Suites numériques — Terminale spécialité

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

Une suite (u_n) est une liste de nombres indexée par les entiers. On distingue les suites arithmétiques (on ajoute toujours la même raison) et géométriques (on multiplie toujours par la même raison), avec leurs formules explicites et leurs sommes. Ces exercices corrigés couvrent calcul de termes, nature d'une suite, formules explicites, sens de variation, sommes et suites arithmético-géométriques type bac. Difficulté croissante, correction d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-specialite/suites

Exercice 1 – Calculer des termes

Soit (u_n) définie par $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = 2u_n - 3$. Calculer u_1, u_2, u_3.

Exercice 2 – Reconnaître une suite arithmétique

Soit (u_n) définie par $u_n = 3n + 2$. Montrer que c'est une suite arithmétique et donner sa raison.

Exercice 3 – Reconnaître une suite géométrique

Soit (u_n) définie par $u_n = 4 \times 2^n$. Montrer que c'est une suite géométrique et donner sa raison.

Exercice 4 – Une suite qui explose

Soit $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = u_n^2 - 1$. Calculer u_1, u_2 et u_3.

Exercice 5 – Formule explicite (arithmétique)

Soit (u_n) arithmétique de premier terme $u_0 = 7$ et de raison $r = -2$. Donner u_n en fonction de n, puis u_{20}.

Exercice 6 – Formule explicite (géométrique)

Soit (u_n) géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison $q = 2$. Donner u_n, puis u_5.

Exercice 7 – Retrouver la raison

Une suite arithmétique vérifie $u_3 = 10$ et $u_7 = 22$. Déterminer la raison r puis u_0.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 8 – Sens de variation

Étudier le sens de variation de la suite $u_n = n^2 - 4n$.

Exercice 9 – Variations d'une suite définie par une formule

Soit $u_n = \dfrac{n-1}{n+1}$ pour $n \geq 0$. Étudier le sens de variation de (u_n).

Exercice 10 – Somme de termes (arithmétique)

Calculer $S = 1 + 2 + 3 + \cdots + 100$.

Exercice 11 – Somme de termes (géométrique)

Calculer $S = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{10}$.

Exercice 12 – Modéliser avec une suite

Un capital de 2000 € est placé à 3% par an. On note C_n le capital après n années. 1) Exprimer C_{n+1} en fonction de C_n. 2) Donner C_n en fonction de n.

Exercice 13 – Variations par une fonction

Soit $u_n = ne^{-n}$. En étudiant $f(x) = xe^{-x}$ sur $[1\,;+\infty[$, déterminer le sens de variation de $(u_n)_{n \geq 1}$.

Exercice 14 – Type bac : suite arithmético-géométrique (1)

Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 0{,}5\,u_n + 3$. On pose $v_n = u_n - 6$. Montrer que (v_n) est géométrique et donner sa raison.

Exercice 15 – Type bac : suite arithmético-géométrique (2)

En reprenant $v_n = u_n - 6 = -5 \times 0{,}5^n$, exprimer u_n en fonction de n, puis déterminer $\lim_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 16 – Type bac : algorithme de seuil

Soit (u_n) géométrique avec $u_0 = 100$ et raison 0,8. Déterminer le plus petit entier n tel que $u_n < 10$.

Exercice 17 – Type bac : somme et limite

Soit (u_n) géométrique avec $u_0 = 1$, raison $q = \dfrac{1}{2}$. On pose $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n$. 1) Exprimer S_n. 2) Déterminer $\lim_{n \to +\infty} S_n$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 18 – Type bac : somme d’une suite arithmétique

(u_n) est arithmétique avec $u_0 = 2$ et raison $r = 3$. Calculer $S = u_0 + u_1 + \cdots + u_{20}$.

Exercice 19 – Type bac : suite arithmético-géométrique, somme et seuil

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$. On pose $v_n = u_n - 3$.

1. Calculer u_1 et u_2.

2. Démontrer que (v_n) est géométrique ; préciser sa raison et v_0.

3. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

4. Déterminer la limite et le sens de variation de (u_n).

5. Calculer $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ en fonction de n.

6. Déterminer le plus petit entier n tel que $3 - u_n < 10^{-3}$.

Exercice 20 – Type bac : un lac surexploité

Un lac contient 2 000 poissons. Chaque année, la population augmente de 10 % par reproduction, puis on pêche 300 poissons. On note u_n le nombre de poissons après n années : $u_0 = 2\,000$, $u_{n+1} = 1{,}1u_n - 300$.

1. On pose $v_n = u_n - 3\,000$. Montrer que (v_n) est géométrique.

2. En déduire u_n en fonction de n.

3. Au bout de combien d’années le lac sera-t-il vide ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Calculer des termes

$u_1 = 2u_0 - 3 = 2 \times 5 - 3 = 7$.

$u_2 = 2u_1 - 3 = 2 \times 7 - 3 = 11$.

$u_3 = 2u_2 - 3 = 2 \times 11 - 3 = 19$.

Réponse. $u_1 = 7$, $u_2 = 11$, $u_3 = 19$.

Rappel de cours. Pour une suite définie par récurrence, chaque terme se calcule à partir du précédent : on remplace u_n par sa valeur.

Correction de l'exercice 2 – Reconnaître une suite arithmétique

On calcule $u_{n+1} - u_n = [3(n+1)+2] - [3n+2] = 3n + 3 + 2 - 3n - 2 = 3$.

La différence entre deux termes consécutifs est constante, égale à 3 : la suite est arithmétique de raison $r = 3$.

Réponse. Suite arithmétique de raison $r = 3$.

Rappel de cours. Une suite est arithmétique si $u_{n+1} - u_n$ est constant : cette constante est la raison r.

Correction de l'exercice 3 – Reconnaître une suite géométrique

On calcule $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{4 \times 2^{n+1}}{4 \times 2^n} = 2^{n+1-n} = 2$.

Le rapport entre deux termes consécutifs est constant, égal à 2 : la suite est géométrique de raison $q = 2$.

Réponse. Suite géométrique de raison $q = 2$.

Rappel de cours. Une suite est géométrique si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant : cette constante est la raison q.

Correction de l'exercice 4 – Une suite qui explose

$u_1 = 2^2 - 1 = 3$, $u_2 = 3^2 - 1 = 8$, $u_3 = 8^2 - 1 = 63$.

Réponse. $u_1 = 3$, $u_2 = 8$, $u_3 = 63$.

Rappel de cours. Une suite récurrente se calcule terme après terme : chaque terme dépend du précédent.

Correction de l'exercice 5 – Formule explicite (arithmétique)

Formule explicite : $u_n = u_0 + nr = 7 + n \times (-2) = 7 - 2n$.

$u_{20} = 7 - 2 \times 20 = 7 - 40 = -33$.

Réponse. $u_n = 7 - 2n$ et $u_{20} = -33$.

Rappel de cours. Suite arithmétique : $u_n = u_0 + nr$ (ou $u_n = u_p + (n-p)r$).

Correction de l'exercice 6 – Formule explicite (géométrique)

Formule explicite : $u_n = u_0 \times q^n = 3 \times 2^n$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$u_5 = 3 \times 2^5 = 3 \times 32 = 96$.

Réponse. $u_n = 3 \times 2^n$ et $u_5 = 96$.

Rappel de cours. Suite géométrique : $u_n = u_0 \times q^n$ (ou $u_n = u_p \times q^{n-p}$).

Correction de l'exercice 7 – Retrouver la raison

Entre les rangs 3 et 7, on ajoute 4 fois la raison : $u_7 = u_3 + 4r$, soit $22 = 10 + 4r$.

$4r = 12$, donc $r = 3$.

$u_3 = u_0 + 3r$ donne $10 = u_0 + 9$, donc $u_0 = 1$.

Réponse. $r = 3$ et $u_0 = 1$.

Rappel de cours. $u_n = u_p + (n - p)r$: la différence d'indices multiplie la raison. Ici $u_7 - u_3 = 4r$.

Correction de l'exercice 8 – Sens de variation

On calcule $u_{n+1} - u_n = [(n+1)^2 - 4(n+1)] - [n^2 - 4n]$.

$= n^2 + 2n + 1 - 4n - 4 - n^2 + 4n = 2n - 3$.

$2n - 3 \geq 0 \Leftrightarrow n \geq 1{,}5$, donc pour $n \geq 2$, $u_{n+1} \geq u_n$: la suite est croissante à partir du rang 2 (et $u_0 = 0$, $u_1 = -3$, $u_2 = -4$: elle décroît puis croît).

Réponse. $u_{n+1} - u_n = 2n - 3$: la suite décroît puis croît, croissante à partir de $n = 2$.

Rappel de cours. Sens de variation : on étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$. Positif = croissante, négatif = décroissante.

Correction de l'exercice 9 – Variations d'une suite définie par une formule

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n}{n+2} - \frac{n-1}{n+1} = \frac{n(n+1) - (n-1)(n+2)}{(n+1)(n+2)}.$$

Numérateur : $n^2 + n - (n^2 + n - 2) = 2$. Donc $u_{n+1} - u_n = \dfrac{2}{(n+1)(n+2)} > 0$.

Réponse. (u_n) est strictement croissante.

Rappel de cours. On étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$, en réduisant au même dénominateur.

Correction de l'exercice 10 – Somme de termes (arithmétique)

C'est la somme des 100 premiers entiers, termes d'une suite arithmétique.

Formule : somme = (nombre de termes) $\times \dfrac{\text{premier} + \text{dernier}}{2}$.

$$S = 100 \times \frac{1 + 100}{2} = 100 \times \frac{101}{2} = 50 \times 101 = 5050.$$

Réponse. $S = 5050$.

Rappel de cours. Somme arithmétique : (nb termes) $\times \dfrac{1\text{er} + \text{dernier}}{2}$.

Correction de l'exercice 11 – Somme de termes (géométrique)

Somme géométrique de raison $q = 2$, de 11 termes (de 2^0 à 2^{10}).

Formule (avec n le nombre de termes) : $S = (1\text{er terme}) \times \dfrac{1 - q^n}{1 - q} = 1 \times \dfrac{1 - 2^{11}}{1 - 2}$.

$= \dfrac{1 - 2048}{-1} = \dfrac{-2047}{-1} = 2047$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $S = 2047$ ($= 2^{11} - 1$).

Rappel de cours. Somme géométrique ($q \neq 1$) : 1er terme $\times \dfrac{1 - q^n}{1 - q}$ où n est le nombre de termes.

Correction de l'exercice 12 – Modéliser avec une suite

Augmenter de 3% revient à multiplier par 1,03 : $C_{n+1} = 1{,}03 \times C_n$.

(C_n) est géométrique de raison 1,03 et premier terme $C_0 = 2000$.

Donc $C_n = 2000 \times 1{,}03^n$.

Réponse. $C_{n+1} = 1{,}03\, C_n$; $C_n = 2000 \times 1{,}03^n$.

Rappel de cours. Une évolution de $+t$% chaque période donne une suite géométrique de raison $1 + \frac{t}{100}$.

Correction de l'exercice 13 – Variations par une fonction

$f'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1 - x)e^{-x}$, négative sur $[1\,; +\infty[$: f y est décroissante.

Comme $u_n = f(n)$, on a $u_{n+1} = f(n+1) \leq f(n) = u_n$ pour $n \geq 1$.

Réponse. (u_n) est décroissante à partir du rang 1.

Rappel de cours. Si $u_n = f(n)$ avec f monotone sur $[p\,; +\infty[$, la suite a le même sens de variation à partir du rang p.

Erreur fréquente. Cette méthode ne marche pas pour une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$.

Correction de l'exercice 14 – Type bac : suite arithmético-géométrique (1)

$v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = 0{,}5\, u_n + 3 - 6 = 0{,}5\, u_n - 3$.

On factorise par 0,5 : $v_{n+1} = 0{,}5(u_n - 6) = 0{,}5\, v_n$.

Donc (v_n) est géométrique de raison $q = 0{,}5$, de premier terme $v_0 = u_0 - 6 = -5$.

Réponse. (v_n) est géométrique de raison 0,5, $v_0 = -5$.

Rappel de cours. Le point fixe de $u_{n+1} = au_n + b$ est $\ell = \frac{b}{1-a}$ (ici 6) ; poser $v_n = u_n - \ell$ rend (v_n) géométrique de raison a.

Correction de l'exercice 15 – Type bac : suite arithmético-géométrique (2)

$v_n = u_n - 6$, donc $u_n = v_n + 6 = -5 \times 0{,}5^n + 6$.

Comme $0 < 0{,}5 < 1$, $0{,}5^n \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Donc $u_n \to -5 \times 0 + 6 = 6$.

Réponse. $u_n = 6 - 5 \times 0{,}5^n$ et $\lim_{n \to +\infty} u_n = 6$.

Rappel de cours. Pour $-1 < q < 1$, $q^n \to 0$. La limite d'une suite arithmético-géométrique est son point fixe ℓ.

Correction de l'exercice 16 – Type bac : algorithme de seuil

$u_n = 100 \times 0{,}8^n$. On résout $100 \times 0{,}8^n < 10$, soit $0{,}8^n < 0{,}1$.

On applique ln : $n \ln(0{,}8) < \ln(0{,}1)$. Comme $\ln(0{,}8) < 0$, on divise en changeant le sens : $n > \dfrac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}8)}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$\dfrac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}8)} \approx \dfrac{-2{,}303}{-0{,}223} \approx 10{,}3$, donc le plus petit entier est $n = 11$.

Réponse. Le plus petit entier est $n = 11$.

Rappel de cours. Seuil $q^n < a$ avec $0 < q < 1$: passer au ln et diviser par $\ln(q) < 0$ inverse l'inégalité.

Erreur fréquente. Ne pas oublier d'inverser le sens en divisant par $\ln(0{,}8) < 0$. Et arrondir à l'entier supérieur car on veut $u_n < 10$.

Correction de l'exercice 17 – Type bac : somme et limite

$$S_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 1 \times \frac{1 - (1/2)^{n+1}}{1 - 1/2} = \frac{1 - (1/2)^{n+1}}{1/2} = 2\left(1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right).$$

Quand $n \to +\infty$, $\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1} \to 0$ (car $0 < \tfrac{1}{2} < 1$).

Donc $S_n \to 2(1 - 0) = 2$.

Réponse. $S_n = 2\left(1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$ et $\lim_{n \to +\infty} S_n = 2$.

Rappel de cours. Attention au nombre de termes : de u_0 à u_n il y en a $n + 1$, d'où l'exposant $n + 1$ dans la formule de la somme.

Correction de l'exercice 18 – Type bac : somme d'une suite arithmétique

Il y a 21 termes (de u_0 à u_{20}). $u_{20} = 2 + 3 \times 20 = 62$.

$$S = 21 \times \frac{u_0 + u_{20}}{2} = 21 \times \frac{2 + 62}{2} = 21 \times 32 = 672.$$

Réponse. $S = 672$.

Rappel de cours. Somme arithmétique : (nb termes)$\times \frac{\text{1er} + \text{dernier}}{2}$; de u_0 à u_{20} il y a 21 termes.

Correction de l'exercice 19 – Type bac : suite arithmético-géométrique, somme et seuil

$u_1 = \frac{1}{3} \times 1 + 2 = \frac{7}{3}$; $u_2 = \frac{1}{3} \times \frac{7}{3} + 2 = \frac{7}{9} + 2 = \frac{25}{9}$.

$v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}u_n + 2 - 3 = \frac{1}{3}u_n - 1 = \frac{1}{3}(u_n - 3) = \frac{1}{3}v_n$. Donc (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$, avec $v_0 = u_0 - 3 = -2$.

$v_n = v_0 \times (\frac{1}{3})^n = -2(\frac{1}{3})^n$, donc $u_n = v_n + 3 = 3 - 2(\frac{1}{3})^n$.

Comme $0 < \frac{1}{3} < 1$, $(\frac{1}{3})^n \to 0$, donc $u_n \to 3$. De plus $(\frac{1}{3})^n$ décroît, donc $-2(\frac{1}{3})^n$ croît : (u_n) est croissante (vers 3 par valeurs inférieures).

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} (3 - 2(\tfrac{1}{3})^k) = 3(n+1) - 2 \cdot \frac{1 - \left(\tfrac{1}{3}\right)^{n+1}}{1 - \tfrac{1}{3}} = 3(n+1) - 3(1 - (\tfrac{1}{3})^{n+1}).$$

$3 - u_n = 2(\frac{1}{3})^n < 10^{-3} \Leftrightarrow (\frac{1}{3})^n < 5 \cdot 10^{-4} \Leftrightarrow n > \dfrac{\ln(5 \cdot 10^{-4})}{\ln(1/3)} \approx 6{,}9$. Le plus petit entier est $n = 7$.

Réponse. (v_n) géométrique de raison $\frac{1}{3}$; $u_n = 3 - 2(\frac{1}{3})^n$; croissante de limite 3 ; $S_n = 3(n+1) - 3(1 - (\frac{1}{3})^{n+1})$; $n = 7$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Rappel de cours. Poser $v_n = u_n - \ell$ (ℓ point fixe) rend la suite géométrique ; la somme d'une géométrique est $\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Correction de l'exercice 20 – Type bac : un lac surexploité

1) $v_{n+1} = 1{,}1u_n - 300 - 3\,000 = 1{,}1u_n - 3\,300 = 1{,}1(u_n - 3\,000) = 1{,}1v_n$. Géométrique de raison 1,1, avec $v_0 = -1\,000$.

2) $v_n = -1\,000 \times 1{,}1^n$, donc $u_n = 3\,000 - 1\,000 \times 1{,}1^n$.

3) $u_n \leq 0 \Leftrightarrow 1{,}1^n \geq 3 \Leftrightarrow n \ln 1{,}1 \geq \ln 3 \Leftrightarrow n \geq \dfrac{\ln 3}{\ln 1{,}1} \approx 11{,}5$.

Le lac est vidé au cours de la 12^{e} année. (La pêche de 300 poissons dépasse l'accroissement naturel tant que la population est sous 3 000.)

Réponse. $u_n = 3\,000 - 1\,000 \times 1{,}1^n$; le lac est vide au bout de 12 ans.

Rappel de cours. Pour $u_{n+1} = au_n + b$, on étudie $v_n = u_n - \ell$ avec $\ell = a\ell + b$ (ici $\ell = 3\,000$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).