Sujets type bac — Terminale spécialité

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés

Présentation

Au baccalauréat, chaque exercice mêle plusieurs notions et se structure en plusieurs questions qui s'enchaînent. Ces exercices sont de véritables sujets type bac (originaux, inspirés des épreuves et conformes aux attendus du programme de Terminale spécialité) : étude de fonctions, suites, probabilités, géométrie dans l'espace, intégrales… Tous sont de difficulté maximale. Cherche d'abord seul, puis déplie la correction rédigée étape par étape.

Version en ligne, avec les corrections dépliables : mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-specialite/sujets-type-bac

Exercice 1 – Étude d'une fonction avec exponentielle

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)e^{-x}$. On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé. On rappelle que $\lim_{x \to +\infty} xe^{-x} = 0$.

1. Déterminer la limite de f en $-\infty$.

2. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et interpréter graphiquement.

3. Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = -x\,e^{-x}$, puis dresser le tableau de variations de f.

4. Déterminer une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 0.

5. Vérifier que $F(x) = -(x+2)e^{-x}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

6. En déduire l'aire A, en unités d'aire, du domaine délimité par C, l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = 1$. Donner la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-2}.

Exercice 2 – Fonction logarithme : étude et inégalité

On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x) = x - \ln(x)$.

1. Déterminer la limite de g en 0^{+}.

2. Montrer que pour tout $x > 0$, $g(x) = x\left(1 - \dfrac{\ln(x)}{x}\right)$, puis en déduire la limite de g en $+\infty$.

3. Calculer $g'(x)$ et étudier son signe sur $]0;+\infty[$.

4. Dresser le tableau de variations de g et préciser son minimum.

5. En déduire que pour tout $x > 0$, $\ln(x) \leq x - 1$.

6. Étudier la convexité de g sur $]0;+\infty[$.

Exercice 3 – Suite définie par récurrence

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 1$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 3}$.

1. Calculer u_1 puis une valeur approchée de u_2 à 10^{-2}.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

2. Démontrer par récurrence que pour tout n, $0 \leq u_n \leq 3$.

3. Étudier le signe de $\sqrt{2x+3} - x$ pour $x \in [0;3]$, puis en déduire le sens de variation de (u_n).

4. Démontrer que (u_n) converge.

5. Déterminer la limite de (u_n).

Exercice 4 – Suite arithmético-géométrique et algorithme

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 0{,}8\,u_n + 1$. On pose, pour tout n, $v_n = u_n - 5$.

1. Calculer u_1 et v_0.

2. Démontrer que (v_n) est géométrique ; préciser sa raison.

3. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.

4. Déterminer la limite de (u_n) et préciser son sens de variation.

5. Déterminer le plus petit entier n tel que $5 - u_n < 0{,}01$.

6. Recopier et compléter l'algorithme pour qu'il renvoie cet entier : $n \leftarrow 0$; $u \leftarrow 2$; Tant que … faire $u \leftarrow \ldots$; $n \leftarrow n+1$; Fin.

Exercice 5 – Probabilités : test de dépistage

Une maladie touche 4% d'une population. Un test est positif chez 92% des personnes malades et chez 5% des personnes saines. On note M « être malade » et T « test positif ».

1. Représenter la situation par un arbre pondéré.

2. Calculer $P(M \cap T)$.

3. Démontrer que $P(T) = 0{,}0848$.

4. Calculer $P_T(M)$, arrondie à 10^{-3}, puis l'interpréter.

5. Calculer la probabilité qu'une personne dont le test est négatif soit en réalité malade (faux négatif), arrondie à 10^{-4}.

Exercice 6 – Loi binomiale : contrôle de production

Une chaîne produit des pièces dont 3% sont défectueuses. On prélève au hasard n pièces ; le stock est assez grand pour assimiler le prélèvement à un tirage avec remise. X compte le nombre de pièces défectueuses.

1. Justifier que X suit une loi binomiale et préciser ses paramètres pour $n = 40$.

2. Calculer $P(X = 0)$ pour $n = 40$, arrondi à 10^{-3}.

3. En déduire $P(X \geq 1)$.

4. Calculer $P(X \geq 2)$ pour $n = 40$, arrondi à 10^{-3}.

5. Donner $E(X)$ pour $n = 40$ et l'interpréter.

6. Déterminer le plus petit entier n pour lequel la probabilité d'au moins une pièce défectueuse dépasse 0,99.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 7 – Géométrie dans l'espace : plan et distance

L'espace est muni d'un repère orthonormé. On considère les points $A(1\,;0\,;2)$, $B(2\,;1\,;0)$ et $C(0\,;2\,;1)$.

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2. Démontrer que les points A, B, C ne sont pas alignés.

3. Vérifier que le vecteur $\vec{n}(1\,;1\,;1)$ est normal au plan (ABC).

4. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

5. Le point $D(3\,;3\,;3)$ appartient-il au plan (ABC) ? Calculer la distance de D au plan (ABC).

Exercice 8 – Géométrie dans l'espace : droite et plan

L'espace est muni d'un repère orthonormé. On considère la droite D de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ et le plan P d'équation $x + y + 2z - 4 = 0$.

1. Donner un point et un vecteur directeur de D.

2. Donner un vecteur normal de P.

3. Démontrer que D et P sont sécants.

4. Déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.

5. La droite D est-elle orthogonale au plan P ? Justifier.

Exercice 9 – Variable aléatoire : étude d'un jeu

On lance deux dés cubiques équilibrés et on observe la somme des deux faces. Une partie coûte 1 € de mise. Si la somme vaut 7, le joueur reçoit 5 € ; s'il obtient un « double » (deux faces identiques), il reçoit 2 € ; sinon il ne reçoit rien. On note G le gain algébrique (somme reçue moins la mise).

1. Justifier qu'il y a 36 issues équiprobables.

2. Calculer la probabilité que la somme vaille 7, puis celle d'obtenir un double. Justifier que ces événements sont incompatibles.

3. Déterminer la loi de probabilité de G.

4. Calculer l'espérance $E(G)$. Le jeu est-il favorable au joueur ?

5. Calculer la variance $V(G)$ et l'écart-type $\sigma(G)$ (arrondi à 10^{-2}).

Exercice 10 – Continuité, TVI et dichotomie

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x - 5$.

1. Calculer $f'(x)$ et étudier son signe.

2. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$, puis dresser le tableau de variations.

3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

4. Démontrer que $\alpha \in [1\,;2]$.

5. Par la méthode de dichotomie sur $[1\,;2]$, déterminer un encadrement de α

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d'amplitude 0,25.

Exercice 11 – Intégration par parties et aire entre deux courbes

On considère les fonctions f et g définies sur $[0;1]$ par $f(x) = xe^x$ et $g(x) = e^x$.

1. Étudier le signe de f sur $[0;1]$.

2. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $I = \int_0^1 xe^x\,dx$.

3. Interpréter graphiquement la valeur de I.

4. Calculer la valeur moyenne μ de f sur $[0;1]$.

5. Calculer $\int_0^1 (g(x) - f(x))\,dx$ et interpréter le résultat.

Exercice 12 – Convexité et inégalité de l'exponentielle

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$.

1. Déterminer $f'(x)$ et $f''(x)$.

2. En déduire que f est convexe sur $\mathbb{R}$.

3. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 0.

4. En déduire que pour tout réel x, $e^x \geq x + 1$, et préciser le cas d'égalité.

5. Application : en choisissant une valeur adaptée de x, montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $e^{-1/n} \geq 1 - \dfrac{1}{n}$.

Exercice 13 – Équation différentielle : loi de refroidissement

La température $\theta(t)$ (en °C) d'un liquide qui refroidit dans une pièce à 20 °C vérifie, pour $t \geq 0$ (t en minutes), $\theta'(t) = -0{,}4(\theta(t) - 20)$, avec $\theta(0) = 90$.

1. Vérifier que, pour toute constante C, $t \mapsto 20 + Ce^{-0{,}4t}$ est solution de l'équation.

2. Déterminer la fonction θ vérifiant $\theta(0) = 90$.

3. Étudier le sens de variation de θ sur $[0;+\infty[$.

4. Déterminer la limite de θ en $+\infty$ et l'interpréter.

5. Déterminer, à la minute près, l'instant où la température atteint 30 °C.

Exercice 14 – Dénombrement : tirage simultané

Un sac contient 10 jetons indiscernables au toucher : 4 rouges et 6 bleus. On tire simultanément 3 jetons du sac.

1. Déterminer le nombre de tirages possibles.

2. Calculer la probabilité de l'événement A : « obtenir exactement 2 jetons rouges ».

3. Calculer la probabilité de l'événement B : « obtenir 3 jetons de la même couleur ».

4. Calculer la probabilité de l'événement C : « obtenir au moins 1 jeton rouge ».

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 15 – Vrai ou faux justifié

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant soigneusement. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

1. Affirmation 1 : la fonction $x \mapsto \ln(x^2+1)$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

2. Affirmation 2 : $\lim_{x \to +\infty} (x - e^x) = -\infty$.

3. Affirmation 3 : la fonction $x \mapsto \ln(x)$ est une primitive de $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ sur $]0;+\infty[$.

4. Affirmation 4 : toute suite décroissante et minorée par 0 converge.

Exercice 16 – Fonction x·e⁻ˣ : variations, tangente et aire

On considère $f(x) = xe^{-x}$ sur $[0\,;+\infty[$, de courbe C.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2. Étudier les variations de f et donner son maximum.

3. Déterminer la tangente T en 0 et étudier la position de C par rapport à T.

4. À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_0^1 xe^{-x}\,dx$.

Exercice 17 – Méthode de Héron pour approcher √2

On définit $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right)$.

1. Calculer u_1 et u_2 sous forme de fractions.

2. Montrer que $u_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n}$ et en déduire par récurrence que $u_n \geq \sqrt{2}$ pour tout n.

3. Montrer que (u_n) est décroissante.

4. En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 18 – Composants électroniques : arbre puis loi binomiale

Une entreprise achète 60 % de ses composants au fournisseur A et 40 % au fournisseur B. 2 % des composants de A et 5 % de ceux de B sont défectueux.

1. Calculer la probabilité qu'un composant pris au hasard soit défectueux.

2. Un composant est défectueux. Quelle est la probabilité qu'il vienne de A ?

3. On prélève 50 composants (tirages assimilés à des tirages indépendants). X est le nombre de défectueux. Calculer $P(X = 0)$ et $P(X \geq 2)$.

Exercice 19 – Tétraèdre trirectangle : plan, projeté et volume

Dans un repère orthonormé, on considère $O(0\,;0\,;0)$, $A(4\,;0\,;0)$, $B(0\,;4\,;0)$ et $C(0\,;0\,;4)$.

1. Montrer que $\vec{n}(1\,;1\,;1)$ est normal au plan (ABC) et donner une équation de ce plan.

2. Déterminer le projeté orthogonal H de O sur (ABC) et la distance OH.

3. Calculer le volume du tétraèdre $OABC$, puis l'aire du triangle ABC.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 20 – Chute avec frottements : équation différentielle

La vitesse $v(t)$ (en m/s) d'un objet en chute avec frottements vérifie $v' = -0{,}5v + 5$, avec $v(0) = 0$.

1. Résoudre l'équation différentielle avec cette condition initiale.

2. Déterminer la limite de v en $+\infty$ et l'interpréter.

3. À quel instant la vitesse atteint-elle 9 m/s ?

4. Calculer la distance parcourue pendant les 4 premières secondes, $\int_0^4 v(t)\,dt$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).