Variables aléatoires et loi binomiale — Terminale spécialité

40 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés

Présentation

Une variable aléatoire X associe un nombre à chaque issue d'une expérience ; de sa loi on déduit l'espérance $E(X)$, la variance $V(X)$ et l'écart-type. La loi binomiale $B(n, p)$ compte le nombre de succès lors de n répétitions indépendantes d'une épreuve de Bernoulli de probabilité de succès p. Sa formule clé est $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Ces exercices corrigés couvrent loi de probabilité, espérance, variance (König-Huygens), transformations affines, jeux équitables, puis coefficients binomiaux, probabilités binomiales, espérance et écart-type de $B(n, p)$, probabilités cumulées et problèmes type bac. Difficulté croissante, correction d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-specialite/loi-binomiale

Exercice 1 – Coefficients binomiaux

Calculer $\binom{5}{0}$, $\binom{5}{1}$, $\binom{5}{5}$ et $\binom{5}{2}$.

Exercice 2 – Reconnaître une loi binomiale

On lance 10 fois un dé équilibré et on compte le nombre X de « 6 » obtenus. Justifier que X suit une loi binomiale et donner ses paramètres.

Exercice 3 – Répondre au hasard à un QCM

Un QCM comporte 10 questions indépendantes, chacune avec 4 réponses dont une seule juste. Un élève répond au hasard. X est le nombre de bonnes réponses. Justifier la loi de X et calculer $E(X)$.

Exercice 4 – Vérifier une loi de probabilité

Une variable X prend les valeurs $1, 2, 3$ avec $P(X = 1) = 0{,}2$, $P(X = 2) = 0{,}5$, $P(X = 3) = p$. Déterminer p.

Exercice 5 – Calculer une espérance

Avec $P(X = 1) = 0{,}2$, $P(X = 2) = 0{,}5$, $P(X = 3) = 0{,}3$, calculer $E(X)$.

Exercice 6 – Interpréter l'espérance

À un jeu, le gain X (en €) vaut $+5$ avec proba 0,3 et -2 avec proba 0,7. Calculer $E(X)$ et dire si le jeu est favorable au joueur.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 7 – Loi uniforme

On tire au hasard un jeton numéroté parmi 1, 2, 3, 4. X est le numéro obtenu. Donner la loi de X et son espérance.

Exercice 8 – Calcul direct P(X=k)

Soit $X \sim B(4\,;0{,}5)$. Calculer $P(X = 2)$.

Exercice 9 – Probabilité d'aucun succès

Soit $X \sim B(5\,;0{,}2)$. Calculer $P(X = 0)$.

Exercice 10 – Espérance et écart-type

Soit $X \sim B(20\,;0{,}3)$. Calculer l'espérance $E(X)$, la variance $V(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$.

Exercice 11 – Calcul direct avec un coefficient binomial

Soit $X \sim B(6\,;0{,}5)$. Calculer $P(X = 3)$.

Exercice 12 – Construire une loi

On lance deux pièces équilibrées. Soit X le nombre de « Pile ». Donner la loi de probabilité de X.

Exercice 13 – Espérance d'un jeu

Avec la loi de X (nombre de Pile sur 2 lancers), calculer $E(X)$.

Exercice 14 – Variance par la définition

Avec $P(X = 1) = 0{,}2$, $P(X = 2) = 0{,}5$, $P(X = 3) = 0{,}3$ et $E(X) = 2{,}1$, calculer $V(X)$ par la définition.

Exercice 15 – Au moins un succès

Soit $X \sim B(8\,;0{,}25)$. Calculer $P(X \geq 1)$.

Exercice 16 – Probabilité cumulée P(X ≤ k)

Soit $X \sim B(3\,;0{,}4)$. Calculer $P(X \leq 1)$.

Exercice 17 – Intervalle de valeurs

Soit $X \sim B(3\,;0{,}4)$. Calculer $P(1 \leq X \leq 2)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 18 – Au moins deux succès

Soit $X \sim B(10\,;0{,}5)$. Exprimer $P(X \geq 2)$ à l'aide de $P(X = 0)$ et $P(X = 1)$, puis calculer.

Exercice 19 – Avoir la moyenne au hasard ?

Un QCM comporte 10 questions à 4 réponses dont une seule juste, et un élève répond au hasard : le nombre X de bonnes réponses suit $B(10\,;0{,}25)$. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins 5 bonnes réponses ?

Exercice 20 – Variance par König-Huygens

Avec $P(X = 1) = 0{,}2$, $P(X = 2) = 0{,}5$, $P(X = 3) = 0{,}3$ et $E(X) = 2{,}1$, calculer $V(X)$ par la formule de König-Huygens.

Exercice 21 – Écart-type

Sachant $V(X) = 0{,}49$, calculer l'écart-type $\sigma(X)$.

Exercice 22 – Transformation affine de l'espérance

On pose $Y = 2X + 3$ avec $E(X) = 2{,}1$ et $V(X) = 0{,}49$. Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.

Exercice 23 – Espérance d'un gain net

Un jeu coûte 3 € pour jouer. On gagne 10 € avec proba 0,25 et 0 € sinon. Soit G le gain net (gain − mise). Calculer $E(G)$.

Exercice 24 – Somme de deux variables indépendantes

X et Y sont indépendantes avec $E(X) = 2$, $V(X) = 1$, $E(Y) = 3$, $V(Y) = 4$. Calculer $E(X + Y)$, $V(X + Y)$ et $\sigma(X + Y)$.

Exercice 25 – Moyenne d'un échantillon

La masse (en g) d'une pomme est une variable aléatoire d'espérance 150 et de variance 400. On prend 25 pommes indépendantes et on note M leur masse moyenne. Calculer $E(M)$, $V(M)$ et $\sigma(M)$.

Exercice 26 – Type bac : contrôle qualité

Dans une production, 5% des pièces sont défectueuses. On prélève 20 pièces (assimilé à un tirage indépendant). Soit X le nombre de pièces défectueuses. 1) Justifier la loi de X. 2) Calculer la probabilité qu'il y ait exactement 1 pièce défectueuse. 3) Calculer la probabilité qu'il y en ait au moins une.

Exercice 27 – Type bac : valeur la plus probable

Soit $X \sim B(5\,;0{,}6)$. Calculer $P(X = 2)$ et $P(X = 3)$, puis dire quelle valeur de X est la plus probable parmi $\{2, 3\}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 28 – Type bac : seuil de répétitions

Une opération réussit avec probabilité $p = 0{,}3$. On la répète n fois (indépendamment). Quel nombre minimal n de répétitions faut-il pour avoir au moins 95% de chances d'obtenir au moins un succès ?

Exercice 29 – Type bac : intervalle de fluctuation

Soit $X \sim B(100\,;0{,}5)$. 1) Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$. 2) On admet que l'intervalle $[E(X) - 2\sigma\,;E(X) + 2\sigma]$ contient X avec une forte probabilité. Donner cet intervalle.

Exercice 30 – Type bac : contrôle qualité B(50 ; 0,02)

Soit $X \sim B(50\,;0{,}02)$ (nombre de pièces défectueuses sur 50). Calculer $P(X = 0)$ puis $P(X \geq 1)$.

Exercice 31 – Type bac : espérance et écart-type B(200 ; 0,01)

Soit $X \sim B(200\,;0{,}01)$. Calculer $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$.

Exercice 32 – Type bac : contrôle qualité et taille d'échantillon

Dans une production, chaque pièce est défectueuse, indépendamment des autres, avec la probabilité $p = 0{,}05$. On prélève un lot de 20 pièces et on note X le nombre de pièces défectueuses.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres, puis donner $E(X)$ et l'écart-type $\sigma(X)$.

2. Calculer $P(X = 0)$, arrondie à 10^{-2}.

3. En déduire la probabilité qu'il y ait au moins une pièce défectueuse.

4. Calculer $P(X \leq 2)$, arrondie à 10^{-2}.

5. On prélève maintenant n pièces. Déterminer le plus petit entier n pour lequel la probabilité d'avoir au moins une pièce défectueuse dépasse 0,99.

Exercice 33 – Type bac : surréservation d'un vol

Une compagnie vend 52 billets pour un avion de 50 places. Chaque passager se présente indépendamment avec une probabilité de 0,95. X est le nombre de passagers qui se présentent.

1. Donner la loi de X et son espérance.

2. Calculer la probabilité que des passagers soient refusés à l'embarquement.

Exercice 34 – Type bac : mise équitable

Un jeu rapporte 8 € avec proba 0,3 et 0 € sinon. Quelle mise m rend le jeu équitable (espérance du gain net nulle) ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 35 – Type bac : loi avec paramètre

X prend les valeurs $0, 1, 2$ avec $P(X = 0) = 0{,}5$, $P(X = 1) = a$, $P(X = 2) = 0{,}2$. 1) Déterminer a. 2) Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 36 – Type bac : somme de variables (linéarité)

Une partie comporte deux tirages indépendants de même loi, d'espérance $E(X) = 1{,}5$ chacune. On note $S = X_1 + X_2$ le total. Calculer $E(S)$.

Exercice 37 – Type bac : décision par l'espérance

Une assurance propose : prime annuelle 120 €. Elle rembourse 2000 € en cas de sinistre, dont la probabilité annuelle est 0,05. Soit B le bénéfice de l'assureur par client. Calculer $E(B)$ et conclure.

Exercice 38 – Type bac : variance d'un jeu

À un jeu, le gain X vaut $+3$ € avec proba 0,4 et -2 € avec proba 0,6. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 39 – Type bac : jeu, espérance, mise équitable et variance

Un jeu consiste à lancer un dé équilibré à six faces. Le joueur gagne 6 € s'il obtient un 6, 2 € s'il obtient un 4 ou un 5, et rien sinon. On note G le gain (en euros) avant déduction de la mise.

1. Déterminer la loi de probabilité de G.

2. Calculer l'espérance $E(G)$.

3. Le joueur doit payer une mise m pour jouer. Déterminer m pour que le jeu soit équitable.

4. Calculer la variance $V(G)$ et l'écart-type $\sigma(G)$, arrondi à 10^{-2}.

5. Si la mise est de 2 €, déterminer le gain moyen net du joueur et interpréter.

Exercice 40 – Type bac : au plus trois lancers

On lance un dé équilibré jusqu'à obtenir un 6, avec au plus 3 lancers. X est le nombre de lancers effectués.

1. Donner la loi de X.

2. Calculer $E(X)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).