Probabilités conditionnelles — Terminale spécialité

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

La probabilité conditionnelle $P_A(B)$ est la probabilité de B sachant que A est réalisé : $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$. On la visualise avec un arbre pondéré et on relie le tout par la formule des probabilités totales. Ces exercices corrigés couvrent arbres, formule des probabilités totales, indépendance et formule de Bayes (probabilités « inversées »), du plus simple au type bac. Difficulté croissante, correction d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-specialite/probabilites-conditionnelles

Exercice 1 – Définition d'une conditionnelle

On donne $P(A) = 0{,}4$ et $P(A \cap B) = 0{,}1$. Calculer $P_A(B)$.

Exercice 2 – Intersection à partir d'une conditionnelle

On donne $P(A) = 0{,}6$ et $P_A(B) = 0{,}3$. Calculer $P(A \cap B)$.

Exercice 3 – Lire un arbre pondéré

Un arbre indique $P(A) = 0{,}7$, $P_A(B) = 0{,}2$. Calculer la probabilité du chemin A puis B.

Exercice 4 – Chemin par la branche contraire

Sur un arbre pondéré, $P(A) = 0{,}25$ et $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}4$. Calculer $P(\overline{A} \cap B)$.

Exercice 5 – Compléter un arbre

Sur un arbre, la première branche donne $P(A) = 0{,}3$. Quelle est la probabilité $P(\overline{A})$? Si $P_A(B) = 0{,}8$, que vaut $P_A(\overline{B})$?

Exercice 6 – Formule des probabilités totales

On donne $P(A) = 0{,}6$, $P_A(B) = 0{,}5$ et $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}2$. Calculer $P(B)$.

Exercice 7 – Tableau croisé

Dans une classe de 30 élèves, 18 font de l'allemand (A), et parmi eux 12 font aussi de l'espagnol (E). On choisit un élève au hasard. Calculer $P_A(E)$.

Exercice 8 – Cœur et roi : indépendants ?

On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. C : « la carte est un cœur » ; K : « la carte est un roi ». Les événements C et K sont-ils indépendants ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Tester l'indépendance

On donne $P(A) = 0{,}5$, $P(B) = 0{,}4$ et $P(A \cap B) = 0{,}2$. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 10 – Probabilité totale et arbre complet

Une urne 1 (choisie avec proba 0,5) contient 3 boules rouges sur 5 ; une urne 2 (proba 0,5) contient 1 rouge sur 4. On tire une boule. Calculer la probabilité R qu'elle soit rouge.

Exercice 11 – Probabilité inversée (Bayes)

Avec l'exemple précédent ($P(R) = 0{,}425$), calculer la probabilité que la boule rouge provienne de l'urne 1, c'est-à-dire $P_R(U_1)$.

Exercice 12 – Indépendance et calcul

A et B sont indépendants avec $P(A) = 0{,}3$ et $P(B) = 0{,}5$. Calculer $P(A \cap B)$ puis $P(A \cup B)$.

Exercice 13 – Partition en trois : la météo et les retards

Un jour, il fait beau avec une probabilité de 0,5, nuageux avec 0,3, pluvieux avec 0,2. Le bus est en retard avec une probabilité de 0,05 par beau temps, 0,1 par temps nuageux et 0,4 sous la pluie.

1. Calculer la probabilité que le bus soit en retard.

2. Le bus est en retard. Quelle est la probabilité qu'il pleuve ?

Exercice 14 – Type bac : test médical (1)

Une maladie touche 2% d'une population. Un test est positif dans 95% des cas si la personne est malade (M), et positif dans 3% des cas si elle est saine. On note T « test positif ». Calculer $P(T)$.

Exercice 15 – Type bac : test médical (2 - Bayes)

En reprenant le test ($P(T) \approx 0{,}0484$), calculer la probabilité qu'une personne au test positif soit réellement malade, $P_T(M)$. Commenter.

Exercice 16 – Type bac : succession d'épreuves

Un joueur a $P = 0{,}8$ de réussir un tir. S'il réussit, il rejoue ; sinon il s'arrête. Calculer la probabilité qu'il réussisse exactement ses deux premiers tirs et rate le troisième (tirs indépendants).

Exercice 17 – Type bac : arbre à trois niveaux

Trois machines produisent respectivement 50%, 30% et 20% des pièces, avec des taux de défaut 2%, 4% et 5%. Calculer la probabilité D qu'une pièce prise au hasard soit défectueuse.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 18 – Type bac : indépendance par les conditionnelles

On donne $P(A) = 0{,}4$, $P(B) = 0{,}3$ et $P_A(B) = 0{,}3$. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Exercice 19 – Type bac : deux machines et formule de Bayes

Une usine fabrique des pièces avec deux machines. La machine A produit 70% des pièces, la machine B les 30% restants. Parmi les pièces de A, 2% sont défectueuses ; parmi celles de B, 6% le sont. On prélève une pièce au hasard. On note A, B les événements « la pièce vient de A / de B » et D « la pièce est défectueuse ».

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.

2. Calculer $P(A \cap D)$.

3. Démontrer que $P(D) = 0{,}032$.

4. La pièce prélevée est défectueuse. Calculer la probabilité qu'elle provienne de la machine A, arrondie à 10^{-3}.

5. Les événements A et D sont-ils indépendants ? Justifier.

Exercice 20 – Type bac : une suite de probabilités

Un élève est en retard le jour 0 avec une probabilité $p_0 = 0{,}5$. S'il est en retard un jour, il l'est le lendemain avec une probabilité 0,3 ; s'il est à l'heure, il est en retard le lendemain avec une probabilité 0,1. On note p_n la probabilité d'être en retard le jour n.

1. Montrer que $p_{n+1} = 0{,}2p_n + 0{,}1$.

2. On pose $v_n = p_n - 0{,}125$. Montrer que (v_n) est géométrique, puis exprimer p_n.

3. Déterminer la limite de (p_n) et l'interpréter.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Définition d'une conditionnelle

Formule : $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

$P_A(B) = \dfrac{0{,}1}{0{,}4} = 0{,}25$.

Réponse. $P_A(B) = 0{,}25$.

Rappel de cours. $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$: probabilité de B « sachant A ». On divise l'intersection par la probabilité de la condition.

Correction de l'exercice 2 – Intersection à partir d'une conditionnelle

On part de $P_A(B) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}$, donc $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.

$P(A \cap B) = 0{,}6 \times 0{,}3 = 0{,}18$.

Réponse. $P(A \cap B) = 0{,}18$.

Rappel de cours. Sur un arbre, la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités rencontrées : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.

Correction de l'exercice 3 – Lire un arbre pondéré

La probabilité d'un chemin sur un arbre est le produit des probabilités des branches : $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.

$= 0{,}7 \times 0{,}2 = 0{,}14$.

Réponse. $P(A \cap B) = 0{,}14$.

Rappel de cours. Règle de l'arbre : on multiplie le long d'un chemin. La somme des branches issues d'un même nœud vaut 1.

Correction de l'exercice 4 – Chemin par la branche contraire

$P(\overline{A}) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$.

Probabilité d'un chemin = produit des probabilités le long des branches : $P(\overline{A} \cap B) = P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B) = 0{,}75 \times 0{,}4 = 0{,}3$.

Réponse. $P(\overline{A} \cap B) = 0{,}3$.

Rappel de cours. $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$.

Correction de l'exercice 5 – Compléter un arbre

Les branches issues d'un nœud ont une somme égale à 1 : $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}3 = 0{,}7$.

De même $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.

Réponse. $P(\overline{A}) = 0{,}7$; $P_A(\overline{B}) = 0{,}2$.

Rappel de cours. À chaque nœud, les probabilités des branches se complètent à 1. $P(\overline{B}) = 1 - P(B)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 6 – Formule des probabilités totales

Formule des probabilités totales : $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) = P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B)$.

$P(\overline{A}) = 0{,}4$. Donc $P(B) = 0{,}6 \times 0{,}5 + 0{,}4 \times 0{,}2 = 0{,}30 + 0{,}08 = 0{,}38$.

Réponse. $P(B) = 0{,}38$.

Rappel de cours. Probabilités totales : on additionne les probabilités de tous les chemins menant à B (ici via A et via $\overline{A}$).

Correction de l'exercice 7 – Tableau croisé

$P(A) = \frac{18}{30}$ et $P(A \cap E) = \frac{12}{30}$.

$P_A(E) = \frac{P(A \cap E)}{P(A)} = \frac{12\,/\,30}{18\,/\,30} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$.

Réponse. $P_A(E) = \frac{2}{3} \approx 0{,}67$.

Rappel de cours. Avec des effectifs, la conditionnelle « sachant A » revient à restreindre l'univers à A : ici $\frac{12}{18}$.

Correction de l'exercice 8 – Cœur et roi : indépendants ?

$P(C) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$ et $P(K) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$.

$C \cap K$: le roi de cœur, $P(C \cap K) = \frac{1}{32}$.

$P(C) \times P(K) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{32} = P(C \cap K)$: C et K sont indépendants.

Réponse. Oui, C et K sont indépendants.

Rappel de cours. Indépendance : $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, ou de façon équivalente $P_A(B) = P(B)$. Ici, savoir que la carte est un cœur ne change pas la proportion de rois.

Erreur fréquente. Indépendants ne veut pas dire incompatibles : $C \cap K$ n'est pas vide.

Correction de l'exercice 9 – Tester l'indépendance

A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

$P(A) \times P(B) = 0{,}5 \times 0{,}4 = 0{,}2$, et $P(A \cap B) = 0{,}2$.

Les deux sont égaux : A et B sont indépendants.

Réponse. Oui, A et B sont indépendants ($P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0{,}2$).

Rappel de cours. Indépendance : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$. De façon équivalente, $P_A(B) = P(B)$ (savoir que A est réalisé ne change rien).

Correction de l'exercice 10 – Probabilité totale et arbre complet

Notons U_1, U_2 le choix de l'urne. $P_{U_1}(R) = \frac{3}{5}$ et $P_{U_2}(R) = \frac{1}{4}$.

Probabilités totales : $P(R) = P(U_1)P_{U_1}(R) + P(U_2)P_{U_2}(R) = 0{,}5 \times \frac{3}{5} + 0{,}5 \times \frac{1}{4}$.

$= 0{,}5 \times 0{,}6 + 0{,}5 \times 0{,}25 = 0{,}30 + 0{,}125 = 0{,}425$.

Réponse. $P(R) = 0{,}425$.

Rappel de cours. On décompose selon le premier choix (urne), puis on somme les chemins menant à « rouge ».

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 11 – Probabilité inversée (Bayes)

Formule : $P_R(U_1) = \dfrac{P(U_1 \cap R)}{P(R)}$.

$P(U_1 \cap R) = P(U_1)P_{U_1}(R) = 0{,}5 \times 0{,}6 = 0{,}30$.

$P_R(U_1) = \dfrac{0{,}30}{0{,}425} \approx 0{,}706$.

Réponse. $P_R(U_1) \approx 0{,}706$.

Rappel de cours. Probabilité « inversée » (Bayes) : $P_R(U_1) = \dfrac{P(U_1)P_{U_1}(R)}{P(R)}$. On échange la condition et l'événement.

Erreur fréquente. $P_R(U_1) \neq P_{U_1}(R)$: conditionner par R ou par U_1 donne des résultats différents. L'ordre compte.

Correction de l'exercice 12 – Indépendance et calcul

Indépendance : $P(A \cap B) = P(A)P(B) = 0{,}3 \times 0{,}5 = 0{,}15$.

Formule de la réunion : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}3 + 0{,}5 - 0{,}15 = 0{,}65$.

Réponse. $P(A \cap B) = 0{,}15$; $P(A \cup B) = 0{,}65$.

Rappel de cours. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$: on soustrait l'intersection comptée deux fois.

Correction de l'exercice 13 – Partition en trois : la météo et les retards

1) Probabilités totales avec la partition (beau, nuageux, pluie) :
$P(R) = 0{,}5 \times 0{,}05 + 0{,}3 \times 0{,}1 + 0{,}2 \times 0{,}4 = 0{,}025 + 0{,}03 + 0{,}08 = 0{,}135$.

2) $P_R(\text{pluie}) = \dfrac{P(\text{pluie} \cap R)}{P(R)} = \dfrac{0{,}08}{0{,}135} \approx 0{,}593$.

La pluie ne concerne que 20 % des jours, mais près de 60 % des retards.

Réponse. $P(R) = 0{,}135$; $P_R(\text{pluie}) \approx 0{,}59$.

Rappel de cours. Probabilités « inversées » : $P_B(A) = \dfrac{P(A)P_A(B)}{P(B)}$.

Correction de l'exercice 14 – Type bac : test médical (1)

Données : $P(M) = 0{,}02$, $P_M(T) = 0{,}95$, $P_{\overline{M}}(T) = 0{,}03$, et $P(\overline{M}) = 0{,}98$.

Probabilités totales : $P(T) = P(M)P_M(T) + P(\overline{M})P_{\overline{M}}(T)$.

$= 0{,}02 \times 0{,}95 + 0{,}98 \times 0{,}03 = 0{,}019 + 0{,}0294 = 0{,}0484$.

Réponse. $P(T) \approx 0{,}0484$.

Rappel de cours. On construit l'arbre malade/sain, puis test +/−, et on somme les deux chemins menant à T.

Correction de l'exercice 15 – Type bac : test médical (2 - Bayes)

$P_T(M) = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T)} = \dfrac{P(M)P_M(T)}{P(T)}$.

$P(M \cap T) = 0{,}02 \times 0{,}95 = 0{,}019$. Donc $P_T(M) = \dfrac{0{,}019}{0{,}0484} \approx 0{,}393$.

Commentaire : malgré un test « fiable à 95% », seulement ≈ 39% des personnes positives

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

sont réellement malades, car la maladie est rare (beaucoup de faux positifs).

Réponse. $P_T(M) \approx 0{,}393$: moins de 4 positifs sur 10 sont vraiment malades.

Rappel de cours. Bayes inverse la condition : $P_T(M) = \dfrac{P(M)P_M(T)}{P(T)}$. Une maladie rare produit beaucoup de faux positifs, ce qui surprend souvent.

Correction de l'exercice 16 – Type bac : succession d'épreuves

Les tirs sont indépendants : la probabilité d'une succession est le produit.

Réussir, réussir, rater : $0{,}8 \times 0{,}8 \times 0{,}2$.

$= 0{,}64 \times 0{,}2 = 0{,}128$.

Réponse. La probabilité est 0,128.

Rappel de cours. Pour des épreuves indépendantes, la probabilité d'une suite d'issues est le produit des probabilités. Rater a pour proba $1 - 0{,}8 = 0{,}2$.

Correction de l'exercice 17 – Type bac : arbre à trois niveaux

Notons M_1, M_2, M_3 l'origine de la pièce. $P(M_1) = 0{,}5$, $P(M_2) = 0{,}3$, $P(M_3) = 0{,}2$.

Taux de défaut : $P_{M_1}(D) = 0{,}02$, $P_{M_2}(D) = 0{,}04$, $P_{M_3}(D) = 0{,}05$.

Probabilités totales :
$P(D) = 0{,}5 \times 0{,}02 + 0{,}3 \times 0{,}04 + 0{,}2 \times 0{,}05 = 0{,}01 + 0{,}012 + 0{,}01 = 0{,}032$.

Réponse. $P(D) = 0{,}032$ (soit 3,2%).

Rappel de cours. La formule des probabilités totales se généralise à plusieurs cas : on somme $P(M_i) \times P_{M_i}(D)$ sur toutes les origines.

Correction de l'exercice 18 – Type bac : indépendance par les conditionnelles

A et B sont indépendants si et seulement si $P_A(B) = P(B)$.

Ici $P_A(B) = 0{,}3 = P(B)$: ils sont indépendants.

Vérification : $P(A \cap B) = P(A)P_A(B) = 0{,}4 \times 0{,}3 = 0{,}12 = P(A)P(B)$. ✓

Réponse. Oui, indépendants ($P_A(B) = P(B) = 0{,}3$).

Rappel de cours. Indépendance $\Leftrightarrow P_A(B) = P(B)$ (savoir que A est réalisé ne change pas la proba de B).

Correction de l'exercice 19 – Type bac : deux machines et formule de Bayes

Premier niveau : A (proba 0,7) et B (proba 0,3). Sous A : D (0,02) et $\overline{D}$ (0,98). Sous B : D (0,06) et $\overline{D}$ (0,94).

$P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D) = 0{,}7 \times 0{,}02 = 0{,}014$.

Formule des probabilités totales :
$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) = 0{,}014 + 0{,}3 \times 0{,}06 = 0{,}014 + 0{,}018 = 0{,}032$.

$P_D(A) = \dfrac{P(A \cap D)}{P(D)} = \dfrac{0{,}014}{0{,}032} \approx 0{,}438$. Bien que A produise plus de pièces, elle est plus fiable : moins de la moitié des pièces défectueuses viennent de A.

$P(A) \times P(D) = 0{,}7 \times 0{,}032 = 0{,}0224$, alors que $P(A \cap D) = 0{,}014$. Comme $0{,}014 \neq 0{,}0224$, les événements A et D ne sont pas indépendants.

Réponse. $P(A \cap D) = 0{,}014$; $P(D) = 0{,}032$; $P_D(A) \approx 0{,}438$; A et D non indépendants (

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$0{,}014 \neq 0{,}0224$).

Rappel de cours. Probabilités totales pour $P(D)$, puis Bayes : $P_D(A) = \frac{P(A)P_A(D)}{P(D)}$. Indépendance $\Leftrightarrow P(A \cap D) = P(A)P(D)$.

Correction de l'exercice 20 – Type bac : une suite de probabilités

1) Probabilités totales : $p_{n+1} = 0{,}3p_n + 0{,}1(1 - p_n) = 0{,}2p_n + 0{,}1$.

2) $v_{n+1} = 0{,}2p_n + 0{,}1 - 0{,}125 = 0{,}2p_n - 0{,}025 = 0{,}2(p_n - 0{,}125) = 0{,}2v_n$. Géométrique de raison $0{,}2$, $v_0 = 0{,}375$.

$p_n = 0{,}125 + 0{,}375 \times 0{,}2^n$.

3) $0{,}2^n \to 0$, donc $p_n \to 0{,}125$. À long terme, l'élève est en retard environ un jour sur huit, quelle que soit la situation de départ.

Réponse. $p_n = 0{,}125 + 0{,}375 \times 0{,}2^n \to 0{,}125$.

Rappel de cours. Un arbre à deux niveaux répété jour après jour donne une suite arithmético-géométrique.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).