Raisonnement par récurrence — Terminale spécialité

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

Le raisonnement par récurrence permet de démontrer qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier n à partir d'un rang. Il comporte toujours deux étapes : l'initialisation (on vérifie P au premier rang) et l'hérédité (on suppose $P(n)$ vraie — l'« hypothèse de récurrence » — et on démontre $P(n+1)$). Ces exercices corrigés couvrent sommes, inégalités, divisibilité et suites définies par récurrence, du plus simple au type bac. Correction détaillée d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-specialite/raisonnement-par-recurrence

Exercice 1 – Somme des entiers

Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$: $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 2 – Somme des nombres impairs

Démontrer que pour tout $n \geq 1$: $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$.

Exercice 3 – Première inégalité

Démontrer que pour tout entier $n \geq 0$: $2^n \geq n + 1$.

Exercice 4 – Conjecturer puis prouver une formule explicite

Soit $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$. Calculer u_1, u_2, u_3, conjecturer une expression de u_n, puis la démontrer par récurrence.

Exercice 5 – Somme des carrés

Démontrer que pour tout $n \geq 1$: $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 6 – Divisibilité par 3

Démontrer que pour tout $n \geq 0$, $4^n - 1$ est divisible par 3.

Exercice 7 – Somme géométrique

Démontrer que pour tout $n \geq 0$: $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 8 – Forme explicite d'une suite

Soit (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n - 1$. Démontrer que pour tout $n \geq 0$, $u_n = 2^n + 1$.

Exercice 9 – $n^3 - n$ est divisible par 3

Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 0$, $n^3 - n$ est divisible par 3.

Exercice 10 – Suite majorée

Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$. Démontrer que pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq 6$.

Exercice 11 – Suite croissante

Avec la même suite ($u_0 = 1$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$), démontrer qu'elle est croissante, c'est-à-dire $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$.

Exercice 12 – Inégalité $2^n \geq n^2$

Démontrer que pour tout entier $n \geq 4$, $2^n \geq n^2$.

Exercice 13 – Divisibilité par 6

Démontrer que pour tout $n \geq 0$, $7^n - 1$ est divisible par 6.

Exercice 14 – Inégalité de Bernoulli

Soit $a \geq 0$ un réel fixé. Démontrer que pour tout $n \geq 0$, $(1 + a)^n \geq 1 + na$.

Exercice 15 – Une hérédité sans initialisation

Soit $P(n)$: « $4^n + 1$ est divisible par 3 ». Montrer que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ pour tout n. La propriété est-elle vraie pour tout n ?

Exercice 16 – Type bac : suite bornée

Soit (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$. Démontrer que pour tout $n \geq 0$, $0 \leq u_n \leq 2$.

Exercice 17 – Type bac : suite croissante et convergente

Avec la suite précédente ($u_0 = 0$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$), on admet $0 \leq u_n \leq 2$. Démontrer qu'elle est croissante, puis justifier qu'elle converge.

Exercice 18 – Type bac : conjecturer puis démontrer

Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + u_n}$. 1) Calculer u_1, u_2, u_3 et conjecturer une expression de u_n. 2) Démontrer la conjecture par récurrence.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 19 – Type bac : trois démonstrations par récurrence

Cet exercice rassemble trois récurrences classiques : une somme, une divisibilité et une formule explicite de suite.

1. Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

2. Démontrer que pour tout entier $n \geq 0$, $4^n - 1$ est divisible par 3.

3. Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$. Démontrer que pour tout n, $u_n = 2^{n+1} - 1$.

4. En déduire la limite et le sens de variation de (u_n).

Exercice 20 – Type bac : suite bornée et monotone

Soit (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{1 + u_n}$.

1. Démontrer par récurrence que $0 < u_n < 1$ pour tout n.

2. Montrer que $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n(1 - u_n)}{1 + u_n}$ et en déduire le sens de variation.

3. En déduire que (u_n) converge, puis déterminer sa limite.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Somme des entiers

Initialisation ($n = 1$) : à gauche 1, à droite $\frac{1 \times 2}{2} = 1$. La propriété est vraie au rang 1.

Hérédité : supposons $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$ pour un certain $n \geq 1$ (hypothèse de récurrence).

Alors $1 + 2 + \cdots + n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)\left(\frac{n}{2} + 1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

C'est la formule au rang $n+1$. La propriété est héréditaire.

Conclusion : par récurrence, l'égalité est vraie pour tout $n \geq 1$.

Réponse. $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ pour tout $n \geq 1$.

Rappel de cours. Une récurrence se rédige toujours en 3 temps : initialisation, hérédité (en repartant de l'hypothèse au rang n), conclusion.

Correction de l'exercice 2 – Somme des nombres impairs

Initialisation ($n = 1$) : à gauche 1, à droite $1^2 = 1$. Vrai au rang 1.

Hérédité : supposons $1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$. Le terme suivant est $2(n+1) - 1 = 2n + 1$.

Donc la somme jusqu'au rang $n+1$ vaut $n^2 + (2n+1) = (n+1)^2$.

Conclusion : par récurrence, l'égalité est vraie pour tout $n \geq 1$.

Réponse. $1 + 3 + \cdots + (2n-1) = n^2$ pour tout $n \geq 1$.

Rappel de cours. Le $(n+1)$-ième nombre impair est $2(n+1) - 1 = 2n + 1$: on l'ajoute à l'hypothèse de récurrence.

Correction de l'exercice 3 – Première inégalité

Initialisation ($n = 0$) : $2^0 = 1$ et $0 + 1 = 1$, donc $2^0 \geq 0 + 1$. Vrai.

Hérédité : supposons $2^n \geq n + 1$. Alors $2^{n+1} = 2 \times 2^n \geq 2(n+1) = 2n + 2$.

Or $2n + 2 \geq n + 2 = (n+1) + 1$ car $2n + 2 - (n+2) = n \geq 0$. Donc $2^{n+1} \geq (n+1) + 1$.

Conclusion : par récurrence, $2^n \geq n + 1$ pour tout $n \geq 0$.

Réponse. $2^n \geq n + 1$ pour tout $n \geq 0$.

Rappel de cours. Pour une inégalité, on part de l'hypothèse, on multiplie/ajoute, puis on majore ou minore pour retomber sur le rang $n+1$.

Correction de l'exercice 4 – Conjecturer puis prouver une formule explicite

$u_1 = 0 + 1 = 1$, $u_2 = 1 + 3 = 4$, $u_3 = 4 + 5 = 9$. Conjecture : $u_n = n^2$.

Initialisation : $u_0 = 0 = 0^2$.

Hérédité : supposons $u_n = n^2$ pour un entier n. Alors $u_{n+1} = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$.

Conclusion : par récurrence, $u_n = n^2$ pour tout $n \geq 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $u_n = n^2$.

Rappel de cours. Une récurrence comporte trois parties : initialisation, hérédité, conclusion.

Correction de l'exercice 5 – Somme des carrés

Initialisation ($n = 1$) : à gauche 1, à droite $\frac{1 \times 2 \times 3}{6} = 1$. Vrai.

Hérédité : on suppose la formule au rang n. On ajoute $(n+1)^2$:

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}.$$

Or $2n^2 + 7n + 6 = (n+2)(2n+3)$, donc on obtient $\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$, qui est bien la formule au rang $n+1$.

Conclusion : la formule est vraie pour tout $n \geq 1$.

Réponse. $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Rappel de cours. On met $(n+1)$ en facteur, puis on factorise le crochet (ici $2n^2 + 7n + 6 = (n+2)(2n+3)$) pour reconnaître la forme attendue.

Correction de l'exercice 6 – Divisibilité par 3

Initialisation ($n = 0$) : $4^0 - 1 = 0$, divisible par 3. Vrai.

Hérédité : supposons $4^n - 1$ divisible par 3, c'est-à-dire $4^n - 1 = 3k$ avec k entier.

Alors $4^{n+1} - 1 = 4 \times 4^n - 1 = 4(4^n - 1) + 3 = 4 \times 3k + 3 = 3(4k + 1)$.

C'est un multiple de 3 : la propriété est héréditaire.

Conclusion : $4^n - 1$ est divisible par 3 pour tout $n \geq 0$.

Réponse. $4^n - 1$ est divisible par 3 pour tout $n \geq 0$.

Rappel de cours. Astuce divisibilité : écrire $a^{n+1} = a \cdot a^n$, faire apparaître $a^n - 1$ (l'hypothèse) et regrouper le reste en multiple du diviseur.

Correction de l'exercice 7 – Somme géométrique

Initialisation ($n = 0$) : à gauche $2^0 = 1$, à droite $2^1 - 1 = 1$. Vrai.

Hérédité : supposons la somme égale à $2^{n+1} - 1$. On ajoute 2^{n+1} :

$2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} = 2 \times 2^{n+1} - 1 = 2^{n+2} - 1$, qui est la formule au rang $n+1$.

Conclusion : l'égalité est vraie pour tout $n \geq 0$.

Réponse. $\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$.

Rappel de cours. $2 \times 2^{n+1} = 2^{n+2}$: pour une puissance, multiplier par la base augmente l'exposant de 1.

Correction de l'exercice 8 – Forme explicite d'une suite

Initialisation ($n = 0$) : $u_0 = 2$ et $2^0 + 1 = 2$. Vrai.

Hérédité : supposons $u_n = 2^n + 1$. Alors $u_{n+1} = 2u_n - 1 = 2(2^n + 1) - 1$.

$= 2^{n+1} + 2 - 1 = 2^{n+1} + 1$, qui est la formule au rang $n+1$.

Conclusion : $u_n = 2^n + 1$ pour tout $n \geq 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $u_n = 2^n + 1$ pour tout $n \geq 0$.

Rappel de cours. Pour prouver une formule explicite $u_n = \ldots$, on remplace u_n par son expression dans la relation $u_{n+1} = f(u_n)$.

Correction de l'exercice 9 – n³ − n est divisible par 3

Initialisation : $0^3 - 0 = 0$, divisible par 3.

Hérédité : supposons $n^3 - n = 3k$ avec k entier. Alors
$(n+1)^3 - (n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 = (n^3 - n) + 3(n^2 + n)$.

$= 3k + 3(n^2 + n) = 3(k + n^2 + n)$, divisible par 3.

Conclusion : la propriété est vraie pour tout $n \geq 0$.

Réponse. $n^3 - n$ est divisible par 3 pour tout n.

Rappel de cours. Pour une divisibilité, on fait apparaître l'hypothèse de récurrence dans l'expression au rang $n+1$.

Correction de l'exercice 10 – Suite majorée

Initialisation ($n = 0$) : $u_0 = 1 \leq 6$. Vrai.

Hérédité : supposons $u_n \leq 6$. On multiplie par $\frac{1}{2} > 0$ (sens conservé) : $\frac{1}{2}u_n \leq 3$.

On ajoute 3 : $\frac{1}{2}u_n + 3 \leq 6$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leq 6$.

Conclusion : par récurrence, $u_n \leq 6$ pour tout $n \geq 0$.

Réponse. $u_n \leq 6$ pour tout $n \geq 0$: la suite est majorée par 6.

Rappel de cours. Encadrer u_{n+1} : appliquer à l'hypothèse les mêmes opérations que la relation de récurrence, en surveillant le sens des inégalités.

Erreur fréquente. Multiplier par $\frac{1}{2} > 0$ conserve le sens de l'inégalité. Il n'y aurait inversion que par un facteur négatif.

Correction de l'exercice 11 – Suite croissante

Initialisation ($n = 0$) : $u_1 = \frac{1}{2} \times 1 + 3 = 3{,}5$, donc $u_0 = 1 \leq u_1 = 3{,}5$. Vrai.

Hérédité : supposons $u_n \leq u_{n+1}$. On multiplie par $\frac{1}{2} > 0$ puis on ajoute 3 :

$\frac{1}{2}u_n + 3 \leq \frac{1}{2}u_{n+1} + 3$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leq u_{n+2}$.

Conclusion : par récurrence, $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout n : la suite est croissante.

Réponse. (u_n) est croissante ($u_n \leq u_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$).

Rappel de cours. Pour la monotonie d'une suite $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f croissante, la récurrence « propage » l'inégalité $u_n \leq u_{n+1}$.

Correction de l'exercice 12 – Inégalité 2ⁿ ≥ n²

Initialisation ($n = 4$) : $2^4 = 16$ et $4^2 = 16$, donc $2^4 \geq 4^2$. Vrai.

Hérédité : soit $n \geq 4$ tel que $2^n \geq n^2$. Alors $2^{n+1} = 2 \times 2^n \geq 2n^2$.

Il reste à montrer $2n^2 \geq (n+1)^2$, soit $2n^2 \geq n^2 + 2n + 1$, c'est-à-dire $n^2 - 2n - 1 \geq 0$.

Pour $n \geq 4$: $n^2 - 2n - 1 = n(n-2) - 1 \geq 4 \times 2 - 1 = 7 > 0$. Donc $2^{n+1} \geq (n+1)^2$.

Conclusion : par récurrence, $2^n \geq n^2$ pour tout $n \geq 4$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $2^n \geq n^2$ pour tout $n \geq 4$.

Erreur fréquente. L'initialisation se fait au rang 4 (pas 0) : la propriété est fausse pour $n = 3$ ($8 < 9$). Toujours vérifier le bon rang de départ.

Correction de l'exercice 13 – Divisibilité par 6

Initialisation ($n = 0$) : $7^0 - 1 = 0$, divisible par 6. Vrai.

Hérédité : supposons $7^n - 1 = 6k$ (k entier).

$7^{n+1} - 1 = 7 \times 7^n - 1 = 7(7^n - 1) + 6 = 7 \times 6k + 6 = 6(7k + 1)$, multiple de 6.

Conclusion : $7^n - 1$ est divisible par 6 pour tout $n \geq 0$.

Réponse. $7^n - 1$ est divisible par 6 pour tout $n \geq 0$.

Rappel de cours. Même technique que pour $4^n - 1$: $7^{n+1} - 1 = 7(7^n - 1) + 6$ fait apparaître l'hypothèse plus un multiple du diviseur.

Correction de l'exercice 14 – Inégalité de Bernoulli

Initialisation ($n = 0$) : $(1 + a)^0 = 1$ et $1 + 0 \times a = 1$. Vrai.

Hérédité : supposons $(1 + a)^n \geq 1 + na$. Comme $1 + a > 0$, on multiplie sans changer le sens :

$(1 + a)^{n+1} = (1 + a)(1 + a)^n \geq (1 + a)(1 + na) = 1 + na + a + na^2 = 1 + (n + 1)a + na^2$.

Or $na^2 \geq 0$, donc $(1 + a)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)a$.

Conclusion : $(1 + a)^n \geq 1 + na$ pour tout $n \geq 0$.

Réponse. $(1 + a)^n \geq 1 + na$ pour tout $n \geq 0$ (avec $a \geq 0$).

Rappel de cours. On développe le produit puis on « jette » le terme positif na^2 pour minorer. Minorer = remplacer par plus petit.

Correction de l'exercice 15 – Une hérédité sans initialisation

Hérédité : si $4^n + 1 = 3k$, alors
$4^{n+1} + 1 = 4 \times 4^n + 1 = 4(3k - 1) + 1 = 12k - 3 = 3(4k - 1)$. L'hérédité est vraie.

Initialisation : $4^0 + 1 = 2$, non divisible par 3. $4^1 + 1 = 5$, non plus.

En fait $4 \equiv 1$ modulo 3, donc $4^n + 1$ laisse toujours un reste de 2 dans la division par 3 : $P(n)$ est fausse pour tout n.

Réponse. L'hérédité est vraie, mais $P(n)$ est fausse pour tout n : il manque l'initialisation.

Rappel de cours. Une hérédité seule ne prouve rien : sans un premier rang vrai, la « chaîne » n'a pas de point de départ.

Correction de l'exercice 16 – Type bac : suite bornée

Initialisation ($n = 0$) : $u_0 = 0$, donc $0 \leq u_0 \leq 2$. Vrai.

Hérédité : supposons $0 \leq u_n \leq 2$. En ajoutant 2 : $2 \leq u_n + 2 \leq 4$.

La fonction racine étant croissante : $\sqrt{2} \leq \sqrt{u_n + 2} \leq \sqrt{4} = 2$. Comme $\sqrt{2} \geq 0$, on a $0 \leq u_{n+1} \leq 2$.

Conclusion : par récurrence, $0 \leq u_n \leq 2$ pour tout $n \geq 0$.

Réponse. $0 \leq u_n \leq 2$ pour tout $n \geq 0$.

Rappel de cours. Avec une racine, on encadre l'expression sous la racine puis on

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

applique $\checkmark$ (croissante) : l'encadrement se conserve.

Correction de l'exercice 17 – Type bac : suite croissante et convergente

Initialisation : $u_1 = \sqrt{0+2} = \sqrt{2} \approx 1{,}41$, donc $u_0 = 0 \leq u_1$. Vrai.

Hérédité : supposons $u_n \leq u_{n+1}$. En ajoutant 2 puis en prenant la racine (croissante) : $\sqrt{u_n + 2} \leq \sqrt{u_{n+1} + 2}$, soit $u_{n+1} \leq u_{n+2}$.

Donc (u_n) est croissante. De plus elle est majorée par 2.

Conclusion : une suite croissante et majorée converge (théorème de la limite monotone). (u_n) converge (sa limite est 2).

Réponse. (u_n) est croissante et majorée par 2, donc elle converge (vers 2).

Rappel de cours. Théorème clé : toute suite croissante et majorée converge ; toute suite décroissante et minorée converge.

Correction de l'exercice 18 – Type bac : conjecturer puis démontrer

$u_1 = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$; $u_2 = \dfrac{1/2}{1+1/2} = \dfrac{1/2}{3/2} = \dfrac{1}{3}$; $u_3 = \dfrac{1/3}{4/3} = \dfrac{1}{4}$.

Conjecture : $u_n = \dfrac{1}{n+1}$.

Initialisation ($n = 0$) : $\dfrac{1}{0+1} = 1 = u_0$. Vrai.

Hérédité : supposons $u_n = \dfrac{1}{n+1}$. Alors $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n} = \dfrac{\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}} = \dfrac{\frac{1}{n+1}}{\frac{n+2}{n+1}} = \dfrac{1}{n+2}$.

C'est $\dfrac{1}{(n+1)+1}$: la conjecture est héréditaire. Conclusion : $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ pour tout $n \geq 0$.

Réponse. $u_n = \dfrac{1}{n+1}$ pour tout $n \geq 0$.

Rappel de cours. Méthode type bac : calculer les premiers termes, conjecturer la formule, puis la prouver par récurrence.

Correction de l'exercice 19 – Type bac : trois démonstrations par récurrence

Notons $P(n)$: $1 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Initialisation : pour $n = 1$, le membre de gauche vaut 1 et celui de droite $\dfrac{1\times 2}{2} = 1$: $P(1)$ est vraie. Hérédité : si $P(n)$ est vraie, alors $1 + \ldots + n + (n+1) = \dfrac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1)(\frac{n}{2}+1) = \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$: c'est $P(n+1)$. Donc $P(n)$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

Initialisation : $4^0 - 1 = 0 = 3 \times 0$, divisible par 3. Hérédité : supposons $4^n - 1 = 3k$ (k entier). Alors $4^{n+1} - 1 = 4 \times 4^n - 1 = 4(3k+1) - 1 = 12k + 3 = 3(4k+1)$, multiple de 3. La propriété est héréditaire, donc vraie pour tout $n \geq 0$.

Initialisation : $u_0 = 1$ et $2^{0+1} - 1 = 2 - 1 = 1$: vrai au rang 0. Hérédité : si $u_n = 2^{n+1} - 1$, alors $u_{n+1} = 2u_n + 1 = 2(2^{n+1} - 1) + 1 = 2^{n+2} - 2 + 1 = 2^{n+2} - 1 = 2^{(n+1)+1} - 1$: la formule est vraie au rang $n+1$. Donc pour tout n, $u_n = 2^{n+1} - 1$.

$2^{n+1} \to +\infty$, donc $u_n \to +\infty$. De plus $u_{n+1} - u_n = 2^{n+2} - 2^{n+1} = 2^{n+1} > 0$: (u_n) est strictement croissante.

Réponse. $\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$; $3 \mid 4^n - 1$; $u_n = 2^{n+1} - 1$, croissante de limite $+\infty$.

Rappel de cours. Une récurrence : initialisation (rang de départ), hérédité ($P(n) \Rightarrow P(n+1)$), conclusion. Pour une divisibilité, écrire l'hypothèse $a_n = 3k$ et faire

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

apparaître un facteur 3.

Correction de l’exercice 20 – Type bac : suite bornée et monotone

1) Initialisation : $u_0 = \frac{1}{2} \in]0\,;1[$. Hérédité : si $0 < u_n < 1$, alors $u_{n+1} > 0$ (quotient de positifs) et $u_{n+1} < 1 \Leftrightarrow 2u_n < 1 + u_n \Leftrightarrow u_n < 1$, vrai. Conclusion : $0 < u_n < 1$ pour tout n.

2) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2u_n - u_n(1+u_n)}{1+u_n} = \dfrac{u_n - u_n^2}{1+u_n} = \dfrac{u_n(1-u_n)}{1+u_n}$. D’après 1), numérateur et dénominateur sont positifs : (u_n) est croissante.

3) Croissante et majorée par 1, (u_n) converge vers une limite $\ell \in \left[\frac{1}{2}\,;1\right]$. Par continuité, $\ell = \frac{2\ell}{1+\ell} \Leftrightarrow \ell(1+\ell) = 2\ell \Leftrightarrow \ell^2 = \ell \Leftrightarrow \ell \in \{0\,;1\}$. Comme $\ell \geq \frac{1}{2}$, $\ell = 1$.

Réponse. $0 < u_n < 1$, suite croissante, limite 1.

Rappel de cours. Théorème de convergence monotone : toute suite croissante et majorée converge.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).