Primitives et équations différentielles — Terminale spécialité

40 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

Une primitive F d'une fonction f est une fonction dont la dérivée est f : $F' = f$. Calculer une primitive, c'est « remonter » la dérivation. Deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante. Une équation différentielle relie une fonction y à sa dérivée y' : au programme, $y' = ay$ (solutions Ce^{ax}) et $y' = ay + b$, avec la solution vérifiant une condition initiale. Ces exercices corrigés couvrent primitives de référence, formes $u'u^n$, $\frac{u'}{u}$, $u'e^u$, primitive vérifiant une condition, puis vérification de solutions, résolution de $y' = ay$ et $y' = ay + b$ et modélisation type bac. Difficulté croissante, correction d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-specialite/primitives

Exercice 1 – Primitives de référence

Donner une primitive de $f(x) = 3$ et de $g(x) = x$.

Exercice 2 – Primitive de x^n

Donner une primitive de $f(x) = x^3$ et de $g(x) = x^4$.

Exercice 3 – Primitive d'un polynôme

Déterminer une primitive de $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$.

Exercice 4 – Puissances négatives et racine

Donner une primitive de $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$ et de $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0\,;+\infty[$.

Exercice 5 – Vérifier une solution

Montrer que $y(x) = e^{3x}$ est solution de l'équation $y' = 3y$.

Exercice 6 – Solution générale de y' = ay

Donner toutes les solutions de l'équation $y' = 2y$.

Exercice 7 – Identifier a

Donner la forme des solutions de $y' = -0{,}5\,y$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 8 – Vérifier une solution de y′ = −y + 3

Montrer que $y(x) = 2e^{-x} + 3$ est solution de $y' = -y + 3$.

Exercice 9 – Primitive de 1/x² et de eˣ

Donner une primitive de $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ (sur $]0;+\infty[$) et de $g(x) = e^x$.

Exercice 10 – Primitive de 1/x

Donner une primitive de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$, puis de $g(x) = \dfrac{3}{x}$.

Exercice 11 – Primitive de cos et sin

Donner une primitive de $f(x) = \cos x$ et de $g(x) = \sin x$.

Exercice 12 – Fonction affine composée

Donner une primitive de $f(x) = (2x+1)^4$ et de $g(x) = e^{-x}$.

Exercice 13 – Condition initiale

Résoudre $y' = 2y$ avec la condition $y(0) = 5$.

Exercice 14 – Condition initiale (2)

Résoudre $y' = -3y$ avec $y(0) = 2$, puis calculer $y(1)$.

Exercice 15 – Solution de y’ = ay + b

Donner la solution générale de $y' = 2y + 6$.

Exercice 16 – Condition initiale avec second membre

Résoudre $y' = -2y + 4$ avec $y(0) = 0$.

Exercice 17 – Forme u’uⁿ

Déterminer une primitive de $f(x) = 2x(x^2+1)^3$.

Exercice 18 – Forme u’/u

Déterminer une primitive de $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 19 – Forme u’eᵘ

Déterminer une primitive de $f(x) = 2x\,e^{x^2}$ puis de $g(x) = e^{3x}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 20 – Primitive avec condition initiale

Déterminer la primitive F de $f(x) = 2x + 1$ telle que $F(0) = 3$.

Exercice 21 – La forme u′/u²

Déterminer une primitive de $f(x) = \dfrac{x}{(x^2+4)^2}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 22 – Solution particulière constante

Pour l'équation $y' = 2y + 6$, déterminer la solution constante (solution d'équilibre).

Exercice 23 – y' = ay + b avec condition

Résoudre $y' = 2y + 6$ avec $y(0) = 1$.

Exercice 24 – Reconnaître l'équation depuis une modélisation

Une population augmente proportionnellement à son effectif $N(t)$, avec un taux 0,04 par an. Écrire l'équation différentielle vérifiée par N et donner sa solution générale.

Exercice 25 – Désintégration radioactive

Une quantité radioactive vérifie $N' = -0{,}1\,N$ avec $N(0) = 200$ (en grammes). 1) Exprimer $N(t)$. 2) Calculer la quantité restante à $t = 10$.

Exercice 26 – Temps de doublement

Une population vérifie $P' = 0{,}03P$ (t en années), avec $P(0) = P_0$. Au bout de combien de temps la population aura-t-elle doublé ?

Exercice 27 – Type bac : reconnaître la bonne forme

Déterminer une primitive de $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

Exercice 28 – Type bac : primitive d'un produit reconnu

On admet que $f(x) = (x+1)e^x$. Montrer que $F(x) = x\,e^x$ est une primitive de f.

Exercice 29 – Type bac : primitive et tableau de variations

Soit $f(x) = 3x^2 - 12$. 1) Déterminer la primitive F vérifiant $F(0) = 5$. 2) Étudier les variations de F.

Exercice 30 – Type bac : primitive de cos(2x)

Déterminer une primitive de $f(x) = \cos(2x)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 31 – Type bac : reconnaître la forme u'/u

Déterminer une primitive de $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$.

Exercice 32 – Type bac : reconnaître des formes et primitive imposée

On rappelle les formes $\dfrac{u'}{u}$ (primitive $\ln|u|$), $u'e^u$ (primitive e^u) et $u'u^n$ (primitive $\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$). On cherche des primitives sur l'intervalle indiqué.

1. Soit $f(x) = \dfrac{2x-2}{x^2-2x+5}$ sur $\mathbb{R}$. Justifier que le dénominateur ne s'annule pas, puis donner toutes les primitives de f.

2. Déterminer la primitive F de f vérifiant $F(1) = 0$.

3. Donner une primitive de $g(x) = x\,e^{x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

4. Donner une primitive de $h(x) = \sin(x)\cos^3(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 33 – Type bac : une primitive du logarithme

On considère $F(x) = x\ln x - x$ sur $]0\,;+\infty[$.

1. Montrer que F est une primitive de ln.

2. Déterminer la primitive G de ln qui s'annule en 1.

3. Calculer $\int_1^e \ln x\,dx$.

Exercice 34 – Type bac : refroidissement (loi de Newton)

La température d'un objet vérifie $\theta' = -0{,}2(\theta - 20)$, avec $\theta(0) = 80$ (en °C, ambiance 20°). 1) Vérifier que $\theta(t) = 20 + Ce^{-0{,}2t}$ est solution. 2) Déterminer C, puis $\theta(5)$.

Exercice 35 – Type bac : équation à second membre constant

Résoudre $y' + 3y = 12$ avec $y(0) = 0$ (réécrire d'abord sous la forme $y' = ay + b$).

Exercice 36 – Type bac : limite d'une solution

Soit $y(x) = 4(1 - e^{-3x})$, solution de l'exercice précédent. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} y(x)$ et interpréter.

Exercice 37 – Type bac : circuit électrique RC

La charge $q(t)$ d'un condensateur vérifie $q' = -\dfrac{1}{\tau}q + \dfrac{E}{\tau}$ avec $\tau = 2$, $E = 10$, et $q(0) = 0$. Déterminer $q(t)$.

Exercice 38 – Type bac : modèle avec valeur d'équilibre

Une grandeur vérifie $y' = -0{,}5\,y + 100$ avec $y(0) = 50$. Déterminer $y(t)$ puis $\lim_{t\to+\infty} y(t)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 39 – Type bac : équation $y' = -0{,}5y + 10$ et valeur d'équilibre

On étudie une grandeur $y(t)$ ($t \geq 0$) solution de l'équation différentielle (E): $y' = -0{,}5\,y + 10$, avec la condition initiale $y(0) = 4$.

1. Déterminer les solutions générales de l'équation (E).

2. Déterminer la solution y vérifiant $y(0) = 4$.

3. Étudier le sens de variation de y sur $[0; +\infty[$.

4. Déterminer la limite de y en $+\infty$ et interpréter (valeur d'équilibre).

5. Déterminer l'instant t (valeur exacte puis approchée à 10^{-2}) pour lequel $y(t) = 15$.

Exercice 40 – Type bac : second membre affine

On considère (E):$y' = 2y - 4x$.

1. Déterminer les réels a et b tels que $p(x) = ax + b$ soit solution de (E).

2. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si $y - p$ est solution de $y' = 2y$.

3. En déduire la solution de (E) telle que $y(0) = 3$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 40 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Primitives de référence

Une primitive de la constante 3 est $F(x) = 3x$ (car $(3x)' = 3$).

Une primitive de x est $G(x) = \frac{x^2}{2}$ (car $\left(\frac{x^2}{2}\right)' = x$).

Réponse. $F(x) = 3x$; $G(x) = \frac{x^2}{2}$.

Rappel de cours. Primitiver, c'est l'inverse de dériver. Pour vérifier, on dérive le résultat : on doit retrouver f.

Correction de l'exercice 2 – Primitive de x^n

Formule : une primitive de x^n est $\frac{x^{n+1}}{n+1}$.

Pour x^3 : $F(x) = \frac{x^4}{4}$. Pour x^4 : $G(x) = \frac{x^5}{5}$.

Réponse. $F(x) = \frac{x^4}{4}$; $G(x) = \frac{x^5}{5}$.

Rappel de cours. Primitive de x^n : $\frac{x^{n+1}}{n+1}$ (on augmente l'exposant de 1 et on divise par le nouvel exposant).

Correction de l'exercice 3 – Primitive d'un polynôme

On primitive terme à terme : $2x^2 \to \frac{2x^3}{3}$, $-4x \to -2x^2$, $5 \to 5x$.

Donc $F(x) = \frac{2x^3}{3} - 2x^2 + 5x$.

Réponse. $F(x) = \frac{2x^3}{3} - 2x^2 + 5x$ $(+C)$.

Rappel de cours. On primitive chaque terme séparément. On peut ajouter n'importe quelle constante C.

Correction de l'exercice 4 – Puissances négatives et racine

$\frac{1}{x^3} = x^{-3}$. Une primitive de x^n $(n \neq -1)$ est $\frac{x^{n+1}}{n+1}$: $F(x) = \frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{1}{2x^2}$.

$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, donc une primitive de $\frac{1}{\sqrt{x}}$ est $G(x) = 2\sqrt{x}$.

Contrôle en dérivant : $F'(x) = -\frac{1}{2} \times (-2)x^{-3} = x^{-3}$.

Réponse. $F(x) = -\frac{1}{2x^2}$ et $G(x) = 2\sqrt{x}$.

Rappel de cours. On vérifie toujours une primitive en la dérivant.

Correction de l'exercice 5 – Vérifier une solution

On calcule $y'(x) = 3e^{3x}$ (dérivée de e^u avec $u = 3x$).

Or $3y(x) = 3e^{3x}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$y' = 3y$: l'égalité est vérifiée, donc $y = e^{3x}$ est bien solution.

Réponse. $y' = 3e^{3x} = 3y$: $y = e^{3x}$ est solution de $y' = 3y$.

Rappel de cours. Pour vérifier qu'une fonction est solution, on calcule y' et on contrôle que l'équation est satisfaite.

Correction de l'exercice 6 – Solution générale de y' = ay

Les solutions de $y' = ay$ sont les fonctions $y(x) = Ce^{ax}$, avec $C \in \mathbb{R}$.

Ici $a = 2$, donc $y(x) = Ce^{2x}$.

Réponse. $y(x) = Ce^{2x}$, $C \in \mathbb{R}$.

Rappel de cours. Théorème : les solutions de $y' = ay$ sont $y = Ce^{ax}$, où C est une constante réelle quelconque.

Correction de l'exercice 7 – Identifier a

Équation de type $y' = ay$ avec $a = -0{,}5$.

Solutions : $y(x) = Ce^{-0{,}5x}$.

Réponse. $y(x) = Ce^{-0{,}5x}$, $C \in \mathbb{R}$.

Rappel de cours. Un coefficient $a < 0$ donne une exponentielle décroissante (phénomène d'amortissement, désintégration…).

Correction de l'exercice 8 – Vérifier une solution de y' = −y + 3

$y'(x) = -2e^{-x}$.

$-y(x) + 3 = -2e^{-x} - 3 + 3 = -2e^{-x}$.

Les deux membres sont égaux pour tout x : y est solution.

Réponse. $y' = -y + 3$ est vérifiée.

Rappel de cours. Vérifier une solution : calculer séparément les deux membres et constater qu'ils sont égaux.

Correction de l'exercice 9 – Primitive de 1/x² et de eˣ

$\dfrac{1}{x^2} = x^{-2}$. Une primitive de x^{-2} est $\dfrac{x^{-1}}{-1} = -\dfrac{1}{x}$ (on vérifie : $\left(-\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$).

Une primitive de e^x est e^x lui-même.

Réponse. $F(x) = -\dfrac{1}{x}$; $G(x) = e^x$.

Rappel de cours. Primitives utiles : $\frac{1}{x^2} \to -\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x} \to \ln(x)$ (sur $]0;+\infty[$), $e^x \to e^x$.

Correction de l'exercice 10 – Primitive de 1/x

Sur $]0;+\infty[$, une primitive de $\dfrac{1}{x}$ est $\ln(x)$ (car $(\ln(x))' = \frac{1}{x}$).

Pour $\dfrac{3}{x} = 3 \times \dfrac{1}{x}$, une primitive est $3\ln(x)$.

Réponse. $F(x) = \ln(x)$; $G(x) = 3\ln(x)$.

Rappel de cours. Sur $]0;+\infty[$, $\frac{1}{x}$ a pour primitive $\ln(x)$. Un facteur constant se conserve dans la primitive.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 11 – Primitive de cos et sin

$(\sin x)' = \cos x$, donc une primitive de $\cos x$ est $\sin x$.

$(\cos x)' = -\sin x$, donc $(-\cos x)' = \sin x$: une primitive de $\sin x$ est $-\cos x$.

Réponse. $F(x) = \sin x$; $G(x) = -\cos x$.

Rappel de cours. Primitive de $\cos x$: $\sin x$. Primitive de $\sin x$: $-\cos x$ (attention au signe moins).

Erreur fréquente. Le signe moins se trouve sur la primitive de sin, pas de cos. Vérifier en dérivant lève le doute.

Correction de l'exercice 12 – Fonction affine composée

f est de la forme $\frac{1}{2}u'u^4$ avec $u = 2x+1$, $u' = 2$. Une primitive de $u'u^4$ est $\frac{u^5}{5}$, donc $F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{(2x+1)^5}{5} = \frac{(2x+1)^5}{10}$.

$(e^{-x})' = -e^{-x}$, donc une primitive de e^{-x} est $G(x) = -e^{-x}$.

Réponse. $F(x) = \dfrac{(2x+1)^5}{10}$ et $G(x) = -e^{-x}$.

Rappel de cours. Une primitive de $g(ax+b)$ est $\frac{1}{a}G(ax+b)$, où G est une primitive de g.

Erreur fréquente. Oublier le $\frac{1}{2}$: la dérivée de $\frac{(2x+1)^5}{5}$ est $2(2x+1)^4$, le double de f.

Correction de l'exercice 13 – Condition initiale

Solution générale : $y(x) = Ce^{2x}$.

Condition $y(0) = 5$: $Ce^0 = C = 5$.

Donc $y(x) = 5e^{2x}$.

Réponse. $y(x) = 5e^{2x}$.

Rappel de cours. Une condition initiale $y(x_0) = y_0$ fixe la constante C : la solution devient unique.

Correction de l'exercice 14 – Condition initiale (2)

Solution générale : $y(x) = Ce^{-3x}$. Condition $y(0) = 2$: $C = 2$.

Donc $y(x) = 2e^{-3x}$, et $y(1) = 2e^{-3} \approx 0{,}0996$.

Réponse. $y(x) = 2e^{-3x}$ et $y(1) = 2e^{-3} \approx 0{,}1$.

Rappel de cours. Après avoir trouvé la solution, une « valeur en un point » s'obtient en remplaçant x.

Correction de l'exercice 15 – Solution de y' = ay + b

Pour $y' = ay + b$, les solutions sont $y(x) = Ce^{ax} - \dfrac{b}{a}$.

Ici $a = 2$, $b = 6$, donc $-\dfrac{b}{a} = -\dfrac{6}{2} = -3$.

$y(x) = Ce^{2x} - 3$.

Réponse. $y(x) = Ce^{2x} - 3$, $C \in \mathbb{R}$.

Rappel de cours. Solutions de $y' = ay + b$: $y = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$. Le terme constant $-\frac{b}{a}$ est la

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

solution « d'équilibre ».

Correction de l'exercice 16 – Condition initiale avec second membre

Solution constante : $0 = -2c + 4 \Leftrightarrow c = 2$.

Solutions générales : $y(x) = Ce^{-2x} + 2$, $C \in \mathbb{R}$.

$y(0) = C + 2 = 0 \Leftrightarrow C = -2$. Donc $y(x) = 2 - 2e^{-2x}$.

Réponse. $y(x) = 2 - 2e^{-2x}$.

Rappel de cours. Les solutions de $y' = ay + b$ ($a \neq 0$) sont $Ce^{ax} - \frac{b}{a}$.

Correction de l'exercice 17 – Forme u'uⁿ

On reconnaît la forme $u'u^n$ avec $u = x^2 + 1$ ($u' = 2x$) et $n = 3$.

Une primitive de $u'u^n$ est $\frac{u^{n+1}}{n+1}$, ici $\frac{(x^2+1)^4}{4}$.

Vérification : $\left(\frac{(x^2+1)^4}{4}\right)' = \frac{4(x^2+1)^3 \times 2x}{4} = 2x(x^2+1)^3$. ✓

Réponse. $F(x) = \frac{(x^2+1)^4}{4}$ $(+C)$.

Rappel de cours. Forme $u'u^n$ (avec $n \neq -1$) : primitive $\frac{u^{n+1}}{n+1}$. Repérer u et vérifier que u' est bien en facteur.

Correction de l'exercice 18 – Forme u'/u

On reconnaît $\frac{u'}{u}$ avec $u = x^2 + 1 > 0$ et $u' = 2x$.

Une primitive de $\frac{u'}{u}$ est $\ln(u)$ (quand $u > 0$), ici $\ln(x^2 + 1)$.

Réponse. $F(x) = \ln(x^2 + 1)$ $(+C)$.

Rappel de cours. Forme $\frac{u'}{u}$: primitive $\ln(u)$ si $u > 0$ (sinon $\ln|u|$). Très fréquent au bac.

Correction de l'exercice 19 – Forme u'eᵘ

$2xe^{x^2}$ est de la forme $u'e^u$ avec $u = x^2$, $u' = 2x$. Primitive : $e^u = e^{x^2}$.

e^{3x} : on cherche F telle que $F' = e^{3x}$. Avec $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x}$, $F'(x) = e^{3x}$. ✓

Réponse. Primitives : e^{x^2} et $\frac{1}{3}e^{3x}$.

Rappel de cours. Forme $u'e^u$: primitive e^u. Pour e^{ax}, primitive $\frac{1}{a}e^{ax}$.

Correction de l'exercice 20 – Primitive avec condition initiale

Les primitives de f sont $F(x) = x^2 + x + C$, avec C constante.

Condition $F(0) = 3$: $0 + 0 + C = 3$, donc $C = 3$.

Donc $F(x) = x^2 + x + 3$.

Réponse. $F(x) = x^2 + x + 3$.

Rappel de cours. Une condition $F(x_0) = y_0$ fixe la constante C : il y a alors une unique primitive vérifiant cette condition.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 21 – La forme u′/u²

Avec $u = x^2 + 4$, $u' = 2x$: $f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{u'}{u^2}$.

Une primitive de $\frac{u'}{u^2}$ est $-\frac{1}{u}$ (car $\left(-\frac{1}{u}\right)' = \frac{u'}{u^2}$).

$F(x) = -\dfrac{1}{2(x^2+4)}$.

Réponse. $F(x) = -\dfrac{1}{2(x^2+4)}$.

Rappel de cours. Repérer u' dans l'expression, quitte à ajuster par un facteur constant.

Correction de l'exercice 22 – Solution particulière constante

Une solution constante $y = k$ vérifie $y' = 0$, donc $0 = 2k + 6$.

$2k = -6$, soit $k = -3$.

La solution constante est $y = -3$ (on retrouve $-\frac{b}{a}$).

Réponse. $y = -3$.

Rappel de cours. La solution constante de $y' = ay + b$ s'obtient en posant $y' = 0$: $k = -\frac{b}{a}$. C'est la valeur vers laquelle tendent les solutions si $a < 0$.

Correction de l'exercice 23 – y' = ay + b avec condition

Solution générale : $y(x) = Ce^{2x} - 3$.

Condition $y(0) = 1$: $Ce^0 - 3 = 1$, soit $C - 3 = 1$, donc $C = 4$.

$y(x) = 4e^{2x} - 3$.

Réponse. $y(x) = 4e^{2x} - 3$.

Rappel de cours. On applique la condition à la solution générale complète (terme exponentiel + constante) pour trouver C.

Erreur fréquente. Ne pas oublier le -3 en appliquant la condition : $y(0) = C - 3$, pas seulement C.

Correction de l'exercice 24 – Reconnaître l'équation depuis une modélisation

« Variation proportionnelle à l'effectif » se traduit par $N'(t) = 0{,}04\,N(t)$.

C'est une équation $y' = ay$ avec $a = 0{,}04$: solutions $N(t) = Ce^{0{,}04t}$.

Réponse. $N'(t) = 0{,}04\,N(t)$; $N(t) = Ce^{0{,}04t}$.

Rappel de cours. « Vitesse proportionnelle à la quantité » $\Rightarrow y' = ay$: croissance exponentielle ($a > 0$) ou décroissance ($a < 0$).

Correction de l'exercice 25 – Désintégration radioactive

Solution générale $N(t) = Ce^{-0{,}1t}$. Condition $N(0) = 200$: $C = 200$, donc $N(t) = 200e^{-0{,}1t}$.

$N(10) = 200e^{-0{,}1 \times 10} = 200e^{-1} \approx 200 \times 0{,}368 = 73{,}6$ g.

Réponse. $N(t) = 200e^{-0{,}1t}$; $N(10) \approx 73{,}6$ g.

Rappel de cours. La désintégration suit $N' = -\lambda N$, solution $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$: décroissance exponentielle.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 26 – Temps de doublement

$P(t) = P_0 e^{0{,}03t}$.

$P(t) = 2P_0 \Leftrightarrow e^{0{,}03t} = 2 \Leftrightarrow 0{,}03t = \ln 2 \Leftrightarrow t = \dfrac{\ln 2}{0{,}03} \approx 23{,}1$.

Le résultat ne dépend pas de P_0 : quelle que soit la population de départ, elle double en environ 23 ans.

Réponse. Environ 23,1 ans.

Rappel de cours. Pour une croissance exponentielle e^{kt}, le temps de doublement vaut $\dfrac{\ln 2}{k}$.

Correction de l'exercice 27 – Type bac : reconnaître la bonne forme

Le numérateur est x, or la dérivée de $x^2 + 1$ est $2x$. On fait apparaître $2x$: $\dfrac{x}{x^2+1} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{2x}{x^2+1}$.

$\dfrac{2x}{x^2+1}$ est de la forme $\dfrac{u'}{u}$ ($u = x^2 + 1 > 0$) : primitive $\ln(x^2 + 1)$.

Donc une primitive de f est $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2 + 1)$.

Réponse. $F(x) = \dfrac{1}{2}\ln(x^2 + 1)$ $(+C)$.

Rappel de cours. Astuce : quand u' manque un facteur constant, on l'introduit en multipliant/divisant (ici par 2) pour retomber sur une forme connue.

Erreur fréquente. Ne pas confondre $\dfrac{x}{x^2+1}$ (primitive en ln) et $\dfrac{1}{x^2+1}$ (qui n'est pas au programme des primitives usuelles).

Correction de l'exercice 28 – Type bac : primitive d'un produit reconnu

Il suffit de dériver F et de retrouver f.

$F(x) = x\,e^x$, produit : $F'(x) = 1 \times e^x + x \times e^x = (1 + x)e^x = (x + 1)e^x$.

$F'(x) = f(x)$: donc F est bien une primitive de f.

Réponse. $F'(x) = (x + 1)e^x = f(x)$, donc $F(x) = x\,e^x$ est une primitive de f.

Rappel de cours. Pour prouver que F est une primitive de f, on n'intègre pas : on dérive F et on vérifie $F' = f$.

Correction de l'exercice 29 – Type bac : primitive et tableau de variations

Primitives de f : $F(x) = x^3 - 12x + C$. Condition $F(0) = 5$: $C = 5$, donc $F(x) = x^3 - 12x + 5$.

Pour les variations de F, on étudie $F' = f$: $f(x) = 3x^2 - 12 = 3(x - 2)(x + 2)$, positif à l'extérieur de $[-2; 2]$, négatif entre.

Donc F croît sur $]-\infty; -2]$, décroît sur $[-2; 2]$, croît sur $[2; +\infty[$.

Réponse. $F(x) = x^3 - 12x + 5$; croissante, puis décroissante sur $[-2; 2]$, puis croissante.

Rappel de cours. Les variations de F se lisent sur le signe de $F' = f$: c'est le lien entre primitive et fonction de départ.

Correction de l'exercice 30 – Type bac : primitive de cos(2x)

On sait que $(\sin(2x))' = 2\cos(2x)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Donc une primitive de $\cos(2x)$ est $F(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$ (on vérifie : $F'(x) = \frac{1}{2} \times 2\cos(2x) = \cos(2x)$).

Réponse. $F(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$ $(+C)$.

Rappel de cours. Primitive de $\cos(ax)$: $\frac{1}{a}\sin(ax)$.

Correction de l'exercice 31 – Type bac : reconnaître la forme u'/u

On pose $u = x^2 + x + 1$, alors $u' = 2x + 1$: f est de la forme $\frac{u'}{u}$.

De plus $u > 0$ (discriminant $\Delta = 1 - 4 = -3 < 0$), donc une primitive est $\ln(u)$.

$F(x) = \ln(x^2 + x + 1)$.

Réponse. $F(x) = \ln(x^2 + x + 1)$ $(+C)$.

Rappel de cours. Forme $\frac{u'}{u}$ avec $u > 0$: primitive $\ln(u)$.

Correction de l'exercice 32 – Type bac : reconnaître des formes et primitive imposée

$x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 4 \geq 4 > 0$: le dénominateur ne s'annule jamais. Le numérateur $2x - 2$ est la dérivée du dénominateur, donc $f = \frac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^2 - 2x + 5 > 0$. Les primitives sont $F(x) = \ln(x^2 - 2x + 5) + C$.

$F(1) = \ln(1 - 2 + 5) + C = \ln 4 + C$. On veut $F(1) = 0$, donc $C = -\ln 4$ et $F(x) = \ln(x^2 - 2x + 5) - \ln 4 = \ln\left(\frac{x^2 - 2x + 5}{4}\right)$.

$g(x) = xe^{x^2} = \frac{1}{2}(2x)e^{x^2} = \frac{1}{2}u'e^u$ avec $u = x^2$. Une primitive est $G(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$.

$h(x) = \sin(x)\cos^3(x) = -u'u^3$ avec $u = \cos x$ ($u' = -\sin x$). Une primitive est $H(x) = -\frac{u^4}{4} = -\frac{\cos^4(x)}{4}$.

Réponse. $F(x) = \ln(x^2 - 2x + 5) + C$; celle qui s'annule en 1 est $\ln\frac{x^2 - 2x + 5}{4}$; $G(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$; $H(x) = -\frac{\cos^4 x}{4}$.

Rappel de cours. Faire apparaître la dérivée u' (quitte à multiplier par une constante) pour reconnaître $\frac{u'}{u}$, $u'e^u$ ou $u'u^n$.

Correction de l'exercice 33 – Type bac : une primitive du logarithme

1) $F'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1 = \ln x$. Donc F est une primitive de ln.

2) Les primitives sont $x\ln x - x + C$. $G(1) = 0 - 1 + C = 0 \Leftrightarrow C = 1$: $G(x) = x\ln x - x + 1$.

3) $\int_1^e \ln x\,dx = F(e) - F(1) = (e - e) - (0 - 1) = 1$.

Réponse. $G(x) = x\ln x - x + 1$ et $\int_1^e \ln x\,dx = 1$.

Rappel de cours. Deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante, fixée par une condition initiale.

Correction de l'exercice 34 – Type bac : refroidissement (loi de Newton)

Posons $\theta(t) = 20 + Ce^{-0{,}2t}$. Alors $\theta'(t) = -0{,}2\,Ce^{-0{,}2t}$. Et $-0{,}2(\theta - 20) = -0{,}2\,Ce^{-0{,}2t}$: égalité vérifiée. ✓

Condition $\theta(0) = 80$: $20 + C = 80$, donc $C = 60$. Ainsi $\theta(t) = 20 + 60e^{-0{,}2t}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$\theta(5) = 20 + 60e^{-1} \approx 20 + 60 \times 0{,}368 = 20 + 22{,}1 = 42{,}1$ °C.

Réponse. $\theta(t) = 20 + 60e^{-0{,}2t}$; $\theta(5) \approx 42{,}1$ °C.

Rappel de cours. Loi de Newton : $\theta' = -k(\theta - \theta_{\text{amb}})$. La solution tend vers la température ambiante quand $t \to +\infty$.

Correction de l'exercice 35 – Type bac : équation à second membre constant

On isole y' : $y' = -3y + 12$, donc $a = -3$, $b = 12$.

Solution générale : $y(x) = Ce^{-3x} - \dfrac{b}{a} = Ce^{-3x} - \dfrac{12}{-3} = Ce^{-3x} + 4$.

Condition $y(0) = 0$: $C + 4 = 0$, donc $C = -4$. Ainsi $y(x) = -4e^{-3x} + 4 = 4(1 - e^{-3x})$.

Réponse. $y(x) = 4(1 - e^{-3x})$.

Rappel de cours. Mettre sous forme $y' = ay + b$ avant d'appliquer la formule. Ici $-\frac{b}{a} = -\frac{12}{-3} = +4$ (attention aux signes).

Erreur fréquente. Le signe de $-\frac{b}{a}$: avec $a = -3$ et $b = 12$, on obtient $+4$, pas -4.

Correction de l'exercice 36 – Type bac : limite d'une solution

Quand $x \to +\infty$, $e^{-3x} \to 0$ (exponentielle de $-\infty$).

Donc $y(x) \to 4(1 - 0) = 4$.

Interprétation : la fonction se stabilise vers la valeur d'équilibre 4 (la solution constante).

Réponse. $\lim_{x \to +\infty} y(x) = 4$: stabilisation vers l'équilibre.

Rappel de cours. Pour $a < 0$, le terme $Ce^{ax} \to 0$ et la solution tend vers la valeur d'équilibre $-\frac{b}{a}$.

Correction de l'exercice 37 – Type bac : circuit électrique RC

Avec $\tau = 2$, $E = 10$: $q' = -0{,}5\,q + 5$, donc $a = -0{,}5$, $b = 5$.

Solution générale : $q(t) = Ce^{-0{,}5t} - \dfrac{b}{a} = Ce^{-0{,}5t} - \dfrac{5}{-0{,}5} = Ce^{-0{,}5t} + 10$.

Condition $q(0) = 0$: $C + 10 = 0$, donc $C = -10$. Ainsi $q(t) = 10(1 - e^{-0{,}5t})$.

Réponse. $q(t) = 10(1 - e^{-0{,}5t})$.

Rappel de cours. Charge d'un condensateur : $q(t) = Q_{\max}(1 - e^{-t/\tau})$, croissance vers la charge maximale $Q_{\max} = E$.

Correction de l'exercice 38 – Type bac : modèle avec valeur d'équilibre

Forme $y' = ay + b$ avec $a = -0{,}5$, $b = 100$. Solutions : $y = Ce^{-0{,}5t} - \dfrac{b}{a} = Ce^{-0{,}5t} + 200$.

$y(0) = C + 200 = 50$, donc $C = -150$. Ainsi $y(t) = 200 - 150e^{-0{,}5t}$.

En $+\infty$, $e^{-0{,}5t} \to 0$, donc $y(t) \to 200$ (valeur d'équilibre).

Réponse. $y(t) = 200 - 150e^{-0{,}5t}$; $\lim_{t \to +\infty} y(t) = 200$.

Rappel de cours. $y' = ay + b \Rightarrow y = Ce^{at} - \frac{b}{a}$; pour $a < 0$, la limite est l'équilibre $-\frac{b}{a}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 39 – Type bac : équation $y' = -0{,}5y + 10$ et valeur d'équilibre

(E): $y' = -0{,}5y + 10$ est de la forme $y' = ay + b$ avec $a = -0{,}5$, $b = 10$. Ses solutions sont $y(t) = Ce^{-0{,}5t} - \frac{b}{a} = Ce^{-0{,}5t} + 20$, $C \in \mathbb{R}$ (car $-\frac{b}{a} = -\frac{10}{-0{,}5} = 20$).

$y(0) = C + 20 = 4$, donc $C = -16$ et $y(t) = 20 - 16e^{-0{,}5t}$.

$y'(t) = -16 \times (-0{,}5)e^{-0{,}5t} = 8e^{-0{,}5t} > 0$: y est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

Comme $-0{,}5 < 0$, $e^{-0{,}5t} \to 0$ en $+\infty$, donc $y(t) \to 20$. La grandeur tend vers la valeur d'équilibre 20 (la solution constante de (E)).

$y(t) = 15 \Leftrightarrow 20 - 16e^{-0{,}5t} = 15 \Leftrightarrow e^{-0{,}5t} = \frac{5}{16} \Leftrightarrow -0{,}5t = \ln\frac{5}{16} \Leftrightarrow t = 2\ln\frac{16}{5} \approx 2{,}33$.

Réponse. $y(t) = 20 - 16e^{-0{,}5t}$; croissante ; $\lim_{+\infty} y = 20$ (équilibre) ; $y = 15$ en $t = 2\ln\frac{16}{5} \approx 2{,}33$.

Rappel de cours. $y' = ay + b$ a pour solutions $y = Ce^{at} - \frac{b}{a}$; la valeur d'équilibre $-\frac{b}{a}$ est la limite quand $a < 0$.

Correction de l'exercice 40 – Type bac : second membre affine

1) $p' = a$ et $2p - 4x = (2a - 4)x + 2b$. Pour tout x : $2a - 4 = 0$ et $2b = a$, donc $a = 2$, $b = 1$: $p(x) = 2x + 1$.

2) $(y - p)' = y' - p' = y' - (2p - 4x)$. Donc
$(y - p)' = 2(y - p) \Leftrightarrow y' - 2p + 4x = 2y - 2p \Leftrightarrow y' = 2y - 4x$.

3) $y - p = Ce^{2x}$, donc $y(x) = Ce^{2x} + 2x + 1$. $y(0) = C + 1 = 3 \Leftrightarrow C = 2$.

Réponse. $p(x) = 2x + 1$; $y(x) = 2e^{2x} + 2x + 1$.

Rappel de cours. Solution générale = solution de l'équation homogène + une solution particulière.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).