Composition de fonctions — Terminale STI2D

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

Composer deux fonctions, c'est les enchaîner : on calcule d'abord $u(x)$, puis on applique v au résultat. Presque toutes les expressions de la physique sont de cette forme — $e^{-t/\tau}$, $\cos(\omega t+\varphi)$, $\sqrt{1+x^2}$, $\ln(1+x^2)$ — et une seule règle permet de les dériver : $(v\circ u)' = u' \times (v'\circ u)$, « la dérivée de l'intérieur multipliée par la dérivée de l'extérieur ». Lue à l'envers, cette règle donne les PRIMITIVES du type $u'f(u)$: reconnaître $\frac{2x}{1+x^2}$ comme $\frac{u'}{u}$, c'est savoir l'intégrer immédiatement. Ces 20 exercices corrigés couvrent les deux sens, de la dérivation directe aux problèmes type bac. La difficulté est croissante : l'énoncé puis la correction détaillée s'affichent d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-sti2d/composition-de-fonctions

Exercice 1 – Calculer une composée

On considère $u(x) = 2x+3$ et $v(x) = x^2$.

1. Calcule $(v\circ u)(1)$ et $(u\circ v)(1)$.

2. Exprime $(v\circ u)(x)$ et $(u\circ v)(x)$.

Exercice 2 – Décomposer une fonction

On considère $f(x) = (3x-1)^5$, $g(x) = e^{4x}$ et $h(x) = \sqrt{x^2+9}$.

1. Pour chacune, précise les fonctions u et v telles que la fonction s'écrive $v\circ u$.

Exercice 3 – Dériver une puissance composée

Dérive $f(x) = (3x-1)^5$, $g(x) = (x^2+1)^3$ et $h(x) = (5-2x)^4$.

1. Donne les trois dérivées.

Exercice 4 – Dériver une exponentielle composée

Dérive $f(t) = e^{-3t}$, $g(t) = 5e^{-t/0{,}2}$ et $h(x) = e^{x^2}$.

1. Donne les trois dérivées.

Exercice 5 – Dériver cosinus et sinus composés

Dérive $f(t) = \cos(5t)$, $g(t) = \sin(100\pi t+\varphi)$ et $h(x) = \cos\left(x^2\right)$.

1. Donne les trois dérivées.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 6 – Dériver un logarithme composé

Dérive $f(x) = \ln(5x + 2)$ sur $\left]-\frac{2}{5}; +\infty\right[$, $g(x) = \ln\left(x^2 + 1\right)$ et $h(x) = \ln(e^x + 1)$.

1. Donne les trois dérivées.

Exercice 7 – Dériver une racine composée

Dérive $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$ et $g(x) = \sqrt{4x - 3}$ sur $\left]\frac{3}{4}; +\infty\right[$.

1. Donne les deux dérivées, et calcule $f'(4)$.

Exercice 8 – Reconnaître u'e^u

On veut trouver une primitive de $f(x) = 2x\,e^{x^2}$ et de $g(t) = -3e^{-3t}$.

1. Donne une primitive de chacune, en justifiant.

Exercice 9 – Reconnaître u'/u

On veut trouver une primitive de $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$ sur $\mathbb{R}$ et de $g(x) = \dfrac{3}{3x + 5}$ sur $\left]-\frac{5}{3}; +\infty\right[$.

1. Donne une primitive de chacune.

Exercice 10 – Reconnaître u'u^n

Trouve une primitive de $f(x) = 2x\left(x^2 + 3\right)^4$ et de $g(x) = 6(3x - 1)^5$.

1. Donne une primitive de chacune.

Exercice 11 – Primitive de u'cos(u)

Trouve une primitive de $f(t) = 2t\cos\left(t^2\right)$, $g(t) = 4\cos(4t + 1)$ et $h(t) = 100\pi\sin(100\pi t)$.

1. Donne une primitive de chacune.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

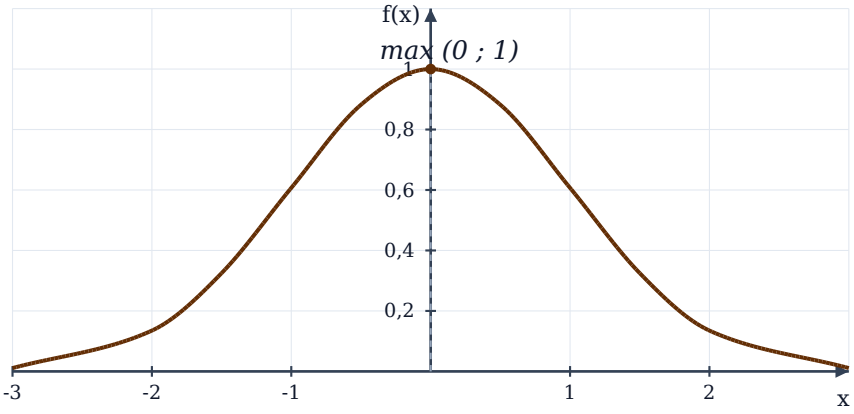
Exercice 12 – Étude d'une gaussienne

Soit $f(x) = e^{-x^2/2}$ sur $\mathbb{R}$.

1. Calcule $f'(x)$.

2. Dresse le tableau de variations.

3. Donne le maximum et les limites en $\pm\infty$.



Exercice 13 – Intégrale avec une composée

Calcule $\int_0^1 2x\,e^{x^2}dx$ et $\int_0^2 \dfrac{2x}{x^2+1}dx$.

1. Détaille les deux calculs.

Exercice 14 – Ajuster un coefficient

Trouve une primitive de $f(x) = x\,e^{x^2}$, $g(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$ et $h(t) = \sin(2t)$.

1. Donne une primitive de chacune, en ajustant les coefficients.

Exercice 15 – Dérivée et vitesse sur une trajectoire

Un point se déplace de sorte que sa distance à l'origine vaut $d(t) = \sqrt{9 + 4t^2}$ mètres (t en secondes).

1. Calcule $d(0)$ et $d(2)$.

2. Calcule $d'(t)$.

3. Calcule $d'(0)$ et $d'(2)$, puis interprète.

4. Que devient $d'(t)$ pour t très grand ?

Exercice 16 – Type bac : étude d'une fonction composée

Soit $f(x) = (x-2)e^{-x}$ sur $[0\,;5]$.

1. Calcule $f'(x)$ et factorise par e^{-x}.

2. Dresse le tableau de variations.

3. Détermine les extremums sur $[0\,;5]$.

4. Donne l'équation de la tangente au point d'abscisse 2.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 17 – Type bac : énergie d'un signal amorti

La puissance instantanée dissipée dans une résistance vaut $p(t) = 50e^{-4t}$ watts (t en secondes).

1. Calcule $p(0)$ et $p(0{,}5)$.

2. Détermine une primitive de p.

3. Calcule l'énergie dissipée entre 0 et 0,5 s.

4. Calcule l'énergie totale dissipée « jusqu'à l'infini ».

Exercice 18 – Type bac : primitives à reconnaître

Pour chacune des fonctions suivantes, reconnais la forme composée et donne une primitive :

$$f_1(x) = \frac{3x^2}{x^3+1} \qquad f_2(x) = 6x\left(x^2+5\right)^2 \qquad f_3(t) = 2\cos(2t)e^{\sin(2t)}$$

1. Identifie u dans chaque cas et donne la primitive.

Exercice 19 – Type bac : concentration dans un bain

La concentration d'un bain, en g/L, suit $c(t) = \dfrac{12}{1+0{,}5t}$ (t en heures).

1. Calcule $c(0)$, $c(4)$ et $c(10)$.

2. Calcule $c'(t)$ et justifie le sens de variation.

3. Détermine une primitive de c.

4. Calcule la « dose cumulée » $\int_0^{10} c(t)\,dt$.

Exercice 20 – Type bac : dérivée en chaîne sur trois niveaux

Une grandeur physique vaut $P(t) = \left(1+e^{-2t}\right)^3$.

1. Décompose P en trois fonctions élémentaires.

2. Calcule $P'(t)$.

3. Calcule $P(0)$ et $P'(0)$.

4. Donne la limite de P en $+\infty$ et interprète.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Calculer une composée

$(v \circ u)(1)$ signifie $v(u(1))$: on applique d'abord u, puis v.

$u(1) = 5$, puis $v(5) = 25$. Donc $(v \circ u)(1) = 25$.

$(u \circ v)(1) = u(v(1)) = u(1) = 5$ (car $v(1) = 1$).

Les deux résultats DIFFÈRENT : la composition n'est pas commutative.

Expressions générales : $(v \circ u)(x) = v(2x+3) = (2x+3)^2$.

$(u \circ v)(x) = u\left(x^2\right) = 2x^2 + 3$.

Contrôle : $(2 \times 1 + 3)^2 = 25$ ✔ et $2 \times 1 + 3 = 5$ ✔.

Réponse. $(v \circ u)(1) = 25$ et $(u \circ v)(1) = 5 \cdot (v \circ u)(x) = (2x+3)^2$ et $(u \circ v)(x) = 2x^2 + 3$.

Rappel de cours. $(v \circ u)(x) = v(u(x))$: on applique u D'ABORD. L'ordre compte.

Erreur fréquente. Lire $v \circ u$ de gauche à droite : c'est u qui agit en premier, malgré sa position à droite.

Correction de l'exercice 2 – Décomposer une fonction

$f(x) = (3x-1)^5$: on calcule d'abord $3x - 1$, puis on élève à la puissance 5.

Donc $u(x) = 3x - 1$ et $v(X) = X^5$.

$g(x) = e^{4x}$: d'abord $4x$, puis l'exponentielle. Donc $u(x) = 4x$ et $v(X) = e^X$.

$h(x) = \sqrt{x^2+9}$: d'abord $x^2 + 9$, puis la racine. Donc $u(x) = x^2 + 9$ et $v(X) = \sqrt{X}$.

Méthode pratique : u est ce qu'on calculerait EN PREMIER à la calculatrice, c'est-à-dire ce qui est « à l'intérieur ».

C'est cette décomposition qui rend la dérivation possible : u' et v' se dérivent séparément.

Réponse. f : $u = 3x - 1$ et $v = X^5$ · g : $u = 4x$ et $v = e^X$ · h : $u = x^2 + 9$ et $v = \sqrt{X}$.

Rappel de cours. u est la fonction INTÉRIEURE (ce qu'on calcule d'abord), v la fonction extérieure.

Erreur fréquente. Décomposer $\sqrt{x^2+9}$ en $u = \sqrt{x}$ et $v = X^2 + 9$: cela donnerait $(\sqrt{x})^2 + 9 = x + 9$, une autre fonction.

Correction de l'exercice 3 – Dériver une puissance composée

Règle : $(u^n)' = n\,u'\,u^{n-1}$.

f : $u = 3x - 1$, $u' = 3$, $n = 5$. Donc $f'(x) = 5 \times 3 \times (3x-1)^4 = 15(3x-1)^4$.

g : $u = x^2 + 1$, $u' = 2x$, $n = 3$. Donc $g'(x) = 3 \times 2x \times \left(x^2+1\right)^2 = 6x\left(x^2+1\right)^2$.

h : $u = 5 - 2x$, $u' = -2$, $n = 4$. Donc $h'(x) = 4 \times (-2) \times (5-2x)^3 = -8(5-2x)^3$.

Contrôle sur f en $x = 1$: $f'(1) = 15 \times 2^4 = 240$. Et par développement partiel, la pente de $(3x-1)^5$ en $x = 1$ est bien très forte ✔.

Le facteur u' est l'élément systématiquement oublié : sans lui, f' vaudrait $5(3x-1)^4$, trois fois trop petit.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $f'(x) = 15(3x-1)^4 \cdot g'(x) = 6x\left(x^2+1\right)^2 \cdot h'(x) = -8(5-2x)^3$.

Rappel de cours. $(u^n)' = n\,u'\,u^{n-1}$: l'exposant descend, il diminue de 1, et l'on multiplie par u'.

Erreur fréquente. Oublier u' : c'est l'erreur numéro un de tout le chapitre, et elle fausse la dérivée d'un facteur constant.

Correction de l'exercice 4 – Dériver une exponentielle composée

Règle : $(e^u)' = u'\,e^u$.

f : $u = -3t$, $u' = -3$. Donc $f'(t) = -3e^{-3t}$.

g : $u = -\dfrac{t}{0{,}2} = -5t$, $u' = -5$. Donc $g'(t) = 5 \times (-5)e^{-5t} = -25e^{-5t}$.

h : $u = x^2$, $u' = 2x$. Donc $h'(x) = 2x\,e^{x^2}$.

Signe de h' : $e^{x^2} > 0$, donc h' a le signe de x — la fonction décroît sur les négatifs, croît sur les positifs, minimum en 0.

Remarque sur g : le coefficient -5 est l'opposé de l'inverse de la constante de temps 0,2 s. C'est toujours ainsi qu'apparaît τ dans une dérivée.

Réponse. $f'(t) = -3e^{-3t} \cdot g'(t) = -25e^{-5t} \cdot h'(x) = 2x\,e^{x^2}$.

Rappel de cours. $(e^u)' = u'e^u$: l'exponentielle reste, on multiplie par la dérivée de l'exposant.

Erreur fréquente. Dériver e^{x^2} en e^{2x} : l'exponentielle ne change JAMAIS, seul un facteur u' apparaît devant.

Correction de l'exercice 5 – Dériver cosinus et sinus composés

Règles : $(\cos u)' = -u'\sin u$ et $(\sin u)' = u'\cos u$.

f : $u = 5t$, $u' = 5$. Donc $f'(t) = -5\sin(5t)$.

g : $u = 100\pi t + \varphi$, $u' = 100\pi$ (la phase φ est une constante). Donc $g'(t) = 100\pi\cos(100\pi t + \varphi)$.

h : $u = x^2$, $u' = 2x$. Donc $h'(x) = -2x\sin\left(x^2\right)$.

Application physique de g : dériver un signal de pulsation ω multiplie son amplitude par ω. À 50 Hz, $\omega = 100\pi \approx 314$.

Contrôle de f en $t = 0$: $f'(0) = -5\sin 0 = 0$ ✔ le cosinus démarre à son maximum, donc avec une tangente horizontale.

Réponse. $f'(t) = -5\sin(5t) \cdot g'(t) = 100\pi\cos(100\pi t + \varphi) \cdot h'(x) = -2x\sin\left(x^2\right)$.

Rappel de cours. $(\cos u)' = -u'\sin u \cdot (\sin u)' = u'\cos u$: le signe moins reste attaché au cosinus dérivé.

Erreur fréquente. Oublier que φ est constante : sa dérivée est nulle, elle n'apporte aucun facteur.

Correction de l'exercice 6 – Dériver un logarithme composé

Règle : $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.

f : $u = 5x + 2$, $u' = 5$. Donc $f'(x) = \dfrac{5}{5x+2}$.

g : $u = x^2 + 1$, $u' = 2x$. Donc $g'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$h : u = e^x + 1$, $u' = e^x$. Donc $h'(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$.

Signe de h' : numérateur et dénominateur sont strictement positifs, donc h est croissante sur $\mathbb{R}$.

Remarque : $h'(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$ est toujours comprise entre 0 et 1. La fonction h croît donc plus lentement que $x \mapsto x$.

Réponse. $f'(x) = \dfrac{5}{5x + 2} \cdot g'(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1} \cdot h'(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$.

Rappel de cours. $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$: la dérivée de l'intérieur monte au numérateur.

Erreur fréquente. Écrire $\Big(\ln(x^2 + 1)\Big)' = \dfrac{1}{x^2 + 1}$: il manque $u' = 2x$ au numérateur.

Correction de l'exercice 7 – Dériver une racine composée

Règle : $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

$f : u = x^2 + 9$, $u' = 2x$. Donc $f'(x) = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2 + 9}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 9}}$.

$g : u = 4x - 3$, $u' = 4$. Donc $g'(x) = \dfrac{4}{2\sqrt{4x - 3}} = \dfrac{2}{\sqrt{4x - 3}}$.

$f'(4) = \dfrac{4}{\sqrt{16 + 9}} = \dfrac{4}{\sqrt{25}} = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$.

Interprétation géométrique : $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$ est la distance du point $(x\,;0)$ au point $(0\,;3)$. Sa dérivée 0,8 en $x = 4$ indique que cette distance croît de 0,8 unité par unité de x.

Contrôle de cohérence : $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 9}}$ est toujours inférieure à 1 en valeur absolue, ce qui est logique — la distance croît moins vite que l'abscisse.

Réponse. $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + 9}}$ et $f'(4) = 0{,}8 \cdot g'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{4x - 3}}$.

Rappel de cours. $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$: la racine passe au dénominateur, avec un facteur 2.

Erreur fréquente. Écrire $\Big(\sqrt{x^2 + 9}\Big)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x^2 + 9}}$: il manque $u' = 2x$, qui simplifie justement le 2.

Correction de l'exercice 8 – Reconnaître u'e^u

Pour f : on reconnaît la forme $u'e^u$ avec $u = x^2$ (dont la dérivée est bien $2x$).

Or $(e^u)' = u'e^u$, donc une primitive de $u'e^u$ est e^u.

Une primitive de f est donc $F(x) = e^{x^2}$.

Contrôle : $F'(x) = 2x\,e^{x^2} = f(x)$ ✔.

Pour g : on reconnaît $u'e^u$ avec $u = -3t$ (de dérivée -3).

Une primitive est donc $G(t) = e^{-3t}$.

Contrôle : $G'(t) = -3e^{-3t} = g(t)$ ✔.

Méthode générale : devant une expression contenant une exponentielle, on cherche si le facteur qui la précède est exactement la dérivée de l'exposant. Si oui, la primitive est immédiate.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $F(x) = e^{x^2} \cdot G(t) = e^{-3t}$ (à une constante près).

Rappel de cours. Primitive de $u'e^u$: e^u. C'est la règle de dérivation lue à l'envers.

Erreur fréquente. Chercher une primitive de e^{x^2} seul : elle existe mais ne s'exprime pas avec les fonctions usuelles. C'est la présence du facteur $2x$ qui rend le calcul possible.

Correction de l'exercice 9 – Reconnaître u'/u

Pour f : on reconnaît $\frac{u'}{u}$ avec $u = x^2 + 1$, de dérivée $2x$.

Or $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$, donc une primitive est $F(x) = \ln\left(x^2 + 1\right)$.

La condition $u > 0$ est bien vérifiée, puisque $x^2 + 1 \geq 1$.

Contrôle : $F'(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1} = f(x)$ ✔.

Pour g : $u = 3x + 5$, de dérivée 3, donc $g = \frac{u'}{u}$ et $G(x) = \ln(3x + 5)$.

Sur l'intervalle donné, $3x + 5 > 0$ ✔ la primitive est bien définie.

À retenir : la présence d'un logarithme dans une primitive signale toujours une forme $\frac{u'}{u}$.

Réponse. $F(x) = \ln\left(x^2 + 1\right) \cdot G(x) = \ln(3x + 5)$ (à une constante près).

Rappel de cours. Primitive de $\frac{u'}{u}$: $\ln u$ — à condition que $u > 0$ sur l'intervalle.

Erreur fréquente. Oublier de vérifier le signe de u : sur un intervalle où $u < 0$, la primitive serait $\ln(-u)$.

Correction de l'exercice 10 – Reconnaître u'uⁿ

Pour f : on reconnaît $u'u^4$ avec $u = x^2 + 3$ (de dérivée $2x$).

Or une primitive de $u'u^n$ est $\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$.

Donc $F(x) = \dfrac{\left(x^2 + 3\right)^5}{5}$.

Contrôle : $F'(x) = \dfrac{5 \times 2x\left(x^2 + 3\right)^4}{5} = 2x\left(x^2 + 3\right)^4$ ✔.

Pour g : ici $u = 3x - 1$, $u' = 3$, et l'on a $g = 6(3x - 1)^5 = 2 \times 3 \times (3x - 1)^5 = 2\,u'u^5$.

Une primitive de $u'u^5$ est $\frac{u^6}{6}$, donc $G(x) = 2 \times \dfrac{(3x - 1)^6}{6} = \dfrac{(3x - 1)^6}{3}$.

Contrôle : $G'(x) = \dfrac{6 \times 3(3x - 1)^5}{3} = 6(3x - 1)^5$ ✔.

Technique : quand le facteur devant n'est pas exactement u', on ajuste par un coefficient constant, comme ici le 2.

Réponse. $F(x) = \dfrac{\left(x^2 + 3\right)^5}{5} \cdot G(x) = \dfrac{(3x - 1)^6}{3}$ (à une constante près).

Rappel de cours. Primitive de $u'u^n$: $\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$ · si le facteur n'est pas exactement u', on corrige par une constante.

Erreur fréquente. Écrire $F(x) = \frac{(x^2 + 3)^5}{5} \times 2x$: le facteur $2x$ a DISPARU dans la primitive, il est déjà « consommé » par la règle.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 11 – Primitive de u'cos(u)

Pour f : forme $u' \cos u$ avec $u = t^2$ ($u' = 2t$). Or une primitive de $u' \cos u$ est $\sin u$.

Donc $F(t) = \sin\left(t^2\right)$. Contrôle : $F'(t) = 2t \cos\left(t^2\right)$ ✔.

Pour g : $u = 4t + 1$, $u' = 4$, donc $g = u' \cos u$ et $G(t) = \sin(4t + 1)$.

Pour h : forme $u' \sin u$ avec $u = 100\pi t$. Or une primitive de $u' \sin u$ est $-\cos u$.

Donc $H(t) = -\cos(100\pi t)$. Contrôle : $H'(t) = 100\pi \sin(100\pi t)$ ✔.

Remarque : h est exactement la dérivée d'un signal $-\cos$, ce qui explique que sa primitive soit si simple. En électricité, ces formes apparaissent dès qu'on intègre une tension ou un courant sinusoïdal.

Vigilance sur les signes : cos → sin sans signe, mais sin → $-$cos. C'est l'inverse de la dérivation.

Réponse. $F(t) = \sin\left(t^2\right) \cdot G(t) = \sin(4t + 1) \cdot H(t) = -\cos(100\pi t)$.

Rappel de cours. Primitive de $u' \cos u$: $\sin u$ · primitive de $u' \sin u$: $-\cos u$.

Erreur fréquente. Oublier le signe moins pour $u' \sin u$: la dérivée de $\sin u$ est $u' \cos u$, pas $u' \sin u$.

Correction de l'exercice 12 – Étude d'une gaussienne

$u = -\dfrac{x^2}{2}$, donc $u' = -x$.

$f'(x) = -x\, e^{-x^2/2}$.

Signe : $e^{-x^2/2} > 0$, donc f' a le signe de $-x$.

$f'(x) > 0$ pour $x < 0$ et $f'(x) < 0$ pour $x > 0$: f croît puis décroît.

Maximum : $f(0) = e^0 = 1$, atteint en $x = 0$.

Limites : quand $|x| \to +\infty$, $-\dfrac{x^2}{2} \to -\infty$, donc $f(x) \to 0$.

La courbe est donc une « cloche » symétrique, de sommet $(0\,;1)$, tendant vers 0 des deux côtés.

Valeurs : $f(1) = e^{-0,5} \approx 0,607$; $f(2) = e^{-2} \approx 0,135$; $f(3) = e^{-4,5} \approx 0,011$.

Cette fonction est la célèbre courbe de Gauss, omniprésente en métrologie (distribution des erreurs de mesure).

Réponse. $f'(x) = -x\, e^{-x^2/2}$ · croissante sur $]-\infty\,;0]$, décroissante ensuite · maximum $f(0) = 1$, limites nulles en $\pm\infty$.

Rappel de cours. Pour e^u, le signe de la dérivée est celui de u' : ici $-x$, d'où la cloche.

Erreur fréquente. Dériver $e^{-x^2/2}$ en $-x^2 e^{-x^2/2}$: la dérivée de $-\dfrac{x^2}{2}$ est $-x$, pas $-x^2$.

Correction de l'exercice 13 – Intégrale avec une composée

Première intégrale : une primitive de $2x\, e^{x^2}$ est e^{x^2}.

$\int_0^1 2x\, e^{x^2} dx = \left[e^{x^2}\right]_0^1 = e^1 - e^0 = e - 1 \approx 1,718.$

Seconde intégrale : une primitive de $\dfrac{2x}{x^2+1}$ est $\ln\left(x^2+1\right)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$\int_0^2 \frac{2x}{x^2+1}dx = \left[\ln\left(x^2+1\right)\right]_0^2 = \ln 5 - \ln 1 = \ln 5 \approx 1{,}609.$

Contrôle de vraisemblance : sur $[0\,;2]$, la fonction $\frac{2x}{x^2+1}$ est positive et majorée par 1 (son maximum vaut 1 en $x=1$), donc l'intégrale doit être inférieure à 2 ✔.

Méthode générale : on identifie la forme composée, on écrit la primitive, puis on évalue aux bornes. Aucun développement n'est nécessaire.

Réponse. $\int_0^1 2xe^{x^2}dx = e-1 \approx 1{,}718$ · $\int_0^2 \frac{2x}{x^2+1}dx = \ln 5 \approx 1{,}609$.

Rappel de cours. $\int_a^b u'e^u = [e^u]_a^b$ et $\int_a^b \frac{u'}{u} = [\ln u]_a^b$.

Erreur fréquente. Évaluer u au lieu de la primitive : ici il faut e^{x^2} aux bornes, pas x^2.

Correction de l'exercice 14 – Ajuster un coefficient

Pour f : la forme $u'e^u$ exigerait $2x$, or l'on n'a que x. On écrit donc $f(x) = \frac{1}{2}\times 2x\,e^{x^2}$.

Une primitive est donc $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$.

Contrôle : $F'(x) = \frac{1}{2}\times 2x\,e^{x^2} = x\,e^{x^2}$ ✔.

Pour g : la forme $\frac{u'}{u}$ exigerait $2x$ au numérateur. On écrit $g(x) = \frac{1}{2}\times\frac{2x}{x^2+4}$.

Donc $G(x) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right)$.

Pour h : la forme $u'\sin u$ exigerait un facteur 2. On écrit $h(t) = \frac{1}{2}\times 2\sin(2t)$.

Donc $H(t) = -\frac{1}{2}\cos(2t)$.

Contrôle : $H'(t) = -\frac{1}{2}\times(-2\sin(2t)) = \sin(2t)$ ✔.

Règle pratique : on complète mentalement le facteur manquant et l'on compense par son inverse à l'extérieur. Puis on VÉRIFIE toujours en dérivant.

Réponse. $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$ · $G(x) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2+4\right)$ · $H(t) = -\frac{1}{2}\cos(2t)$.

Rappel de cours. Quand le facteur u' est incomplet, on l'ajuste par une constante multiplicative et l'on compense à l'extérieur.

Erreur fréquente. Oublier de compenser : e^{x^2} a pour dérivée $2xe^{x^2}$, soit le DOUBLE de la fonction visée.

Correction de l'exercice 15 – Dérivée et vitesse sur une trajectoire

$d(0) = \sqrt{9} = 3$ m : le point part à 3 m de l'origine.

$d(2) = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ m.

Dérivée : $u = 9+4t^2$, $u' = 8t$, donc $d'(t) = \frac{8t}{2\sqrt{9+4t^2}} = \frac{4t}{\sqrt{9+4t^2}}$.

$d'(0) = 0$: à l'instant initial, la distance à l'origine ne varie pas — le point se déplace perpendiculairement au rayon.

$d'(2) = \frac{8}{\sqrt{25}} = \frac{8}{5} = 1{,}6$ m/s : la distance croît alors de 1,6 m par seconde.

Pour t très grand, 9 devient négligeable devant $4t^2$, donc $d(t) \approx \sqrt{4t^2} = 2t$ et $d'(t) \to 2$ m/s.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Vérification : $d'(10) = \dfrac{40}{\sqrt{409}} \approx \dfrac{40}{20{,}22} \approx 1{,}978$ m/s, déjà très proche de 2 ✔.

Interprétation : la vitesse d'éloignement croît de 0 à 2 m/s sans jamais dépasser cette limite. Le point s'éloigne finalement en ligne quasi droite.

Réponse. $d(0) = 3$ m et $d(2) = 5$ m · $d'(t) = \dfrac{4t}{\sqrt{9+4t^2}}$ · $d'(0) = 0$ et $d'(2) = 1{,}6$ m/s · $d'(t) \to 2$ m/s.

Rappel de cours. $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$: on simplifie systématiquement le facteur 2 avec le numérateur quand c'est possible.

Erreur fréquente. Croire que la vitesse d'éloignement égale la vitesse du point : elle ne mesure que la variation de la DISTANCE, nulle si le mouvement est perpendiculaire au rayon.

Correction de l'exercice 16 – Type bac : étude d'une fonction composée

Produit avec $u = x - 2$ ($u' = 1$) et $v = e^{-x}$ ($v' = -e^{-x}$).

$f'(x) = e^{-x} + (x-2) \times (-e^{-x}) = e^{-x}(1 - (x-2)) = (3-x)e^{-x}$.

Signe : $e^{-x} > 0$, donc f' a le signe de $(3-x)$.

$f'(x) > 0$ sur $[0\,;3[$ et $f'(x) < 0$ sur $]3\,;5]$: f croît puis décroît.

Maximum : $f(3) = 1 \times e^{-3} \approx 0{,}049\,8$.

Valeurs aux bornes : $f(0) = -2e^{0} = -2$ et $f(5) = 3e^{-5} \approx 0{,}020\,2$.

Le minimum sur l'intervalle est donc $f(0) = -2$, atteint à la borne gauche.

Tangente en 2 : $f(2) = 0$ et $f'(2) = (3-2)e^{-2} = e^{-2} \approx 0{,}135\,3$.

T : $y = 0{,}135\,3(x-2)$, soit $y \approx 0{,}135\,3x - 0{,}270\,7$.

Contrôle de cohérence : f s'annule en $x = 2$ ✔ (car $x - 2 = 0$), passe par un maximum en 3 puis décroît vers 0 — allure typique d'un régime transitoire.

Réponse. $f'(x) = (3-x)e^{-x}$ · croissante sur $[0\,;3]$ puis décroissante · maximum $f(3) = e^{-3} \approx 0{,}050$, minimum $f(0) = -2$ · tangente en 2 : $y = e^{-2}(x-2)$.

Rappel de cours. Après dérivation d'un produit contenant e^{-x}, on factorise : le signe se lit sur le facteur polynomial.

Erreur fréquente. Oublier le signe moins de $(e^{-x})' = -e^{-x}$: on obtiendrait $f'(x) = (x-1)e^{-x}$, et un tableau de variations inversé.

Correction de l'exercice 17 – Type bac : énergie d'un signal amorti

$p(0) = 50$ W et $p(0{,}5) = 50e^{-2} \approx 50 \times 0{,}135\,3 \approx 6{,}77$ W.

Primitive : on reconnaît la forme $k\,e^{at}$, dont une primitive est $\dfrac{k}{a}e^{at}$.

Ici $P(t) = \dfrac{50}{-4}e^{-4t} = -12{,}5e^{-4t}$.

Contrôle : $P'(t) = -12{,}5 \times (-4)e^{-4t} = 50e^{-4t}$ ✔.

Énergie sur $[0\,;0{,}5]$: $\left[-12{,}5e^{-4t}\right]_0^{0{,}5} = -12{,}5e^{-2} + 12{,}5 = 12{,}5\left(1 - e^{-2}\right)$.

$\approx 12{,}5 \times (1 - 0{,}135\,3) \approx 12{,}5 \times 0{,}864\,7 \approx 10{,}81$ J.

Énergie totale : quand la borne supérieure grandit, $e^{-4t} \to 0$, donc l'énergie tend vers 12,5 J.

L'énergie dissipée est donc BORNÉE : même en attendant indéfiniment, on ne dépassera

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

pas 12,5 joules.

Lecture : les 10,81 J dissipés en une demi-seconde représentent déjà 86,5% du total. Un régime transitoire concentre l'essentiel de son énergie au début.

Contrôle : $\frac{10{,}81}{12{,}5} = 0{,}865$ ✔ ce qui correspond exactement à $1 - e^{-2}$.

Réponse. $p(0) = 50$ W et $p(0{,}5) \approx 6{,}77$ W · $P(t) = -12{,}5e^{-4t}$ · énergie $= 12{,}5\left(1 - e^{-2}\right) \approx 10{,}81$ J · énergie totale 12,5 J.

Rappel de cours. Primitive de $k\,e^{at}$: $\frac{k}{a}e^{at}$. Pour $a < 0$, l'énergie totale $\left|\frac{k}{a}\right|$ est FINIE.

Erreur fréquente. Écrire la primitive $50e^{-4t}$ sans diviser par -4 : l'énergie annoncée serait quatre fois trop grande et de signe faux.

Correction de l'exercice 18 – Type bac : primitives à reconnaître

f_1 : on pose $u = x^3 + 1$, dont la dérivée est $u' = 3x^2$. La fonction est donc exactement $\frac{u'}{u}$.

Une primitive est $F_1(x) = \ln\left(x^3 + 1\right)$, valable sur un intervalle où $x^3 + 1 > 0$, soit $x > -1$.

f_2 : on pose $u = x^2 + 5$, $u' = 2x$. La fonction s'écrit $6x\,u^2 = 3\,u'u^2$.

Une primitive de $u'u^2$ étant $\frac{u^3}{3}$, on obtient $F_2(x) = 3 \times \frac{\left(x^2+5\right)^3}{3} = \left(x^2+5\right)^3$.

Contrôle : $F_2'(x) = 3 \times 2x\left(x^2+5\right)^2 = 6x\left(x^2+5\right)^2$ ✔.

f_3 : on pose $u = \sin(2t)$, dont la dérivée est $u' = 2\cos(2t)$. La fonction est donc $u'e^u$.

Une primitive est $F_3(t) = e^{\sin(2t)}$.

Contrôle : $F_3'(t) = 2\cos(2t)e^{\sin(2t)}$ ✔.

Méthode d'ensemble : on cherche toujours quelle expression u, une fois dérivée, apparaît en facteur. C'est elle qui déclenche la reconnaissance.

Réponse. $F_1(x) = \ln\left(x^3 + 1\right)$ · $F_2(x) = \left(x^2 + 5\right)^3$ · $F_3(t) = e^{\sin(2t)}$.

Rappel de cours. Trois formes à reconnaître : $\frac{u'}{u} \to \ln u$ · $u'u^n \to \frac{u^{n+1}}{n+1}$ · $u'e^u \to e^u$.

Erreur fréquente. Confondre f_2 avec $\frac{u'}{u}$: il n'y a pas de quotient ici, c'est une puissance. La forme se lit sur la STRUCTURE, pas sur les nombres.

Correction de l'exercice 19 – Type bac : concentration dans un bain

$c(0) = \frac{12}{1} = 12$ g/L.

$c(4) = \frac{12}{1+2} = \frac{12}{3} = 4$ g/L.

$c(10) = \frac{12}{1+5} = 2$ g/L.

Dérivée : $c(t) = 12(1 + 0{,}5t)^{-1}$, ou plus simplement par la formule du quotient avec $u = 12$ et $v = 1 + 0{,}5t$.

$c'(t) = \frac{0 - 12 \times 0{,}5}{(1+0{,}5t)^2} = \frac{-6}{(1+0{,}5t)^2}$.

Cette dérivée est toujours NÉGATIVE : la concentration décroît sur tout l'intervalle ✔.

Primitive : on reconnaît $c(t) = 12 \times \frac{1}{1+0{,}5t}$, soit une forme $\frac{u'}{u}$ à un coefficient près, avec

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$u = 1 + 0{,}5t$ et $u' = 0{,}5$.

$c(t) = \frac{12}{0{,}5} \times \frac{0{,}5}{1 + 0{,}5t} = 24 \times \frac{u'}{u}$, donc $C(t) = 24 \ln(1 + 0{,}5t)$.

Contrôle : $C'(t) = 24 \times \frac{0{,}5}{1 + 0{,}5t} = \frac{12}{1 + 0{,}5t}$ ✔.

Dose cumulée : $[24 \ln(1 + 0{,}5t)]_0^{10} = 24 \ln 6 - 24 \ln 1 = 24 \ln 6$.

$\approx 24 \times 1{,}791\,76 \approx 43{,}0$ (en g·h/L).

Remarque : la concentration tend vers 0 mais la dose cumulée, elle, continue de croître (comme ln) — très lentement, sans limite. C'est une propriété surprenante du modèle en $\frac{1}{t}$.

Réponse. $c(0) = 12$, $c(4) = 4$, $c(10) = 2$ g/L · $c'(t) = \frac{-6}{(1 + 0{,}5t)^2} < 0$ · $C(t) = 24 \ln(1 + 0{,}5t)$ · dose cumulée $= 24 \ln 6 \approx 43{,}0$.

Rappel de cours. $\frac{1}{ax + b}$ a pour primitive $\frac{1}{a} \ln(ax + b)$: c'est la forme $\frac{u'}{u}$ ajustée par le coefficient.

Erreur fréquente. Écrire la primitive $\ln(1 + 0{,}5t)$ sans le facteur 24 : sa dérivée ne vaudrait que $\frac{0{,}5}{1 + 0{,}5t}$, soit 24 fois trop peu.

Correction de l'exercice 20 – Type bac : dérivée en chaîne sur trois niveaux

Décomposition : on calcule d'abord $-2t$, puis l'exponentielle, puis on ajoute 1, puis on élève au cube.

En deux temps : $u(t) = 1 + e^{-2t}$, puis $v(X) = X^3$. Et u est lui-même une composée.

Dérivée de l'intérieur : $u'(t) = -2e^{-2t}$.

Règle de la puissance : $P'(t) = 3\,u'\,u^2 = 3 \times \left(-2e^{-2t}\right) \times \left(1 + e^{-2t}\right)^2$.

Soit $P'(t) = -6e^{-2t}\left(1 + e^{-2t}\right)^2$.

$P(0) = \left(1 + e^0\right)^3 = 2^3 = 8$.

$P'(0) = -6 \times 1 \times 2^2 = -24$.

Limite : $e^{-2t} \to 0$, donc $P(t) \to (1 + 0)^3 = 1$.

La grandeur décroît donc de 8 vers 1, sans jamais l'atteindre. Elle est strictement décroissante, puisque P' est toujours négative (produit d'un négatif et d'un carré positif).

Contrôle : $P(1) = \left(1 + e^{-2}\right)^3 \approx (1{,}135\,3)^3 \approx 1{,}463$ et $P(2) \approx (1{,}018\,3)^3 \approx 1{,}056$ ✔ la décroissance vers 1 est nette.

Réponse. $u = 1 + e^{-2t}$ et $v = X^3$ · $P'(t) = -6e^{-2t}\left(1 + e^{-2t}\right)^2$ · $P(0) = 8$ et $P'(0) = -24$ · limite 1 en $+\infty$.

Rappel de cours. Composée de composées : on dérive de l'extérieur vers l'intérieur, en multipliant toutes les dérivées rencontrées.

Erreur fréquente. Oublier un niveau : sans le facteur -2 de l'exponentielle, on trouverait $P'(0) = -12$ au lieu de -24.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).