Composition de fonctions — Terminale STI2D

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés

Présentation

Composer deux fonctions, c'est les enchaîner : on calcule d'abord $u(x)$, puis on applique v au résultat. Presque toutes les expressions de la physique sont de cette forme — $e^{-t/\tau}$, $\cos(\omega t+\varphi)$, $\sqrt{1+x^2}$, $\ln(1+x^2)$ — et une seule règle permet de les dériver : $(v\circ u)' = u'\times(v'\circ u)$, « la dérivée de l'intérieur multipliée par la dérivée de l'extérieur ». Lue à l'envers, cette règle donne les PRIMITIVES du type $u'f(u)$: reconnaître $\frac{2x}{1+x^2}$ comme $\frac{u'}{u}$, c'est savoir l'intégrer immédiatement. Ces 20 exercices corrigés couvrent les deux sens, de la dérivation directe aux problèmes type bac. La difficulté est croissante : l'énoncé puis la correction détaillée s'affichent d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-sti2d/composition-de-fonctions

Exercice 1 – Calculer une composée

On considère $u(x)=2x+3$ et $v(x)=x^2$.

1. Calcule $(v\circ u)(1)$ et $(u\circ v)(1)$.

2. Exprime $(v\circ u)(x)$ et $(u\circ v)(x)$.

Exercice 2 – Décomposer une fonction

On considère $f(x)=(3x-1)^5$, $g(x)=e^{4x}$ et $h(x)=\sqrt{x^2+9}$.

1. Pour chacune, précise les fonctions u et v telles que la fonction s'écrive $v\circ u$.

Exercice 3 – Dériver une puissance composée

Dérive $f(x)=(3x-1)^5$, $g(x)=(x^2+1)^3$ et $h(x)=(5-2x)^4$.

1. Donne les trois dérivées.

Exercice 4 – Dériver une exponentielle composée

Dérive $f(t)=e^{-3t}$, $g(t)=5e^{-t/0{,}2}$ et $h(x)=e^{x^2}$.

1. Donne les trois dérivées.

Exercice 5 – Dériver cosinus et sinus composés

Dérive $f(t)=\cos(5t)$, $g(t)=\sin(100\pi t+\varphi)$ et $h(x)=\cos\left(x^2\right)$.

1. Donne les trois dérivées.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 6 – Dériver un logarithme composé

Dérive $f(x) = \ln(5x + 2)$ sur $\left]-\frac{2}{5}; +\infty\right[$, $g(x) = \ln\left(x^2 + 1\right)$ et $h(x) = \ln(e^x + 1)$.

1. Donne les trois dérivées.

Exercice 7 – Dériver une racine composée

Dérive $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$ et $g(x) = \sqrt{4x - 3}$ sur $\left]\frac{3}{4}; +\infty\right[$.

1. Donne les deux dérivées, et calcule $f'(4)$.

Exercice 8 – Reconnaître u'e^u

On veut trouver une primitive de $f(x) = 2x\,e^{x^2}$ et de $g(t) = -3e^{-3t}$.

1. Donne une primitive de chacune, en justifiant.

Exercice 9 – Reconnaître u'/u

On veut trouver une primitive de $f(x) = \dfrac{2x}{x^2 + 1}$ sur $\mathbb{R}$ et de $g(x) = \dfrac{3}{3x + 5}$ sur $\left]-\frac{5}{3}; +\infty\right[$.

1. Donne une primitive de chacune.

Exercice 10 – Reconnaître u'u^n

Trouve une primitive de $f(x) = 2x\left(x^2 + 3\right)^4$ et de $g(x) = 6(3x - 1)^5$.

1. Donne une primitive de chacune.

Exercice 11 – Primitive de u'cos(u)

Trouve une primitive de $f(t) = 2t\cos\left(t^2\right)$, $g(t) = 4\cos(4t + 1)$ et $h(t) = 100\pi\sin(100\pi t)$.

1. Donne une primitive de chacune.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

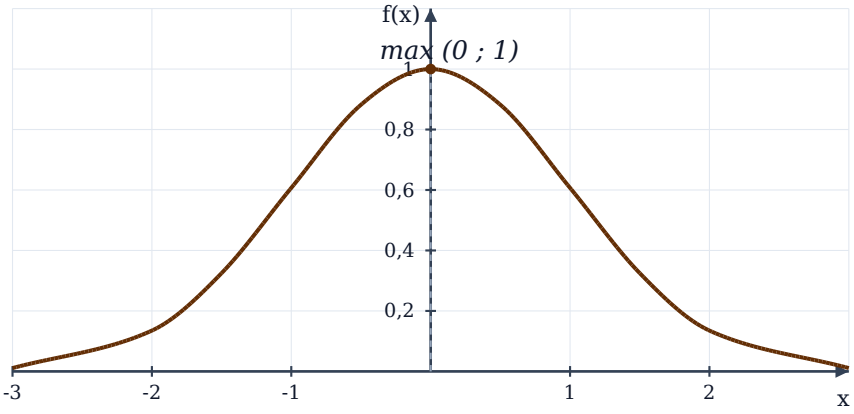
Exercice 12 – Étude d'une gaussienne

Soit $f(x) = e^{-x^2/2}$ sur $\mathbb{R}$.

1. Calcule $f'(x)$.

2. Dresse le tableau de variations.

3. Donne le maximum et les limites en $\pm\infty$.



Exercice 13 – Intégrale avec une composée

Calcule $\int_0^1 2x\,e^{x^2}dx$ et $\int_0^2 \dfrac{2x}{x^2+1}dx$.

1. Détaille les deux calculs.

Exercice 14 – Ajuster un coefficient

Trouve une primitive de $f(x) = x\,e^{x^2}$, $g(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$ et $h(t) = \sin(2t)$.

1. Donne une primitive de chacune, en ajustant les coefficients.

Exercice 15 – Dérivée et vitesse sur une trajectoire

Un point se déplace de sorte que sa distance à l'origine vaut $d(t) = \sqrt{9 + 4t^2}$ mètres (t en secondes).

1. Calcule $d(0)$ et $d(2)$.

2. Calcule $d'(t)$.

3. Calcule $d'(0)$ et $d'(2)$, puis interprète.

4. Que devient $d'(t)$ pour t très grand ?

Exercice 16 – Type bac : étude d'une fonction composée

Soit $f(x) = (x-2)e^{-x}$ sur $[0\,;5]$.

1. Calcule $f'(x)$ et factorise par e^{-x}.

2. Dresse le tableau de variations.

3. Détermine les extremums sur $[0\,;5]$.

4. Donne l'équation de la tangente au point d'abscisse 2.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 17 – Type bac : énergie d'un signal amorti

La puissance instantanée dissipée dans une résistance vaut $p(t) = 50e^{-4t}$ watts (t en secondes).

1. Calcule $p(0)$ et $p(0{,}5)$.

2. Détermine une primitive de p.

3. Calcule l'énergie dissipée entre 0 et 0,5 s.

4. Calcule l'énergie totale dissipée « jusqu'à l'infini ».

Exercice 18 – Type bac : primitives à reconnaître

Pour chacune des fonctions suivantes, reconnais la forme composée et donne une primitive :

$$f_1(x) = \frac{3x^2}{x^3+1} \qquad f_2(x) = 6x\left(x^2+5\right)^2 \qquad f_3(t) = 2\cos(2t)e^{\sin(2t)}$$

1. Identifie u dans chaque cas et donne la primitive.

Exercice 19 – Type bac : concentration dans un bain

La concentration d'un bain, en g/L, suit $c(t) = \dfrac{12}{1+0{,}5t}$ (t en heures).

1. Calcule $c(0)$, $c(4)$ et $c(10)$.

2. Calcule $c'(t)$ et justifie le sens de variation.

3. Détermine une primitive de c.

4. Calcule la « dose cumulée » $\int_0^{10} c(t)\,dt$.

Exercice 20 – Type bac : dérivée en chaîne sur trois niveaux

Une grandeur physique vaut $P(t) = \left(1+e^{-2t}\right)^3$.

1. Décompose P en trois fonctions élémentaires.

2. Calcule $P'(t)$.

3. Calcule $P(0)$ et $P'(0)$.

4. Donne la limite de P en $+\infty$ et interprète.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).