Calcul intégral — Terminale STI2D

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés

Présentation

Une intégrale, c'est d'abord une AIRE : celle du domaine compris entre la courbe et l'axe des abscisses. Et comme cette aire s'interprète, en physique, comme une énergie (aire sous la courbe de puissance), une distance (aire sous la vitesse) ou un volume (aire sous le débit), le calcul intégral est l'outil de bilan par excellence en STI2D. Deux méthodes coexistent : l'encadrement par des RECTANGLES, qui donne une valeur approchée sans connaître de primitive, et le calcul exact $\int_a^b f = F(b) - F(a)$ quand une primitive est disponible. S'y ajoutent la linéarité, la relation de Chasles et la VALEUR MOYENNE. Ces 20 exercices corrigés couvrent tout cela, du calcul direct au bilan énergétique type bac. La difficulté est croissante : l'énoncé puis la correction détaillée s'affichent d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-sti2d/calcul-integral

Exercice 1 – Intégrale et aire d'un rectangle

Une puissance constante de 250 W est fournie pendant 8 secondes. On note $f(t) = 250$.

1. Calcule $\int_0^8 250\,dt$ par une considération d'aire.

2. Retrouve le résultat par une primitive.

3. Que représente ce nombre physiquement ?

Exercice 2 – Intégrale d'un polynôme

Calcule les intégrales $\int_0^3 (2x+1)dx$ et $\int_1^2 3x^2\,dx$.

1. Détaille le calcul de chaque intégrale.

Exercice 3 – Linéarité de l'intégrale

On donne $\int_0^2 f(x)\,dx = 5$ et $\int_0^2 g(x)\,dx = -3$.

1. Calcule $\int_0^2 (f(x)+g(x))dx$.

2. Calcule $\int_0^2 4f(x)\,dx$ et $\int_0^2 (2f(x)-3g(x))dx$.

Exercice 4 – Relation de Chasles

On donne $\int_0^4 f(x)dx = 12$ et $\int_4^9 f(x)dx = 7$.

1. Calcule $\int_0^9 f(x)dx$.

2. Sachant de plus que $\int_0^6 f(x)dx = 15$, calcule $\int_6^9 f(x)dx$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Intégrale d'une fonction négative

Soit $f(x) = -4$ sur $[1\,;5]$, et $g(x) = x - 3$ sur $[0\,;3]$.

1. Calcule $\int_1^5 f(x)dx$ et interprète le signe.

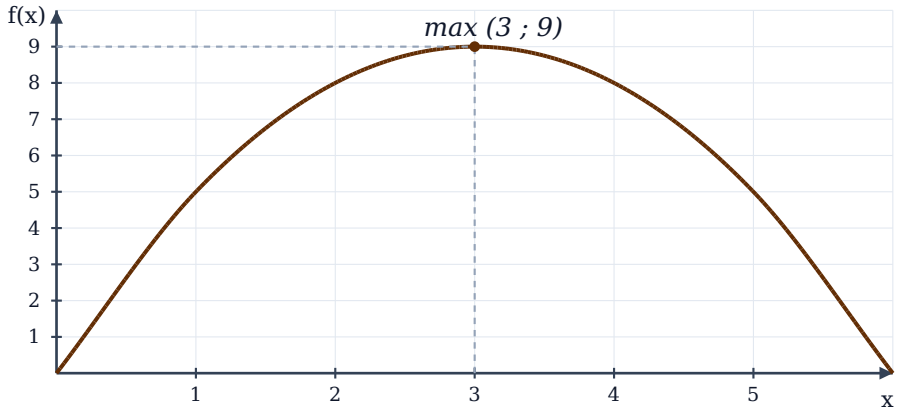
2. Calcule $\int_0^3 g(x)dx$.

Exercice 6 – Aire sous une parabole

Soit $f(x) = 6x - x^2$, positive sur $[0\,;6]$.

1. Calcule l'aire du domaine compris entre la courbe et l'axe des abscisses sur $[0\,;6]$.

2. Calcule l'aire sur $[0\,;3]$ et compare.



Exercice 7 – Valeur moyenne d'une fonction

La puissance appelée par un atelier, en kW, est modélisée par $p(t) = 40 + 6t$ sur $[0\,;10]$ (t en heures).

1. Calcule $\int_0^{10} p(t)dt$ et interprète.

2. Calcule la puissance moyenne sur ces 10 heures.

Exercice 8 – Méthode des rectangles

On veut encadrer $\int_0^2 x^2 dx$ par la méthode des rectangles, avec un pas de 0,5 (soit 4 sous-intervalles).

1. Calcule la somme des rectangles « par défaut » (hauteur au bord gauche).

2. Calcule la somme des rectangles « par excès » (hauteur au bord droit).

3. Compare avec la valeur exacte.

Exercice 9 – Intégrale d'un cosinus

Calcule $\int_0^{\pi/2} \cos x\,dx$, puis $\int_0^{\pi} \sin x\,dx$ et $\int_0^{2\pi} \cos x\,dx$.

1. Détaille les trois calculs et commente le dernier.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 10 – Intégrale d'une composée simple

Calcule $\int_0^1 (2x+3)^2 dx$ et $\int_0^{\pi/4} \cos(2t)\,dt$.

1. Détaille les deux calculs.

Exercice 11 – Aire entre deux courbes

Soient $f(x) = 8 - x^2$ et $g(x) = 2x$ sur $[0\,;2]$.

1. Vérifie que $f(x) \geq g(x)$ sur $[0\,;2]$.

2. Calcule l'aire du domaine compris entre les deux courbes sur $[0\,;2]$.

Exercice 12 – Énergie consommée

La puissance appelée par une machine, en kW, suit $p(t) = 12t - t^2$ sur $[0\,;8]$ (t en heures).

1. Calcule l'énergie consommée sur les 8 heures.

2. Calcule la puissance moyenne.

3. À quel instant la puissance est-elle maximale, et que vaut-elle ?

Exercice 13 – Distance parcourue

Un chariot a pour vitesse $v(t) = 3t^2 - 12t + 12$ m/s sur $[0\,;5]$ (t en secondes).

1. Vérifie que la vitesse est toujours positive ou nulle.

2. Calcule la distance parcourue en 5 secondes.

3. Calcule la vitesse moyenne.

Exercice 14 – Valeur moyenne d'un signal redressé

Une tension sinusoïdale redressée simple alternance vaut $u(t) = 325\sin(100\pi t)$ volts sur la demi-période $[0\,;0{,}01]$ (et 0 sur l'autre demi-période).

1. Calcule $\int_0^{0{,}01} 325\sin(100\pi t)\,dt$.

2. Calcule la valeur moyenne de u sur la demi-période.

3. Calcule la valeur moyenne sur la période entière de 0,02 s.

Exercice 15 – Encadrement et précision

On veut estimer $\int_1^3 \frac{1}{x} dx$ par la méthode des rectangles, la fonction étant décroissante sur $[1\,;3]$.

1. Avec 4 rectangles (pas 0,5), calcule les sommes par excès et par défaut.

2. Donne l'encadrement obtenu et son amplitude.

3. Combien de rectangles faudrait-il pour une amplitude inférieure à 0,01 ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 16 – Type bac : bilan énergétique d'une machine

La puissance électrique appelée par une machine, en kW, est $p(t) = 60 - 3t^2$ sur $[0\,;4]$ (t en heures), puis $p(t) = 12$ sur $[4\,;8]$.

1. Calcule l'énergie consommée sur $[0\,;4]$.

2. Calcule l'énergie consommée sur $[4\,;8]$.

3. Déduis l'énergie totale et la puissance moyenne sur les 8 heures.

4. Le contrat facture 0,18 €/kWh. Quel est le coût de la journée ?

Exercice 17 – Type bac : aire entre coût et recette

Pour une production de q centaines de pièces ($0 \leq q \leq 6$), le coût marginal est $C'(q) = 3q^2 - 12q + 20$ et la recette marginale est $R'(q) = 20 - 2q$, en milliers d'euros par centaine.

1. Détermine la quantité pour laquelle les deux coïncident.

2. Calcule $\int_0^3 (R'(q) - C'(q))dq$ et interprète.

3. Calcule $\int_3^6 (R'(q) - C'(q))dq$ et interprète.

4. Quelle production maximise le bénéfice ?

Exercice 18 – Type bac : méthode des rectangles programmée

On veut estimer $\int_0^3 \left(9 - x^2\right)dx$ par la méthode des rectangles, avec n sous-intervalles.

1. Écris un programme Python calculant la somme des rectangles par défaut.

2. Calcule la valeur exacte de l'intégrale.

3. Que renvoie le programme pour $n = 3$? Compare.

4. Comment améliorer l'estimation ?

Exercice 19 – Type bac : du débit au volume

Le débit d'une pompe, en L/min, suit $d(t) = 50 + 30\sin\left(\frac{\pi t}{30}\right)$ sur $[0\,;30]$ (t en minutes).

1. Calcule le débit à $t = 0$, $t = 15$ et $t = 30$.

2. Calcule le volume pompé en 30 minutes.

3. Calcule le débit moyen et compare au débit constant 50 L/min.

Exercice 20 – Type bac : température moyenne d'un local

La température d'un local, en °C, suit $T(t) = 19 + 4\sin\left(\frac{\pi t}{12}\right)$ sur $[0\,;24]$ (t en heures depuis minuit).

1. Calcule la température à 0 h, 6 h, 12 h et 18 h.

2. Calcule la température moyenne sur les 24 heures.

3. Calcule la température moyenne sur la journée de travail $[8\,;17]$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

4. La consigne impose une moyenne de travail comprise entre 19 et 22 °C. Est-elle respectée ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).