Primitives et équations différentielles — Terminale spécialité

40 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés

Présentation

Une primitive F d'une fonction f est une fonction dont la dérivée est f : $F' = f$. Calculer une primitive, c'est « remonter » la dérivation. Deux primitives d'une même fonction diffèrent d'une constante. Une équation différentielle relie une fonction y à sa dérivée y' : au programme, $y' = ay$ (solutions Ce^{ax}) et $y' = ay + b$, avec la solution vérifiant une condition initiale. Ces exercices corrigés couvrent primitives de référence, formes $u'u^n$, $\frac{u'}{u}$, $u'e^u$, primitive vérifiant une condition, puis vérification de solutions, résolution de $y' = ay$ et $y' = ay + b$ et modélisation type bac. Difficulté croissante, correction d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-specialite/primitives

Exercice 1 – Primitives de référence

Donner une primitive de $f(x) = 3$ et de $g(x) = x$.

Exercice 2 – Primitive de x^n

Donner une primitive de $f(x) = x^3$ et de $g(x) = x^4$.

Exercice 3 – Primitive d'un polynôme

Déterminer une primitive de $f(x) = 2x^2 - 4x + 5$.

Exercice 4 – Puissances négatives et racine

Donner une primitive de $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$ et de $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ sur $]0\,;+\infty[$.

Exercice 5 – Vérifier une solution

Montrer que $y(x) = e^{3x}$ est solution de l'équation $y' = 3y$.

Exercice 6 – Solution générale de y' = ay

Donner toutes les solutions de l'équation $y' = 2y$.

Exercice 7 – Identifier a

Donner la forme des solutions de $y' = -0{,}5\,y$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 8 – Vérifier une solution de y′ = −y + 3

Montrer que $y(x) = 2e^{-x} + 3$ est solution de $y' = -y + 3$.

Exercice 9 – Primitive de 1/x² et de eˣ

Donner une primitive de $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ (sur $]0;+\infty[$) et de $g(x) = e^x$.

Exercice 10 – Primitive de 1/x

Donner une primitive de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$, puis de $g(x) = \dfrac{3}{x}$.

Exercice 11 – Primitive de cos et sin

Donner une primitive de $f(x) = \cos x$ et de $g(x) = \sin x$.

Exercice 12 – Fonction affine composée

Donner une primitive de $f(x) = (2x+1)^4$ et de $g(x) = e^{-x}$.

Exercice 13 – Condition initiale

Résoudre $y' = 2y$ avec la condition $y(0) = 5$.

Exercice 14 – Condition initiale (2)

Résoudre $y' = -3y$ avec $y(0) = 2$, puis calculer $y(1)$.

Exercice 15 – Solution de y’ = ay + b

Donner la solution générale de $y' = 2y + 6$.

Exercice 16 – Condition initiale avec second membre

Résoudre $y' = -2y + 4$ avec $y(0) = 0$.

Exercice 17 – Forme u’uⁿ

Déterminer une primitive de $f(x) = 2x(x^2+1)^3$.

Exercice 18 – Forme u’/u

Déterminer une primitive de $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 19 – Forme u’eᵘ

Déterminer une primitive de $f(x) = 2x\,e^{x^2}$ puis de $g(x) = e^{3x}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 20 – Primitive avec condition initiale

Déterminer la primitive F de $f(x) = 2x + 1$ telle que $F(0) = 3$.

Exercice 21 – La forme u′/u²

Déterminer une primitive de $f(x) = \dfrac{x}{(x^2+4)^2}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 22 – Solution particulière constante

Pour l'équation $y' = 2y + 6$, déterminer la solution constante (solution d'équilibre).

Exercice 23 – y' = ay + b avec condition

Résoudre $y' = 2y + 6$ avec $y(0) = 1$.

Exercice 24 – Reconnaître l'équation depuis une modélisation

Une population augmente proportionnellement à son effectif $N(t)$, avec un taux 0,04 par an. Écrire l'équation différentielle vérifiée par N et donner sa solution générale.

Exercice 25 – Désintégration radioactive

Une quantité radioactive vérifie $N' = -0{,}1\,N$ avec $N(0) = 200$ (en grammes). 1) Exprimer $N(t)$. 2) Calculer la quantité restante à $t = 10$.

Exercice 26 – Temps de doublement

Une population vérifie $P' = 0{,}03P$ (t en années), avec $P(0) = P_0$. Au bout de combien de temps la population aura-t-elle doublé ?

Exercice 27 – Type bac : reconnaître la bonne forme

Déterminer une primitive de $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$.

Exercice 28 – Type bac : primitive d'un produit reconnu

On admet que $f(x) = (x+1)e^x$. Montrer que $F(x) = x\,e^x$ est une primitive de f.

Exercice 29 – Type bac : primitive et tableau de variations

Soit $f(x) = 3x^2 - 12$. 1) Déterminer la primitive F vérifiant $F(0) = 5$. 2) Étudier les variations de F.

Exercice 30 – Type bac : primitive de cos(2x)

Déterminer une primitive de $f(x) = \cos(2x)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 31 – Type bac : reconnaître la forme u'/u

Déterminer une primitive de $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$.

Exercice 32 – Type bac : reconnaître des formes et primitive imposée

On rappelle les formes $\dfrac{u'}{u}$ (primitive $\ln|u|$), $u'e^u$ (primitive e^u) et $u'u^n$ (primitive $\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$). On cherche des primitives sur l'intervalle indiqué.

1. Soit $f(x) = \dfrac{2x-2}{x^2-2x+5}$ sur $\mathbb{R}$. Justifier que le dénominateur ne s'annule pas, puis donner toutes les primitives de f.

2. Déterminer la primitive F de f vérifiant $F(1) = 0$.

3. Donner une primitive de $g(x) = x\,e^{x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

4. Donner une primitive de $h(x) = \sin(x)\cos^3(x)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 33 – Type bac : une primitive du logarithme

On considère $F(x) = x\ln x - x$ sur $]0\,;+\infty[$.

1. Montrer que F est une primitive de ln.

2. Déterminer la primitive G de ln qui s'annule en 1.

3. Calculer $\int_1^e \ln x\,dx$.

Exercice 34 – Type bac : refroidissement (loi de Newton)

La température d'un objet vérifie $\theta' = -0{,}2(\theta - 20)$, avec $\theta(0) = 80$ (en °C, ambiance 20°). 1) Vérifier que $\theta(t) = 20 + Ce^{-0{,}2t}$ est solution. 2) Déterminer C, puis $\theta(5)$.

Exercice 35 – Type bac : équation à second membre constant

Résoudre $y' + 3y = 12$ avec $y(0) = 0$ (réécrire d'abord sous la forme $y' = ay + b$).

Exercice 36 – Type bac : limite d'une solution

Soit $y(x) = 4(1 - e^{-3x})$, solution de l'exercice précédent. Déterminer $\lim_{x\to+\infty} y(x)$ et interpréter.

Exercice 37 – Type bac : circuit électrique RC

La charge $q(t)$ d'un condensateur vérifie $q' = -\dfrac{1}{\tau}q + \dfrac{E}{\tau}$ avec $\tau = 2$, $E = 10$, et $q(0) = 0$. Déterminer $q(t)$.

Exercice 38 – Type bac : modèle avec valeur d'équilibre

Une grandeur vérifie $y' = -0{,}5\,y + 100$ avec $y(0) = 50$. Déterminer $y(t)$ puis $\lim_{t\to+\infty} y(t)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 39 – Type bac : équation $y' = -0{,}5y + 10$ et valeur d'équilibre

On étudie une grandeur $y(t)$ ($t \geq 0$) solution de l'équation différentielle (E): $y' = -0{,}5\,y + 10$, avec la condition initiale $y(0) = 4$.

1. Déterminer les solutions générales de l'équation (E).

2. Déterminer la solution y vérifiant $y(0) = 4$.

3. Étudier le sens de variation de y sur $[0; +\infty[$.

4. Déterminer la limite de y en $+\infty$ et interpréter (valeur d'équilibre).

5. Déterminer l'instant t (valeur exacte puis approchée à 10^{-2}) pour lequel $y(t) = 15$.

Exercice 40 – Type bac : second membre affine

On considère (E):$y' = 2y - 4x$.

1. Déterminer les réels a et b tels que $p(x) = ax + b$ soit solution de (E).

2. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si $y - p$ est solution de $y' = 2y$.

3. En déduire la solution de (E) telle que $y(0) = 3$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).