Raisonnement par récurrence — Terminale spécialité

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés

Présentation

Le raisonnement par récurrence permet de démontrer qu'une propriété $P(n)$ est vraie pour tout entier n à partir d'un rang. Il comporte toujours deux étapes : l'initialisation (on vérifie P au premier rang) et l'hérédité (on suppose $P(n)$ vraie — l'« hypothèse de récurrence » — et on démontre $P(n+1)$). Ces exercices corrigés couvrent sommes, inégalités, divisibilité et suites définies par récurrence, du plus simple au type bac. Correction détaillée d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-specialite/raisonnement-par-recurrence

Exercice 1 – Somme des entiers

Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$: $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 2 – Somme des nombres impairs

Démontrer que pour tout $n \geq 1$: $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$.

Exercice 3 – Première inégalité

Démontrer que pour tout entier $n \geq 0$: $2^n \geq n + 1$.

Exercice 4 – Conjecturer puis prouver une formule explicite

Soit $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + 2n + 1$. Calculer u_1, u_2, u_3, conjecturer une expression de u_n, puis la démontrer par récurrence.

Exercice 5 – Somme des carrés

Démontrer que pour tout $n \geq 1$: $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 6 – Divisibilité par 3

Démontrer que pour tout $n \geq 0$, $4^n - 1$ est divisible par 3.

Exercice 7 – Somme géométrique

Démontrer que pour tout $n \geq 0$: $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 8 – Forme explicite d'une suite

Soit (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n - 1$. Démontrer que pour tout $n \geq 0$, $u_n = 2^n + 1$.

Exercice 9 – $n^3 - n$ est divisible par 3

Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 0$, $n^3 - n$ est divisible par 3.

Exercice 10 – Suite majorée

Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$. Démontrer que pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq 6$.

Exercice 11 – Suite croissante

Avec la même suite ($u_0 = 1$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3$), démontrer qu'elle est croissante, c'est-à-dire $u_n \leq u_{n+1}$ pour tout $n \geq 0$.

Exercice 12 – Inégalité $2^n \geq n^2$

Démontrer que pour tout entier $n \geq 4$, $2^n \geq n^2$.

Exercice 13 – Divisibilité par 6

Démontrer que pour tout $n \geq 0$, $7^n - 1$ est divisible par 6.

Exercice 14 – Inégalité de Bernoulli

Soit $a \geq 0$ un réel fixé. Démontrer que pour tout $n \geq 0$, $(1 + a)^n \geq 1 + na$.

Exercice 15 – Une hérédité sans initialisation

Soit $P(n)$: « $4^n + 1$ est divisible par 3 ». Montrer que $P(n) \Rightarrow P(n+1)$ pour tout n. La propriété est-elle vraie pour tout n ?

Exercice 16 – Type bac : suite bornée

Soit (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$. Démontrer que pour tout $n \geq 0$, $0 \leq u_n \leq 2$.

Exercice 17 – Type bac : suite croissante et convergente

Avec la suite précédente ($u_0 = 0$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$), on admet $0 \leq u_n \leq 2$. Démontrer qu'elle est croissante, puis justifier qu'elle converge.

Exercice 18 – Type bac : conjecturer puis démontrer

Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1 + u_n}$. 1) Calculer u_1, u_2, u_3 et conjecturer une expression de u_n. 2) Démontrer la conjecture par récurrence.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 19 – Type bac : trois démonstrations par récurrence

Cet exercice rassemble trois récurrences classiques : une somme, une divisibilité et une formule explicite de suite.

1. Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, $1 + 2 + \ldots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

2. Démontrer que pour tout entier $n \geq 0$, $4^n - 1$ est divisible par 3.

3. Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$. Démontrer que pour tout n, $u_n = 2^{n+1} - 1$.

4. En déduire la limite et le sens de variation de (u_n).

Exercice 20 – Type bac : suite bornée et monotone

Soit (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{1 + u_n}$.

1. Démontrer par récurrence que $0 < u_n < 1$ pour tout n.

2. Montrer que $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n(1 - u_n)}{1 + u_n}$ et en déduire le sens de variation.

3. En déduire que (u_n) converge, puis déterminer sa limite.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).