier convenable est $n = 9$.

Réponse. Il faut au moins $n = 9$ répétitions.

Rappel de cours. « Au moins un succès avec une proba donnée » : poser $1 - (1 - p)^n \geq s$, isoler $(1 - p)^n$, passer au ln (inversion du sens car $\ln(1 - p) < 0$).

Erreur fréquente. Inverser le sens de l'inégalité en divisant par $\ln(0{,}7) < 0$, et arrondir à l'entier supérieur.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 29 – Type bac : intervalle de fluctuation

$E(X) = np = 100 \times 0{,}5 = 50$.

$V(X) = np(1-p) = 100 \times 0{,}5 \times 0{,}5 = 25$, donc $\sigma(X) = \sqrt{25} = 5$.

Intervalle : $[50 - 2 \times 5\,;\,50 + 2 \times 5] = [40\,;\,60]$.

Réponse. $E(X) = 50$, $\sigma(X) = 5$; intervalle $[40\,;\,60]$.

Rappel de cours. $E(X) = np$, $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$. L’intervalle $[E - 2\sigma ; E + 2\sigma]$ sert à juger si une observation est « habituelle ».

Correction de l’exercice 30 – Type bac : contrôle qualité B(50 ; 0,02)

$P(X = 0) = (1 - 0{,}02)^{50} = 0{,}98^{50} \approx 0{,}364$.

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \approx 1 - 0{,}364 = 0{,}636$.

Réponse. $P(X = 0) \approx 0{,}364$; $P(X \geq 1) \approx 0{,}636$.

Rappel de cours. $P(X = 0) = (1-p)^n$; « au moins un » $= 1 - P(X = 0)$.

Correction de l’exercice 31 – Type bac : espérance et écart-type B(200 ; 0,01)

$E(X) = np = 200 \times 0{,}01 = 2$.

$V(X) = np(1-p) = 200 \times 0{,}01 \times 0{,}99 = 1{,}98$.

$\sigma(X) = \sqrt{1{,}98} \approx 1{,}41$.

Réponse. $E(X) = 2$, $V(X) = 1{,}98$, $\sigma(X) \approx 1{,}41$.

Rappel de cours. $B(n, p)$: $E = np$, $V = np(1-p)$, $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$.

Correction de l’exercice 32 – Type bac : contrôle qualité et taille d’échantillon

On répète 20 fois, de façon indépendante, une épreuve de Bernoulli (« la pièce est défectueuse », succès de probabilité $p = 0{,}05$) : X suit la loi binomiale $B(20\,;\,0{,}05)$.
$E(X) = np = 20 \times 0{,}05 = 1$ et $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{20 \times 0{,}05 \times 0{,}95} = \sqrt{0{,}95} \approx 0{,}97$.

$P(X = 0) = \binom{20}{0} 0{,}05^0 \times 0{,}95^{20} = 0{,}95^{20} \approx 0{,}36$.

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}95^{20} \approx 0{,}64$.

$P(X \leq 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)$. Avec $P(X = 1) = \binom{20}{1} 0{,}05 \times 0{,}95^{19} \approx 0{,}377$ et $P(X = 2) = \binom{20}{2} 0{,}05^2 \times 0{,}95^{18} \approx 0{,}189$, on obtient
$P(X \leq 2) \approx 0{,}36 + 0{,}377 + 0{,}189 \approx 0{,}92$.

Pour un échantillon de n pièces, « aucune défectueuse » a pour probabilité $0{,}95^n$. On veut $1 - 0{,}95^n > 0{,}99$, soit $0{,}95^n < 0{,}01$, c’est-à-dire $n > \dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}95)} \approx 89{,}8$. Le plus petit entier est $n = 90$.

Réponse. $X \sim B(20\,;\,0{,}05)$, $E(X) = 1$, $\sigma(X) \approx 0{,}97$; $P(X = 0) \approx 0{,}36$; $P(X \geq 1) \approx 0{,}64$; $P(X \leq 2) \approx 0{,}92$; $n = 90$.

Rappel de cours. Loi binomiale : $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $E = np$, $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$. Un seuil « au moins un » se traite par l’événement contraire.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 33 – Type bac : surréservation d'un vol

1) 52 passagers indépendants, chacun présent avec la probabilité 0,95 : $X \sim B(52\,;0{,}95)$, $E(X) = 52 \times 0{,}95 = 49{,}4$.

2) Il y a des refus si $X > 50$, c'est-à-dire $X = 51$ ou $X = 52$.

$P(X = 52) = 0{,}95^{52} \approx 0{,}0694$ et $P(X = 51) = 52 \times 0{,}95^{51} \times 0{,}05 \approx 0{,}1901$.

$P(X > 50) \approx 0{,}0694 + 0{,}1901 \approx 0{,}26$.

Réponse. $X \sim B(52\,;0{,}95)$, $E(X) = 49{,}4$; risque de refus $\approx 26\,\%$.

Rappel de cours. $\binom{52}{51} = 52$: choisir les 51 présents revient à choisir l'unique absent.

Erreur fréquente. Une espérance inférieure à 50 ne garantit pas l'absence de refus : il faut calculer la probabilité.

Correction de l'exercice 34 – Type bac : mise équitable

Gain net : $8 - m$ avec proba 0,3, et $-m$ avec proba 0,7.

$E(G) = (8 - m) \times 0{,}3 + (-m) \times 0{,}7 = 2{,}4 - 0{,}3m - 0{,}7m = 2{,}4 - m$.

Jeu équitable : $E(G) = 0$, donc $2{,}4 - m = 0$, soit $m = 2{,}4$ €.

Réponse. La mise équitable est $m = 2{,}4$ € (= E du gain brut = $8 \times 0{,}3$).

Rappel de cours. Jeu équitable ⇔ E(gain net) = 0 ⇔ mise = E(gain brut).

Correction de l'exercice 35 – Type bac : loi avec paramètre

Somme = 1 : $0{,}5 + a + 0{,}2 = 1$, donc $a = 0{,}3$.

$E(X) = 0 \times 0{,}5 + 1 \times 0{,}3 + 2 \times 0{,}2 = 0 + 0{,}3 + 0{,}4 = 0{,}7$.

$E(X^2) = 0 \times 0{,}5 + 1 \times 0{,}3 + 4 \times 0{,}2 = 0{,}3 + 0{,}8 = 1{,}1$. $V(X) = 1{,}1 - 0{,}7^2 = 1{,}1 - 0{,}49 = 0{,}61$.

Réponse. $a = 0{,}3$; $E(X) = 0{,}7$; $V(X) = 0{,}61$.

Rappel de cours. On trouve d'abord le paramètre par $\sum p_i = 1$, puis on applique $E(X) = \sum x_i p_i$ et König-Huygens.

Correction de l'exercice 36 – Type bac : somme de variables (linéarité)

Par linéarité de l'espérance, $E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$ (vrai même sans indépendance).

$E(S) = 1{,}5 + 1{,}5 = 3$.

Réponse. $E(S) = 3$.

Rappel de cours. L'espérance est linéaire : $E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2)$, toujours. (Pour la variance, l'égalité $V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2)$ exige l'indépendance.)

Correction de l'exercice 37 – Type bac : décision par l'espérance

Sans sinistre (proba 0,95) : l'assureur garde la prime, $B = 120$.

Avec sinistre (proba 0,05) : $B = 120 - 2000 = -1880$.

$E(B) = 120 \times 0{,}95 + (-1880) \times 0{,}05 = 114 - 94 = 20$.

$E(B) = 20 > 0$: en moyenne l'assureur gagne 20 € par client et par an, le contrat est rentable pour lui.

Réponse. $E(B) = 20$ € : le contrat est rentable pour l'assureur.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Rappel de cours. L'espérance sert à décider : un $E(B) > 0$ indique une opération rentable en moyenne sur un grand nombre de clients (loi des grands nombres).

Correction de l'exercice 38 – Type bac : variance d'un jeu

$E(X) = 3 \times 0{,}4 + (-2) \times 0{,}6 = 1{,}2 - 1{,}2 = 0$: le jeu est équitable.

$E(X^2) = 3^2 \times 0{,}4 + (-2)^2 \times 0{,}6 = 3{,}6 + 2{,}4 = 6$.

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 6 - 0 = 6$.

Réponse. $E(X) = 0$ (équitable) ; $V(X) = 6$.

Rappel de cours. $V(X) = E(X^2) - E(X)^2$. Un jeu équitable ($E = 0$) peut avoir une grande variance (risque).

Correction de l'exercice 39 – Type bac : jeu, espérance, mise équitable et variance

G prend les valeurs 0, 2, 6. $P(G = 6) = \frac{1}{6}$ (face 6) ; $P(G = 2) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ (faces 4 ou 5) ; $P(G = 0) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ (faces $1, 2, 3$).

$E(G) = 6 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{3} + 0 \times \frac{1}{2} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \approx 1{,}67$ €.

Le jeu est équitable lorsque l'espérance du gain net est nulle, soit $E(G) - m = 0$: la mise équitable est $m = E(G) = \frac{5}{3} \approx 1{,}67$ €.

$E(G^2) = 6^2 \times \frac{1}{6} + 2^2 \times \frac{1}{3} + 0 = 6 + \frac{4}{3} = \frac{22}{3}$. Donc
$V(G) = E(G^2) - E(G)^2 = \frac{22}{3} - \frac{25}{9} = \frac{66 - 25}{9} = \frac{41}{9} \approx 4{,}56$, et $\sigma(G) = \sqrt{V(G)} \approx 2{,}13$ €.

Avec $m = 2$, le gain net moyen est $E(G) - 2 = \frac{5}{3} - 2 = -\frac{1}{3} \approx -0{,}33$ € : en moyenne le joueur perd 33 centimes par partie (jeu défavorable au joueur).

Réponse. Loi : $P(0) = \frac{1}{2}, P(2) = \frac{1}{3}, P(6) = \frac{1}{6}$; $E(G) = \frac{5}{3}$ € ; mise équitable $\frac{5}{3}$ € ; $V(G) = \frac{41}{9} \approx 4{,}56$, $\sigma \approx 2{,}13$ € ; avec $m = 2$, perte moyenne de $\frac{1}{3}$ €.

Rappel de cours. $E(aG + b) = aE(G) + b$; jeu équitable ⇔ espérance du gain net nulle ; $V(G) = E(G^2) - E(G)^2$.

Correction de l'exercice 40 – Type bac : au plus trois lancers

1) $X = 1$: 6 au premier lancer, $P = \frac{1}{6}$.

$X = 2$: pas de 6 puis un 6, $P = \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$.

$X = 3$: pas de 6 aux deux premiers lancers (on s'arrête au troisième quoi qu'il arrive), $P = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$.

Contrôle : $\frac{6}{36} + \frac{5}{36} + \frac{25}{36} = 1$.

2) $E(X) = 1 \times \frac{6}{36} + 2 \times \frac{5}{36} + 3 \times \frac{25}{36} = \frac{6 + 10 + 75}{36} = \frac{91}{36} \approx 2{,}53$.

Réponse. $P(X = 1) = \frac{1}{6}$, $P(X = 2) = \frac{5}{36}$, $P(X = 3) = \frac{25}{36}$; $E(X) = \frac{91}{36} \approx 2{,}53$.

Rappel de cours. Vérifier que la somme des probabilités vaut 1 permet de détecter une erreur de modélisation.

Erreur fréquente. $P(X = 3)$ n'est pas $\frac{25}{216}$: le troisième lancer a lieu que l'on obtienne 6 ou non.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).