Calcul intégral — Terminale STI2D

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

Une intégrale, c'est d'abord une AIRE : celle du domaine compris entre la courbe et l'axe des abscisses. Et comme cette aire s'interprète, en physique, comme une énergie (aire sous la courbe de puissance), une distance (aire sous la vitesse) ou un volume (aire sous le débit), le calcul intégral est l'outil de bilan par excellence en STI2D. Deux méthodes coexistent : l'encadrement par des RECTANGLES, qui donne une valeur approchée sans connaître de primitive, et le calcul exact $\int_a^b f = F(b) - F(a)$ quand une primitive est disponible. S'y ajoutent la linéarité, la relation de Chasles et la VALEUR MOYENNE. Ces 20 exercices corrigés couvrent tout cela, du calcul direct au bilan énergétique type bac. La difficulté est croissante : l'énoncé puis la correction détaillée s'affichent d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-sti2d/calcul-integral

Exercice 1 – Intégrale et aire d'un rectangle

Une puissance constante de 250 W est fournie pendant 8 secondes. On note $f(t) = 250$.

1. Calcule $\int_0^8 250\,dt$ par une considération d'aire.

2. Retrouve le résultat par une primitive.

3. Que représente ce nombre physiquement ?

Exercice 2 – Intégrale d'un polynôme

Calcule les intégrales $\int_0^3 (2x+1)dx$ et $\int_1^2 3x^2\,dx$.

1. Détaille le calcul de chaque intégrale.

Exercice 3 – Linéarité de l'intégrale

On donne $\int_0^2 f(x)\,dx = 5$ et $\int_0^2 g(x)\,dx = -3$.

1. Calcule $\int_0^2 (f(x)+g(x))dx$.

2. Calcule $\int_0^2 4f(x)\,dx$ et $\int_0^2 (2f(x)-3g(x))dx$.

Exercice 4 – Relation de Chasles

On donne $\int_0^4 f(x)dx = 12$ et $\int_4^9 f(x)dx = 7$.

1. Calcule $\int_0^9 f(x)dx$.

2. Sachant de plus que $\int_0^6 f(x)dx = 15$, calcule $\int_6^9 f(x)dx$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Intégrale d'une fonction négative

Soit $f(x) = -4$ sur $[1\,;5]$, et $g(x) = x - 3$ sur $[0\,;3]$.

1. Calcule $\int_1^5 f(x)dx$ et interprète le signe.

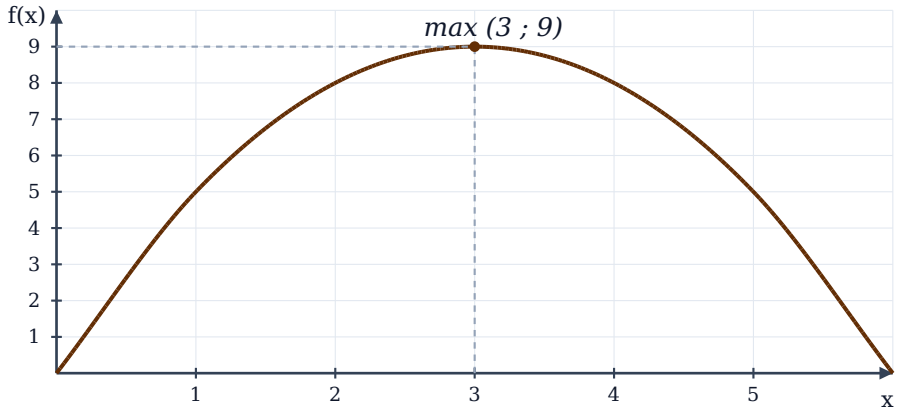
2. Calcule $\int_0^3 g(x)dx$.

Exercice 6 – Aire sous une parabole

Soit $f(x) = 6x - x^2$, positive sur $[0\,;6]$.

1. Calcule l'aire du domaine compris entre la courbe et l'axe des abscisses sur $[0\,;6]$.

2. Calcule l'aire sur $[0\,;3]$ et compare.



Exercice 7 – Valeur moyenne d'une fonction

La puissance appelée par un atelier, en kW, est modélisée par $p(t) = 40 + 6t$ sur $[0\,;10]$ (t en heures).

1. Calcule $\int_0^{10} p(t)dt$ et interprète.

2. Calcule la puissance moyenne sur ces 10 heures.

Exercice 8 – Méthode des rectangles

On veut encadrer $\int_0^2 x^2 dx$ par la méthode des rectangles, avec un pas de 0,5 (soit 4 sous-intervalles).

1. Calcule la somme des rectangles « par défaut » (hauteur au bord gauche).

2. Calcule la somme des rectangles « par excès » (hauteur au bord droit).

3. Compare avec la valeur exacte.

Exercice 9 – Intégrale d'un cosinus

Calcule $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$, puis $\int_0^{\pi} \sin x\,dx$ et $\int_0^{2\pi} \cos x\,dx$.

1. Détaille les trois calculs et commente le dernier.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 10 – Intégrale d'une composée simple

Calcule $\int_0^1 (2x+3)^2 dx$ et $\int_0^{\pi/4} \cos(2t)\,dt$.

1. Détaille les deux calculs.

Exercice 11 – Aire entre deux courbes

Soient $f(x) = 8 - x^2$ et $g(x) = 2x$ sur $[0\,;2]$.

1. Vérifie que $f(x) \geq g(x)$ sur $[0\,;2]$.

2. Calcule l'aire du domaine compris entre les deux courbes sur $[0\,;2]$.

Exercice 12 – Énergie consommée

La puissance appelée par une machine, en kW, suit $p(t) = 12t - t^2$ sur $[0\,;8]$ (t en heures).

1. Calcule l'énergie consommée sur les 8 heures.

2. Calcule la puissance moyenne.

3. À quel instant la puissance est-elle maximale, et que vaut-elle ?

Exercice 13 – Distance parcourue

Un chariot a pour vitesse $v(t) = 3t^2 - 12t + 12$ m/s sur $[0\,;5]$ (t en secondes).

1. Vérifie que la vitesse est toujours positive ou nulle.

2. Calcule la distance parcourue en 5 secondes.

3. Calcule la vitesse moyenne.

Exercice 14 – Valeur moyenne d'un signal redressé

Une tension sinusoïdale redressée simple alternance vaut $u(t) = 325\sin(100\pi t)$ volts sur la demi-période $[0\,;0{,}01]$ (et 0 sur l'autre demi-période).

1. Calcule $\int_0^{0{,}01} 325\sin(100\pi t)\,dt$.

2. Calcule la valeur moyenne de u sur la demi-période.

3. Calcule la valeur moyenne sur la période entière de 0,02 s.

Exercice 15 – Encadrement et précision

On veut estimer $\int_1^3 \frac{1}{x} dx$ par la méthode des rectangles, la fonction étant décroissante sur $[1\,;3]$.

1. Avec 4 rectangles (pas 0,5), calcule les sommes par excès et par défaut.

2. Donne l'encadrement obtenu et son amplitude.

3. Combien de rectangles faudrait-il pour une amplitude inférieure à 0,01 ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 16 – Type bac : bilan énergétique d'une machine

La puissance électrique appelée par une machine, en kW, est $p(t) = 60 - 3t^2$ sur $[0\,;4]$ (t en heures), puis $p(t) = 12$ sur $[4\,;8]$.

1. Calcule l'énergie consommée sur $[0\,;4]$.

2. Calcule l'énergie consommée sur $[4\,;8]$.

3. Déduis l'énergie totale et la puissance moyenne sur les 8 heures.

4. Le contrat facture 0,18 €/kWh. Quel est le coût de la journée ?

Exercice 17 – Type bac : aire entre coût et recette

Pour une production de q centaines de pièces ($0 \leq q \leq 6$), le coût marginal est $C'(q) = 3q^2 - 12q + 20$ et la recette marginale est $R'(q) = 20 - 2q$, en milliers d'euros par centaine.

1. Détermine la quantité pour laquelle les deux coïncident.

2. Calcule $\int_0^3 (R'(q) - C'(q))dq$ et interprète.

3. Calcule $\int_3^6 (R'(q) - C'(q))dq$ et interprète.

4. Quelle production maximise le bénéfice ?

Exercice 18 – Type bac : méthode des rectangles programmée

On veut estimer $\int_0^3 \left(9 - x^2\right)dx$ par la méthode des rectangles, avec n sous-intervalles.

1. Écris un programme Python calculant la somme des rectangles par défaut.

2. Calcule la valeur exacte de l'intégrale.

3. Que renvoie le programme pour $n = 3$? Compare.

4. Comment améliorer l'estimation ?

Exercice 19 – Type bac : du débit au volume

Le débit d'une pompe, en L/min, suit $d(t) = 50 + 30\sin\left(\frac{\pi t}{30}\right)$ sur $[0\,;30]$ (t en minutes).

1. Calcule le débit à $t = 0$, $t = 15$ et $t = 30$.

2. Calcule le volume pompé en 30 minutes.

3. Calcule le débit moyen et compare au débit constant 50 L/min.

Exercice 20 – Type bac : température moyenne d'un local

La température d'un local, en °C, suit $T(t) = 19 + 4\sin\left(\frac{\pi t}{12}\right)$ sur $[0\,;24]$ (t en heures depuis minuit).

1. Calcule la température à 0 h, 6 h, 12 h et 18 h.

2. Calcule la température moyenne sur les 24 heures.

3. Calcule la température moyenne sur la journée de travail $[8\,;17]$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

4. La consigne impose une moyenne de travail comprise entre 19 et 22 °C. Est-elle respectée ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Intégrale et aire d'un rectangle

Le domaine sous la courbe est un rectangle de largeur 8 (l'intervalle de temps) et de hauteur 250.

Son aire vaut $8 \times 250 = 2\,000$.

Par une primitive : une primitive de $f(t) = 250$ est $F(t) = 250t$.

$\int_0^8 250\,dt = F(8) - F(0) = 2\,000 - 0 = 2\,000$ ✔ Même résultat.

Interprétation physique : l'intégrale d'une puissance (en watts) sur un temps (en secondes) est une ÉNERGIE, en joules.

L'énergie fournie vaut donc 2 000 J, soit 2 kJ.

Réponse. $\int_0^8 250\,dt = 2\,000$ · c'est l'aire du rectangle 8×250, et l'énergie fournie : 2 000 J.

Rappel de cours. $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f. Pour une fonction constante, c'est l'aire d'un rectangle.

Erreur fréquente. Écrire $F(8) - F(0) = 250 \times 8 - 250 = 1\,750$: $F(0) = 250 \times 0 = 0$, pas 250.

Correction de l'exercice 2 – Intégrale d'un polynôme

Première intégrale : une primitive de $2x + 1$ est $F(x) = x^2 + x$.

$\int_0^3 (2x + 1)dx = F(3) - F(0) = (9 + 3) - 0 = 12$.

Contrôle géométrique : le domaine est un trapèze de bases $f(0) = 1$ et $f(3) = 7$, de hauteur 3, donc d'aire $\frac{(1 + 7) \times 3}{2} = 12$ ✔.

Seconde intégrale : une primitive de $3x^2$ est $G(x) = x^3$.

$\int_1^2 3x^2 dx = G(2) - G(1) = 8 - 1 = 7$.

Notation usuelle : on écrit $\left[x^3\right]_1^2 = 8 - 1 = 7$, les crochets rappelant qu'on évalue la primitive aux deux bornes.

Réponse. $\int_0^3 (2x + 1)dx = 12$ · $\int_1^2 3x^2 dx = 7$.

Rappel de cours. On cherche UNE primitive (la constante s'élimine dans la soustraction), puis on calcule $F(b) - F(a)$.

Erreur fréquente. Soustraire dans le mauvais sens : $F(a) - F(b)$ donne l'opposé. L'ordre est toujours « borne du haut moins borne du bas ».

Correction de l'exercice 3 – Linéarité de l'intégrale

L'intégrale d'une somme est la somme des intégrales : $\int_0^2 (f + g) = 5 + (-3) = 2$.

Un coefficient constant sort de l'intégrale : $\int_0^2 4f = 4 \times 5 = 20$.

En combinant les deux propriétés : $\int_0^2 (2f - 3g) = 2 \times 5 - 3 \times (-3) = 10 + 9 = 19$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Attention au double signe : $-3 \times (-3) = +9$.

Ces propriétés s'appellent la LINÉARITÉ de l'intégrale. Elles permettent de décomposer un calcul compliqué en morceaux simples.

En revanche, il n'existe AUCUNE formule pour l'intégrale d'un produit : $\int fg \neq \left(\int f\right)\left(\int g\right)$.

Réponse. $\int_0^2 (f+g) = 2 \cdot \int_0^2 4f = 20 \cdot \int_0^2 (2f-3g) = 19$.

Rappel de cours. $\int (af+bg) = a\int f + b\int g$: la linéarité vaut pour les sommes et les multiples, jamais pour les produits.

Erreur fréquente. Écrire $\int fg = \left(\int f\right)\left(\int g\right)$: ce serait -15, sans aucun fondement.

Correction de l'exercice 4 – Relation de Chasles

Relation de Chasles : $\int_0^9 = \int_0^4 + \int_4^9$.

Donc $\int_0^9 f = 12 + 7 = 19$.

Géométriquement : l'aire totale est la somme des aires des deux morceaux, découpés en $x = 4$.

Pour la seconde question, on écrit $\int_0^9 = \int_0^6 + \int_6^9$, soit $19 = 15 + \int_6^9 f$.

Donc $\int_6^9 f = 19 - 15 = 4$.

Contrôle de cohérence : sur $[4\,;9]$ l'intégrale vaut 7, dont 4 sur $[6\,;9]$. Il reste donc 3 sur $[4\,;6]$, et $12 + 3 = 15 = \int_0^6 f$ ✔.

Réponse. $\int_0^9 f = 19 \cdot \int_6^9 f = 4$.

Rappel de cours. Chasles : $\int_a^c = \int_a^b + \int_b^c$ — on découpe l'intervalle, on additionne les aires.

Erreur fréquente. Soustraire dans le mauvais ordre : $\int_6^9 = \int_0^9 - \int_0^6$, et non l'inverse.

Correction de l'exercice 5 – Intégrale d'une fonction négative

Une primitive de f est $F(x) = -4x$, donc $\int_1^5 f = -20 - (-4) = -16$.

Le résultat est NÉGATIF : la courbe est entièrement sous l'axe des abscisses. L'intégrale compte alors l'aire avec un signe moins.

L'aire géométrique du domaine vaut bien $4 \times 4 = 16$ unités, mais l'intégrale vaut -16.

Pour g : une primitive est $G(x) = \dfrac{x^2}{2} - 3x$.

$\int_0^3 g = G(3) - G(0) = (4{,}5 - 9) - 0 = -4{,}5$.

Interprétation : sur $[0\,;3]$, g est négative (car $x < 3$), d'où une intégrale négative.

À retenir : une intégrale est une aire ALGÉBRIQUE. Elle est positive au-dessus de l'axe, négative en dessous, et les deux se compensent si la fonction change de signe.

Réponse. $\int_1^5 f = -16$ (courbe sous l'axe, aire géométrique 16) · $\int_0^3 g = -4{,}5$.

Rappel de cours. Intégrale = aire ALGÉBRIQUE : négative là où la fonction est négative. Pour une aire géométrique, on intègre $|f|$ ou l'on découpe.

Erreur fréquente. Annoncer une aire négative : une aire est positive, c'est l'INTÉGRALE qui peut être négative.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 6 – Aire sous une parabole

Une primitive de f est $F(x) = 3x^2 - \frac{x^3}{3}$.

$\int_0^6 f = F(6) - F(0) = \left(108 - \frac{216}{3}\right) - 0 = 108 - 72 = 36$.

L'aire vaut donc 36 unités d'aire.

Sur $[0\,;3]$: $F(3) = 27 - \frac{27}{3} = 27 - 9 = 18$.

$\int_0^3 f = 18 - 0 = 18$, soit exactement la MOITIÉ de l'aire totale.

Ce n'est pas un hasard : la parabole est symétrique par rapport à son axe $x = 3$ (milieu des racines 0 et 6), donc les deux moitiés ont la même aire ✔.

Contrôle de vraisemblance : le domaine est inscrit dans le rectangle 6×9 (f atteint son maximum 9 en $x = 3$), d'aire 54. Or $36 = \frac{2}{3} \times 54$ — c'est la règle d'Archimède pour un segment de parabole ✔.

Réponse. Aire sur $[0\,;6]$: 36 unités d'aire · aire sur $[0\,;3]$: 18, soit la moitié (symétrie de la parabole).

Rappel de cours. Si $f \geq 0$ sur $[a\,;b]$, l'aire du domaine sous la courbe est exactement $\int_a^b f$.

Erreur fréquente. Oublier de diviser x^3 par 3 dans la primitive : on obtiendrait $108 - 216 = -108$, absurde pour une fonction positive.

Correction de l'exercice 7 – Valeur moyenne d'une fonction

Une primitive de p est $P(t) = 40t + 3t^2$.

$\int_0^{10} p = P(10) - P(0) = (400 + 300) - 0 = 700$.

Interprétation : l'intégrale d'une puissance en kW sur un temps en heures donne une ÉNERGIE en kWh. L'atelier a consommé 700 kWh.

Valeur moyenne : $m = \frac{1}{b-a}\int_a^b p(t)dt = \frac{700}{10} = 70$ kW.

Vérification par la géométrie : p étant affine, sa valeur moyenne est la moyenne de ses valeurs aux bornes, soit $\frac{p(0)+p(10)}{2} = \frac{40+100}{2} = 70$ ✔.

Sens physique de la valeur moyenne : une puissance CONSTANTE de 70 kW pendant 10 heures consommerait la même énergie (700 kWh) que la puissance variable réelle.

Réponse. $\int_0^{10} p = 700$ kWh d'énergie · puissance moyenne $m = \frac{700}{10} = 70$ kW.

Rappel de cours. Valeur moyenne : $m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f$. C'est la hauteur du rectangle de même aire.

Erreur fréquente. Oublier de diviser par $b - a$: 700 est une énergie (kWh), 70 une puissance (kW). Les unités le disent.

Correction de l'exercice 8 – Méthode des rectangles

La fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $[0\,;2]$: le bord gauche donne donc la valeur la plus petite de chaque rectangle.

Rectangles par défaut : hauteurs $f(0) = 0$, $f(0{,}5) = 0{,}25$, $f(1) = 1$, $f(1{,}5) = 2{,}25$, chacun de

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

largeur 0,5.

Somme : $0{,}5 \times (0 + 0{,}25 + 1 + 2{,}25) = 0{,}5 \times 3{,}5 = 1{,}75$.

Rectangles par excès : hauteurs $f(0{,}5) = 0{,}25$, $f(1) = 1$, $f(1{,}5) = 2{,}25$, $f(2) = 4$.

Somme : $0{,}5 \times (0{,}25 + 1 + 2{,}25 + 4) = 0{,}5 \times 7{,}5 = 3{,}75$.

Encadrement : $1{,}75 \leq \int_0^2 x^2 dx \leq 3{,}75$.

Valeur exacte : une primitive est $\frac{x^3}{3}$, donc $\int_0^2 x^2 dx = \frac{8}{3} \approx 2{,}667$ ✔ bien dans l'encadrement.

Précision : l'encadrement a une amplitude de 2, ce qui est large. Avec un pas de 0,1 (20 rectangles), elle tomberait à 0,4 ; l'amplitude est proportionnelle au pas.

Réponse. Par défaut 1,75, par excès 3,75 · encadrement $1{,}75 \leq \int_0^2 x^2 dx \leq 3{,}75$ · valeur exacte $\frac{8}{3} \approx 2{,}667$ ✔.

Rappel de cours. Méthode des rectangles : pour une fonction CROISSANTE, le bord gauche minore et le bord droit majore l'intégrale.

Erreur fréquente. Utiliser les mêmes hauteurs pour les deux sommes : elles diffèrent d'un décalage d'un rectangle, d'où l'écart $0{,}5 \times (f(2) - f(0)) = 2$.

Correction de l'exercice 9 – Intégrale d'un cosinus

Une primitive de cos est sin, donc $\int_0^{\pi/2} \cos x \, dx = [\sin x]_0^{\pi/2} = 1 - 0 = 1$.

Une primitive de sin est $-\cos$, donc $\int_0^{\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi} = -(-1) - (-1) = 1 + 1 = 2$.

Enfin $\int_0^{2\pi} \cos x \, dx = [\sin x]_0^{2\pi} = 0 - 0 = 0$.

Commentaire : ce résultat nul ne signifie pas que la fonction est nulle, mais que les aires au-dessus et en dessous de l'axe se COMPENSENT exactement sur une période.

C'est un résultat fondamental en électricité : la valeur moyenne d'un signal alternatif sur une période est NULLE.

Contrôle : sur $[0\,;\pi/2]$ l'aire est 1, et par symétrie l'aire négative sur $[\pi/2\,;3\pi/2]$ vaut -2, puis $+1$ sur $[3\pi/2\,;2\pi]$: total $1 - 2 + 1 = 0$ ✔.

Réponse. $\int_0^{\pi/2} \cos = 1 \cdot \int_0^{\pi} \sin = 2 \cdot \int_0^{2\pi} \cos = 0$: les aires positives et négatives se compensent sur une période.

Rappel de cours. Primitives : cos → sin et sin → − cos. Sur une période complète, l'intégrale d'une sinusoïde est nulle.

Erreur fréquente. Conclure « aire nulle donc pas de signal » : l'aire ALGÉBRIQUE est nulle, mais l'énergie transportée, elle, ne l'est pas.

Correction de l'exercice 10 – Intégrale d'une composée simple

Première intégrale : une primitive de $(2x + 3)^2$ est $\frac{(2x+3)^3}{2 \times 3} = \frac{(2x+3)^3}{6}$ (on divise par le coefficient 2 et par le nouvel exposant 3).

$$\int_0^1 (2x + 3)^2 dx = \left[\frac{(2x+3)^3}{6} \right]_0^1 = \frac{125}{6} - \frac{27}{6} = \frac{98}{6} = \frac{49}{3} \approx 16{,}33.$$

Contrôle par développement : $(2x + 3)^2 = 4x^2 + 12x + 9$, de primitive $\frac{4x^3}{3} + 6x^2 + 9x$, qui

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

donne $\frac{4}{3} + 6 + 9 = \frac{4 + 45}{3} = \frac{49}{3}$ ✔.

Seconde intégrale : une primitive de $\cos(2t)$ est $\frac{1}{2}\sin(2t)$.

$$\int_0^{\pi/4} \cos(2t)dt = \left[\frac{\sin(2t)}{2}\right]_0^{\pi/4} = \frac{\sin(\pi/2)}{2} - \frac{\sin 0}{2} = \frac{1}{2}.$$

À retenir : pour une composée $f(ax+b)$, la primitive fait apparaître un facteur $\frac{1}{a}$.

Réponse. $\int_0^1 (2x+3)^2 dx = \frac{49}{3} \approx 16{,}33$ · $\int_0^{\pi/4} \cos(2t)dt = \frac{1}{2}$.

Rappel de cours. Primitive de $(ax+b)^n$: $\frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)}$ · de $\cos(at)$: $\frac{\sin(at)}{a}$.

Erreur fréquente. Oublier le $\frac{1}{a}$: on trouverait 1 au lieu de $\frac{1}{2}$ pour la seconde intégrale, soit le double.

Correction de l’exercice 11 – Aire entre deux courbes

On étudie la différence : $f(x) - g(x) = 8 - x^2 - 2x = -x^2 - 2x + 8$.

On la factorise : $-(x^2 + 2x - 8) = -(x+4)(x-2)$.

Sur $[0\,;2]$, le facteur $(x+4)$ est positif et $(x-2)$ est négatif ou nul, donc $-(x+4)(x-2) \geq 0$ ✔ On a bien $f \geq g$.

Aire entre les courbes : $A = \int_0^2 (f(x) - g(x))dx = \int_0^2 \left(-x^2 - 2x + 8\right)dx$.

Une primitive est $-\frac{x^3}{3} - x^2 + 8x$.

En $x = 2$: $-\frac{8}{3} - 4 + 16 = 12 - \frac{8}{3} = \frac{36 - 8}{3} = \frac{28}{3}$.

En $x = 0$: 0.

Donc $A = \frac{28}{3} \approx 9{,}33$ unités d’aire.

Contrôle d’ordre de grandeur : l’écart $f - g$ vaut 8 en $x = 0$ et 0 en $x = 2$, donc l’aire doit être inférieure à celle du triangle $\frac{2 \times 8}{2} = 8$… or l’on trouve 9,33. L’écart n’est pas linéaire mais CONCAVE (il vaut 5 en $x = 1$ au lieu de 4), ce qui explique l’aire supérieure ✔.

Réponse. $f - g = -(x+4)(x-2) \geq 0$ sur $[0\,;2]$ ✔ · aire $= \int_0^2 (f-g) = \frac{28}{3} \approx 9{,}33$ unités d’aire.

Rappel de cours. Aire entre deux courbes : $\int_a^b$(courbe du haut − courbe du bas). Il faut donc d’abord déterminer laquelle est au-dessus.

Erreur fréquente. Intégrer $g - f$: on obtiendrait $-\frac{28}{3}$, une aire négative. L’ordre de la soustraction se décide en étudiant le signe de la différence.

Correction de l’exercice 12 – Énergie consommée

Énergie : $E = \int_0^8 (12t - t^2)dt$.

Une primitive est $6t^2 - \frac{t^3}{3}$.

En $t = 8$: $6 \times 64 - \frac{512}{3} = 384 - 170{,}67 = 213{,}33$.

Donc $E \approx 213{,}3$ kWh.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Puissance moyenne : $m = \dfrac{213{,}33}{8} \approx 26{,}7$ kW.

Maximum de la puissance : $p'(t) = 12 - 2t$, nulle en $t = 6$ h, avec changement de signe du positif au négatif : c'est un maximum.

$p(6) = 72 - 36 = 36$ kW.

Lecture d'ensemble : la puissance culmine à 36 kW mais sa moyenne n'est que de 26,7 kW. C'est cette distinction qui compte pour la facturation : l'énergie dépend de la MOYENNE, l'abonnement du MAXIMUM.

Contrôle : une puissance constante de 26,7 kW pendant 8 h donnerait 213,6 kWh ✔ (l'écart vient des arrondis).

Réponse. $E = \int_0^8 (12t - t^2)dt \approx 213{,}3$ kWh · puissance moyenne $\approx 26{,}7$ kW · maximum 36 kW à $t = 6$ h.

Rappel de cours. Énergie = $\int$ puissance · puissance moyenne = $\dfrac{\text{énergie}}{\text{durée}}$. Le maximum, lui, s'obtient en dérivant.

Erreur fréquente. Confondre puissance maximale (36 kW, obtenue par dérivation) et puissance moyenne (26,7 kW, obtenue par intégration).

Correction de l'exercice 13 – Distance parcourue

On factorise : $3t^2 - 12t + 12 = 3(t^2 - 4t + 4) = 3(t-2)^2$.

Un carré étant toujours positif, $v(t) \geq 0$ sur $[0\,;5]$ ✔ (et $v(2) = 0$: le chariot s'arrête un instant).

Distance : $d = \int_0^5 3(t-2)^2 dt$.

Une primitive de $3(t-2)^2$ est $(t-2)^3$ (car la dérivée de $(t-2)^3$ est $3(t-2)^2$).

$d = \Big[(t-2)^3\Big]_0^5 = 3^3 - (-2)^3 = 27 + 8 = 35$ m.

Vitesse moyenne : $\dfrac{35}{5} = 7$ m/s.

Contrôle : $v(0) = 12$ m/s, $v(2) = 0$, $v(5) = 27$ m/s. Une moyenne de 7 m/s est cohérente avec ces valeurs, la vitesse étant faible sur une bonne partie de l'intervalle ✔.

Remarque : la vitesse s'annulant sans changer de signe, le chariot ne recule jamais. Si elle avait changé de signe, la distance PARCOURUE aurait exigé d'intégrer $|v|$, alors que l'intégrale de v donne seulement le DÉPLACEMENT.

Réponse. $v(t) = 3(t-2)^2 \geq 0$ ✔ · distance = $\Big[(t-2)^3\Big]_0^5 = 35$ m · vitesse moyenne 7 m/s.

Rappel de cours. $\int_a^b v(t)dt$ est le DÉPLACEMENT. Il coïncide avec la distance parcourue seulement si v garde un signe constant.

Erreur fréquente. Développer $3(t-2)^2$ puis primitiver terme à terme est correct mais plus long ; reconnaître la forme $(t-2)^3$ évite trois calculs.

Correction de l'exercice 14 – Valeur moyenne d'un signal redressé

Une primitive de $325\sin(100\pi t)$ est $-\dfrac{325}{100\pi}\cos(100\pi t)$.

En $t = 0{,}01$: $100\pi \times 0{,}01 = \pi$, donc $\cos\pi = -1$ et le terme vaut $+\dfrac{325}{100\pi}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

En $t = 0$: $\cos 0 = 1$, donc le terme vaut $-\frac{325}{100\pi}$.

Intégrale : $\frac{325}{100\pi} + \frac{325}{100\pi} = \frac{650}{100\pi} = \frac{6{,}5}{\pi} \approx 2{,}069$.

Valeur moyenne sur la demi-période : $\frac{1}{0{,}01} \times 2{,}069 \approx 206{,}9$ V.

Formule générale retrouvée : $\frac{2A}{\pi} = \frac{2 \times 325}{\pi} \approx 206{,}9$ V ✔ — la valeur moyenne d'une demi-sinusoïde vaut $\frac{2}{\pi} \approx 0{,}637$ fois l'amplitude.

Sur la période entière : la tension est nulle pendant la seconde demi-période, donc l'intégrale reste 2,069 mais la durée double.

Valeur moyenne : $\frac{2{,}069}{0{,}02} \approx 103{,}5$ V, soit exactement la moitié de la précédente — c'est-à-dire $\frac{A}{\pi} \approx 103{,}5$ V.

C'est la valeur qu'indiquerait un voltmètre en position « courant continu » branché sur ce redresseur simple alternance.

Réponse. $\int_0^{0{,}01} u = \frac{6{,}5}{\pi} \approx 2{,}069$ · valeur moyenne sur la demi-période $\approx 206{,}9$ V $\left(= \frac{2A}{\pi}\right)$ · sur la période entière $\approx 103{,}5$ V $\left(= \frac{A}{\pi}\right)$.

Rappel de cours. Valeur moyenne d'une demi-sinusoïde : $\frac{2A}{\pi} \approx 0{,}637A$. Sur une période complète avec redressement simple : $\frac{A}{\pi}$.

Erreur fréquente. Diviser par la mauvaise durée : la valeur moyenne dépend de l'intervalle choisi, et elle est deux fois plus petite sur la période entière.

Correction de l'exercice 15 – Encadrement et précision

La fonction étant DÉCROISSANTE, le bord gauche donne la valeur la plus grande de chaque rectangle : c'est lui qui majore.

Somme par excès (bords gauches 1, 1,5, 2, 2,5) : $0{,}5\left(1 + \frac{1}{1{,}5} + 0{,}5 + 0{,}4\right)$.

$= 0{,}5(1 + 0{,}666\,7 + 0{,}5 + 0{,}4) = 0{,}5 \times 2{,}566\,7 \approx 1{,}283$.

Somme par défaut (bords droits 1,5, 2, 2,5, 3) :
$0{,}5(0{,}666\,7 + 0{,}5 + 0{,}4 + 0{,}333\,3) = 0{,}5 \times 1{,}9 = 0{,}95$.

Encadrement : $0{,}95 \leq \int_1^3 \frac{1}{x}dx \leq 1{,}283$, d'amplitude 0,333.

Cette amplitude vaut pas $\times (f(1) - f(3)) = 0{,}5 \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 0{,}5 \times 0{,}666\,7 = 0{,}333$ ✔.

Pour une amplitude inférieure à 0,01, il faut pas $\times\, 0{,}666\,7 < 0{,}01$, soit pas $< 0{,}015$.

Comme l'intervalle mesure 2 unités, il faudrait plus de $\frac{2}{0{,}015} \approx 133$ rectangles.

Pour information, la valeur exacte est $\ln 3 \approx 1{,}0986$ — la fonction ln, dont ce chapitre et le suivant montrent qu'elle est justement la primitive de $\frac{1}{x}$.

Réponse. Par excès $\approx 1{,}283$, par défaut 0,95 · encadrement d'amplitude 0,333 = pas $\times (f(1) - f(3))$ · il faudrait plus de 133 rectangles pour descendre sous 0,01.

Rappel de cours. Amplitude de l'encadrement par rectangles = pas $\times |f(b) - f(a)|$ pour une fonction monotone : elle décroît PROPORTIONNELLEMENT au pas.

Erreur fréquente. Intervertir les deux sommes : pour une fonction DÉCROISSANTE, c'est le bord gauche qui majore, l'inverse d'une fonction croissante.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 16 – Type bac : bilan énergétique d’une machine

Sur $[0\,;4]$: une primitive de $60-3t^2$ est $60t-t^3$.

$E_1=\left[60t-t^3\right]_0^4=(240-64)-0=176$ kWh.

Contrôle de cohérence : $p(0)=60$ kW et $p(4)=60-48=12$ kW, donc une énergie de 176 kWh sur 4 h correspond à une moyenne de 44 kW — bien comprise entre 12 et 60 ✔.

Sur $[4\,;8]$, la puissance est constante : $E_2=12\times 4=48$ kWh.

On peut le retrouver par l’intégrale : $[12t]_4^8=96-48=48$ ✔.

Énergie totale (relation de Chasles) : $E=176+48=224$ kWh.

Puissance moyenne sur 8 h : $\dfrac{224}{8}=28$ kW.

Coût : $224\times 0{,}18=40{,}32$ €.

Remarque de gestion : la machine consomme 79% de son énergie dans la première moitié de la journée (176 kWh sur 224). Déplacer une partie de cette charge vers les heures creuses serait le principal levier d’économie.

Contrôle final de continuité : $p(4)=12$ kW par les deux expressions ✔ le modèle est bien raccordé en $t=4$.

Réponse. $E_1=176$ kWh · $E_2=48$ kWh · total 224 kWh et puissance moyenne 28 kW · coût 40,32 €.

Rappel de cours. Pour une fonction définie par morceaux, on intègre morceau par morceau et l’on additionne (relation de Chasles).

Erreur fréquente. Intégrer $60-3t^2$ sur tout $[0\,;8]$: la fonction deviendrait négative ($p(8)=-132$ kW), ce qui n’a aucun sens et fausserait le bilan.

Correction de l’exercice 17 – Type bac : aire entre coût et recette

Égalité : $3q^2-12q+20=20-2q$, soit $3q^2-10q=0$, donc $q(3q-10)=0$.

Les solutions sont $q=0$ et $q=\dfrac{10}{3}\approx 3{,}33$ centaines.

Différence : $R'(q)-C'(q)=20-2q-3q^2+12q-20=-3q^2+10q$.

Une primitive est $-q^3+5q^2$.

Sur $[0\,;3]$: $\left[-q^3+5q^2\right]_0^3=-27+45=18$.

Interprétation : produire les 300 premières pièces apporte un bénéfice de 18 milliers d’euros — la recette marginale y dépasse le coût marginal.

Sur $[3\,;6]$: en $q=6$, $-216+180=-36$; en $q=3$, 18. Donc l’intégrale vaut $-36-18=-54$.

Interprétation : produire de 300 à 600 pièces FAIT PERDRE 54 milliers d’euros, le coût marginal y dépassant la recette marginale.

Production optimale : le bénéfice croît tant que $R'>C'$, c’est-à-dire jusqu’à $q=\dfrac{10}{3}\approx 3{,}33$ centaines, soit environ 333 pièces.

Bénéfice maximal : $\left[-q^3+5q^2\right]_0^{10/3}=-\dfrac{1\,000}{27}+5\times\dfrac{100}{9}=-37{,}04+55{,}56\approx 18{,}52$ milliers d’euros.

Contrôle : 18,52 > 18 (valeur à $q=3$) ✔ et le bénéfice décroît ensuite, ce que confirme l’intégrale négative sur $[3\,;6]$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $R' = C'$ pour $q = \frac{10}{3} \approx 3{,}33$ centaines · $\int_0^3 (R' - C') = 18$ (bénéfice gagné) · $\int_3^6 (R' - C') = -54$ (perte) · optimum à ≈ 333 pièces, pour un bénéfice de ≈ 18,52 k€.

Rappel de cours. L'aire entre recette marginale et coût marginal est le BÉNÉFICE. Quand la seconde dépasse la première, l'aire est négative et le bénéfice diminue.

Erreur fréquente. Calculer $\int_0^6 (R' - C') = 18 - 54 = -36$ et conclure que la production est perdante : c'est le bilan à 600 pièces, mais s'arrêter à 333 rapporte 18,52 k€.

Correction de l'exercice 18 – Type bac : méthode des rectangles programmée

La fonction $9 - x^2$ est décroissante sur $[0\,;3]$: les rectangles par défaut utilisent donc les bords DROITS.

```
def rectangles(n):
    h = 3 / n
    S = 0
    for k in range(1, n+1):
        x = k * h
        S = S + h * (9 - x**2)
    return S
```

Le `range(1, n+1)` parcourt les bords droits h, $2h$, …, $nh = 3$.

Valeur exacte : une primitive de $9 - x^2$ est $9x - \frac{x^3}{3}$.

$\int_0^3 (9 - x^2)dx = 27 - 9 = 18$.

Pour $n = 3$, le pas vaut 1 et les hauteurs sont $f(1) = 8$, $f(2) = 5$, $f(3) = 0$.

Le programme renvoie $1 \times (8 + 5 + 0) = 13$, contre 18 exactement : l'écart est de 5, soit 28%.

Améliorer l'estimation : augmenter n. Avec $n = 30$, on obtiendrait 17,55 ; avec $n = 300$, 17,955. L'erreur décroît proportionnellement à $\frac{1}{n}$.

Meilleure idée : faire la MOYENNE des sommes par défaut et par excès. Pour $n = 3$, la somme par excès vaut $1 \times (9 + 8 + 5) = 22$, et la moyenne $\frac{13 + 22}{2} = 17{,}5$ — déjà bien plus proche de 18 qu'aucune des deux.

C'est le principe de la méthode des trapèzes, qui converge beaucoup plus vite.

Réponse. Boucle `S = S + h*(9 - x**2)` sur les bords droits · valeur exacte 18 · pour $n = 3$, le programme renvoie 13 · on améliore en augmentant n ou en moyennant avec la somme par excès (17,5).

Rappel de cours. Rectangles : erreur proportionnelle à $\frac{1}{n}$. Moyenne des deux sommes (trapèzes) : erreur proportionnelle à $\frac{1}{n^2}$.

Erreur fréquente. Utiliser `range(n)` (bords gauches $0, h, \ldots$) en croyant minorer : pour une fonction décroissante, ce sont les bords gauches qui MAJORENT.

Correction de l'exercice 19 – Type bac : du débit au volume

$d(0) = 50 + 30 \sin 0 = 50$ L/min.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$d(15) = 50 + 30\sin\frac{\pi}{2} = 50 + 30 = 80$ L/min.

$d(30) = 50 + 30\sin\pi = 50$ L/min.

Volume : $V = \int_0^{30}\left(50 + 30\sin\frac{\pi t}{30}\right)dt$.

Par linéarité, on sépare : $\int_0^{30} 50\,dt = 1\,500$.

Pour le second terme, une primitive de $30\sin\left(\frac{\pi t}{30}\right)$ est
$-30 \times \frac{30}{\pi}\cos\left(\frac{\pi t}{30}\right) = -\frac{900}{\pi}\cos\left(\frac{\pi t}{30}\right)$.

En $t = 30$: $-\frac{900}{\pi}\cos\pi = +\frac{900}{\pi}$. En $t = 0$: $-\frac{900}{\pi}$.

Donc ce terme vaut $\frac{900}{\pi} + \frac{900}{\pi} = \frac{1\,800}{\pi} \approx 572{,}96$.

Volume total : $V \approx 1\,500 + 573 = 2\,073$ litres.

Débit moyen : $\frac{2\,073}{30} \approx 69{,}1$ L/min.

Comparaison : le débit moyen dépasse de 19,1 L/min le débit de base de 50 L/min. C'est logique — le terme sinusoïdal est POSITIF sur toute la durée $[0\,;30]$, qui ne couvre qu'une demi-période.

Contrôle : la valeur moyenne d'une demi-sinusoïde d'amplitude 30 vaut $\frac{2\times 30}{\pi} \approx 19{,}1$ ✔ On retrouve exactement l'écart constaté.

Réponse. $d(0) = d(30) = 50$ et $d(15) = 80$ L/min · $V = 1\,500 + \frac{1\,800}{\pi} \approx 2\,073$ L · débit moyen $\approx 69{,}1$ L/min, soit $50 + \frac{60}{\pi}$.

Rappel de cours. Linéarité : on intègre séparément la partie constante et la partie sinusoïdale, puis on additionne.

Erreur fréquente. Croire que le débit moyen vaut 50 L/min « parce que le sinus a une moyenne nulle » : ce n'est vrai que sur une PÉRIODE COMPLÈTE, or ici l'on n'en couvre que la moitié.

Correction de l'exercice 20 – Type bac : température moyenne d'un local

$T(0) = 19 + 4\sin 0 = 19$ °C.

$T(6) = 19 + 4\sin\frac{\pi}{2} = 23$ °C.

$T(12) = 19 + 4\sin\pi = 19$ °C.

$T(18) = 19 + 4\sin\frac{3\pi}{2} = 19 - 4 = 15$ °C.

Sur $[0\,;24]$: la durée 24 h correspond à une PÉRIODE complète du sinus (car $\frac{\pi t}{12}$ parcourt 0 à 2π).

L'intégrale du terme sinusoïdal est donc nulle, et la température moyenne vaut exactement 19 °C.

Sur $[8\,;17]$: $\int_8^{17} T(t)dt = \int_8^{17} 19\,dt + \int_8^{17} 4\sin\left(\frac{\pi t}{12}\right)dt$.

Premier terme : $19 \times 9 = 171$.

Second terme : une primitive est $-\frac{48}{\pi}\cos\left(\frac{\pi t}{12}\right)$.

En $t = 17$: $\frac{\pi\times 17}{12} \approx 4{,}451$ rad, et $\cos(4{,}451) \approx -0{,}258\,8$, donc le terme vaut

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$-\frac{48}{\pi} \times (-0{,}258\,8) \approx +3{,}954$.

En $t = 8$: $\frac{8\pi}{12} = \frac{2\pi}{3}$, et $\cos\frac{2\pi}{3} = -0{,}5$, donc le terme vaut $+\frac{24}{\pi} \approx 7{,}639$.

Le second terme de l'intégrale vaut donc $3{,}954 - 7{,}639 \approx -3{,}685$.

Intégrale totale : $171 - 3{,}685 \approx 167{,}3$, donc la température moyenne vaut $\frac{167{,}3}{9} \approx 18{,}6$ °C.

Conclusion : 18,6 °C est INFÉRIEUR à la consigne minimale de 19 °C. La consigne n'est pas respectée.

Explication physique : la plage $[8\,;17]$ couvre surtout la phase descendante du cycle (maximum à 6 h, minimum à 18 h). Il faudrait décaler le chauffage, ou relever la température de base de 0,5 °C.

Réponse. $T(0) = T(12) = 19$ °C, $T(6) = 23$ °C, $T(18) = 15$ °C · moyenne sur 24 h : exactement 19 °C · moyenne sur $[8\,;17]$: ≈ 18,6 °C · consigne NON respectée (< 19 °C).

Rappel de cours. Sur une période complète, un terme sinusoïdal a une intégrale nulle. Sur un intervalle partiel, il faut la calculer.

Erreur fréquente. Conclure « moyenne 19 °C donc conforme » : c'est la moyenne sur 24 h. Sur les heures de travail, elle est plus basse.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).