Équations différentielles — Terminale STI2D

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

Une équation différentielle relie une grandeur à sa propre vitesse de variation. C'est la forme naturelle des lois de la physique : un condensateur se charge d'autant plus vite qu'il est loin de sa tension finale ($u' = \frac{E-u}{RC}$), une pièce refroidit d'autant plus vite qu'elle est loin de l'ambiante ($T' = -k(T - T_{\text{amb}})$). Le programme de STI2D en résout deux familles : $y' = ay$, de solutions Ce^{at}, et $y' = ay + b$, qu'on ramène à la première en repérant sa solution CONSTANTE. La condition initiale fixe ensuite C. Ces 20 exercices corrigés couvrent la résolution, l'interprétation de la constante de temps, la méthode d'Euler et les modèles RC, RL et thermiques du bac. La difficulté est croissante : l'énoncé puis la correction détaillée s'affichent d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-sti2d/equations-differentielles

Exercice 1 – Vérifier qu'une fonction est solution

On considère l'équation différentielle $y' = 3y$ et la fonction $f(t) = 5e^{3t}$.

1. Vérifie que f est solution de cette équation.

2. La fonction $g(t) = 5e^{2t}$ est-elle solution ?

Exercice 2 – Solutions de y' = ay

On rappelle que les solutions de $y' = ay$ sont les fonctions $y(t) = Ce^{at}$, avec C réel quelconque.

1. Donne les solutions de $y' = 4y$, $y' = -0{,}2y$ et $2y' = 6y$.

Exercice 3 – Condition initiale

On cherche la solution de $y' = -0{,}5y$ vérifiant $y(0) = 8$.

1. Donne la forme générale des solutions.

2. Détermine celle qui vérifie la condition.

3. Calcule $y(4)$.

Exercice 4 – Solution constante de y' = ay + b

On considère l'équation $y' = -2y + 10$.

1. Cherche une solution CONSTANTE de cette équation.

2. Donne la forme générale des solutions.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Reconnaître une équation différentielle

Quatre situations physiques : ① la vitesse de refroidissement est proportionnelle à l'écart avec l'ambiante à 20 °C ; ② la charge d'un condensateur croît proportionnellement à $E - u$; ③ la population double tous les jours ; ④ la position d'un mobile croît de 5 m/s.

1. Écris l'équation différentielle correspondante et précise sa forme.

Exercice 6 – Résoudre y' = ay avec condition

Résous $y' = 0{,}25y$ avec $y(0) = 40$, puis $y' + 3y = 0$ avec $y(0) = 2$.

1. Donne les deux solutions et calcule $y(2)$ dans chaque cas.

Exercice 7 – Résoudre y' = ay + b

Résous $y' = 2y + 6$ avec $y(0) = 1$.

1. Détermine la solution constante.

2. Donne la forme générale, puis la solution vérifiant la condition.

3. Calcule $y(1)$.

Exercice 8 – Condition initiale non nulle en t = 0

Résous $y' = -0{,}4y + 20$ avec $y(0) = 10$.

1. Donne la solution.

2. Calcule $y(5)$ et la limite en $+\infty$.

Exercice 9 – Charge d'un condensateur

Dans un circuit RC série alimenté par $E = 12$ V, la tension du condensateur vérifie $RC\,u' + u = E$, avec $R = 2$ kΩ, $C = 50$ µF et $u(0) = 0$.

1. Calcule la constante de temps $\tau = RC$.

2. Mets l'équation sous la forme $u' = au + b$.

3. Résous et donne $u(t)$.

Exercice 10 – Lire la constante de temps

Quatre solutions d'équations différentielles : $y_1 = 5e^{-t\,/\,0{,}02}$, $y_2 = 3e^{-50t}$, $y_3 = 8 - 8e^{-0{,}1t}$ et $y_4 = 2e^{0{,}5t}$.

1. Donne la constante de temps de chacune (quand elle existe).

2. Précise le comportement à long terme.

Exercice 11 – Décharge d'un condensateur

Un condensateur chargé à 9 V se décharge dans une résistance. La tension vérifie $RC\,u' + u = 0$ avec $R = 5$ kΩ et $C = 20$ µF.

1. Calcule τ et mets l'équation sous forme standard.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

2. Résous avec la condition $u(0) = 9$.

3. Calcule $u(0{,}1)$ et l'instant où la tension vaut 1 V.

Exercice 12 – Loi de refroidissement

Une pièce à 180 °C refroidit dans un atelier à 20 °C. La loi de Newton donne $T' = -0{,}06(T - 20)$ (t en minutes).

1. Mets l'équation sous la forme $T' = aT + b$.

2. Résous avec $T(0) = 180$.

3. Calcule $T(20)$ et la limite.

4. À quel instant la pièce atteint-elle 50 °C ?

Exercice 13 – Euler contre solution exacte

On étudie $y' = -2y$ avec $y(0) = 100$. On compare la solution exacte à la méthode d'Euler de pas $h = 0{,}1$.

1. Donne la solution exacte et calcule $y(0{,}3)$.

2. Applique Euler sur trois pas.

3. Calcule l'erreur relative.

Exercice 14 – Établissement du courant dans une bobine

Dans un circuit RL série alimenté par $E = 24$ V, le courant vérifie $L\,i' + R\,i = E$, avec $R = 12\ \Omega$, $L = 0{,}6$ H et $i(0) = 0$.

1. Mets l'équation sous la forme $i' = ai + b$.

2. Calcule la constante de temps $\tau = \dfrac{L}{R}$ et le courant final.

3. Résous et calcule $i(0{,}05)$.

Exercice 15 – Condition donnée ailleurs qu'en 0

Résous $y' = -0{,}5y$ sachant que $y(2) = 30$.

1. Détermine la constante C.

2. Donne la solution et calcule $y(0)$.

3. Calcule $y(6)$.

Exercice 16 – Type bac : circuit RC complet

Un circuit RC série est alimenté par $E = 15$ V, avec $R = 4{,}7\ \text{k}\Omega$ et $C = 22\ \mu\text{F}$. Le condensateur est initialement déchargé. La tension vérifie $RC\,u' + u = E$.

1. Calcule τ et résous l'équation.

2. Calcule u après 0,1 s et après 0,3 s.

3. Détermine l'instant où $u = 10$ V.

4. Au bout de combien de temps la charge est-elle « terminée » (à 1% près) ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 17 – Type bac : refroidissement et Euler

Un four coupé refroidit selon $T' = -0{,}03(T - 25)$ (t en minutes), avec $T(0) = 205$ °C.

1. Résous exactement l'équation.

2. Calcule $T(30)$ exactement.

3. Applique la méthode d'Euler avec $h = 10$ min pour estimer $T(30)$.

4. Compare et commente.

Exercice 18 – Type bac : remplissage d'un réservoir

Un réservoir reçoit un débit constant de 30 L/min et fuit proportionnellement à son volume, à raison de 0,05 par minute. Le volume vérifie $V' = 30 - 0{,}05V$, avec $V(0) = 100$ L.

1. Détermine le volume d'équilibre.

2. Résous l'équation.

3. Calcule $V(20)$ et $V(60)$.

4. Au bout de combien de temps le réservoir contient-il 500 L ?

Exercice 19 – Type bac : identifier les paramètres

Un capteur mesure une grandeur qui suit une loi $y(t) = Ce^{at} + d$. Trois mesures sont disponibles : $y(0) = 90$, la limite à long terme est 30, et $y(10) = 54$ (t en secondes).

1. Détermine d.

2. Détermine C.

3. Détermine a et la constante de temps.

4. Écris l'équation différentielle vérifiée par y.

Exercice 20 – Type bac : deux régimes successifs

Un condensateur ($\tau = 0{,}2$ s) est d'abord chargé sous $E = 10$ V pendant 0,4 s, puis le générateur est remplacé par un court-circuit et le condensateur se décharge.

1. Donne $u(t)$ sur la phase de charge et calcule $u(0{,}4)$.

2. Écris l'équation de la phase de décharge et sa solution, en prenant $t' = t - 0{,}4$.

3. Calcule la tension 0,2 s après le début de la décharge.

4. Au bout de combien de temps, après le début de la décharge, la tension descend-elle sous 0,5 V ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Vérifier qu'une fonction est solution

On calcule la dérivée : $f'(t) = 5 \times 3e^{3t} = 15e^{3t}$.

On calcule $3f(t) = 3 \times 5e^{3t} = 15e^{3t}$.

Les deux expressions sont égales : $f' = 3f$, donc f est bien solution ✔.

Pour g : $g'(t) = 10e^{2t}$, tandis que $3g(t) = 15e^{2t}$.

$10e^{2t} \neq 15e^{2t}$: g n'est PAS solution.

Ce qui compte est donc le COEFFICIENT de t dans l'exposant : il doit être égal à a. Le facteur devant (5) est libre.

Réponse. $f' = 15e^{3t} = 3f$ ✔ solution · $g' = 10e^{2t} \neq 3g$: non solution.

Rappel de cours. Pour vérifier qu'une fonction est solution, on dérive et l'on compare aux deux membres de l'équation.

Erreur fréquente. Croire que le coefficient devant l'exponentielle détermine la solution : c'est l'EXPOSANT qui doit correspondre à a.

Correction de l'exercice 2 – Solutions de y' = ay

$y' = 4y$: ici $a = 4$, donc les solutions sont $y(t) = Ce^{4t}$.

$y' = -0{,}2y$: $a = -0{,}2$, donc $y(t) = Ce^{-0{,}2t}$.

$2y' = 6y$: il faut d'abord ramener à la forme standard en divisant par 2, soit $y' = 3y$.

Les solutions sont donc $y(t) = Ce^{3t}$.

Remarque sur le signe de a : si $a > 0$, les solutions explosent (croissance) ; si $a < 0$, elles tendent vers 0 (décroissance).

En physique, les modèles d'amortissement ont donc toujours $a < 0$.

Réponse. $y = Ce^{4t}$ · $y = Ce^{-0{,}2t}$ · et $2y' = 6y$ donne $y' = 3y$, soit $y = Ce^{3t}$.

Rappel de cours. $y' = ay \Leftrightarrow y(t) = Ce^{at}$. On ramène TOUJOURS l'équation à la forme $y' = ay$ d'abord.

Erreur fréquente. Lire $a = 6$ dans $2y' = 6y$: il faut diviser par le coefficient de y', donc $a = 3$.

Correction de l'exercice 3 – Condition initiale

Forme générale : $y(t) = Ce^{-0{,}5t}$.

Condition initiale : $y(0) = Ce^{0} = C$, donc $C = 8$.

La solution cherchée est $y(t) = 8e^{-0{,}5t}$.

$y(4) = 8e^{-2} \approx 8 \times 0{,}135\,3 \approx 1{,}083$.

Contrôle : $y'(t) = -4e^{-0{,}5t}$ et $-0{,}5\,y(t) = -4e^{-0{,}5t}$ ✔ l'équation est vérifiée.

Et $y(0) = 8$ ✔ la condition initiale aussi. Une solution doit toujours satisfaire les deux.

Réponse. $y(t) = Ce^{-0{,}5t}$, puis $C = 8$ · donc $y(t) = 8e^{-0{,}5t}$ et $y(4) \approx 1{,}083$.

Rappel de cours. $y(0) = C$ puisque $e^{0} = 1$: la condition initiale donne DIRECTEMENT la constante.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Erreur fréquente. Oublier de déterminer C : « $y = Ce^{-0,5t}$ » n'est pas une réponse quand une condition initiale est donnée.

Correction de l'exercice 4 – Solution constante de y' = ay + b

Si y est constante, alors $y' = 0$. L'équation devient $0 = -2y + 10$.

Donc $2y = 10$ et $y = 5$: la fonction constante $y_0 = 5$ est solution.

On retrouve la formule générale $-\frac{b}{a} = -\frac{10}{-2} = 5$ ✔.

Forme générale : $y(t) = Ce^{-2t} + 5$ — la solution de $y' = ay$ plus la solution constante.

Vérification : $y' = -2Ce^{-2t}$ et $-2y + 10 = -2Ce^{-2t} - 10 + 10 = -2Ce^{-2t}$ ✔.

Interprétation : toutes les solutions convergent vers 5 (car $e^{-2t} \to 0$). La solution constante est la valeur d'ÉQUILIBRE du système.

Réponse. Solution constante $y_0 = 5 = -\frac{b}{a}$ · solutions générales $y(t) = Ce^{-2t} + 5$.

Rappel de cours. $y' = ay + b$: la solution constante est $-\frac{b}{a}$, et les solutions s'écrivent $Ce^{at} - \frac{b}{a}$.

Erreur fréquente. Écrire la solution constante $\frac{b}{a} = -5$: le signe moins fait partie de la formule, on retrouve 5.

Correction de l'exercice 5 – Reconnaître une équation différentielle

① $T' = -k(T - 20)$, qu'on développe en $T' = -kT + 20k$: c'est une équation $y' = ay + b$ avec $a = -k$ et $b = 20k$.

② $u' = \lambda(E - u) = -\lambda u + \lambda E$: encore la forme $y' = ay + b$.

③ Une population qui croît proportionnellement à elle-même : $P' = kP$, forme $y' = ay$ avec $a > 0$.

④ Position croissant à vitesse constante : $x' = 5$, forme $y' = b$ — cas particulier où $a = 0$, qui se résout par simple primitive ($x = 5t + C$).

À retenir : « proportionnel à la grandeur elle-même » donne $y' = ay$; « proportionnel à un ÉCART » donne $y' = ay + b$.

Les solutions constantes correspondent aux équilibres : 20 °C pour ①, E pour ②, aucune pour ③ et ④ (hors le cas $P = 0$).

Réponse. ① $T' = -kT + 20k$ · ② $u' = -\lambda u + \lambda E$ · ③ $P' = kP$ · ④ $x' = 5$ (cas $a = 0$, primitive).

Rappel de cours. Proportionnel à la grandeur → $y' = ay$ · proportionnel à un écart → $y' = ay + b$, dont l'équilibre est $-\frac{b}{a}$.

Erreur fréquente. Oublier de développer $-k(T - 20)$: sous cette forme, on ne voit pas le $b = 20k$, pourtant nécessaire pour identifier l'équation.

Correction de l'exercice 6 – Résoudre y' = ay avec condition

Première équation : $a = 0,25$, donc $y(t) = Ce^{0,25t}$, et $y(0) = C = 40$.

Solution : $y(t) = 40e^{0,25t}$. Alors $y(2) = 40e^{0,5} \approx 40 \times 1,648\,7 \approx 65,9$.

Seconde équation : il faut d'abord la mettre sous la forme standard. $y' + 3y = 0$ équivaut à $y' = -3y$.

Donc $a = -3$ et $y(t) = Ce^{-3t}$, avec $C = 2$.

Solution : $y(t) = 2e^{-3t}$, et $y(2) = 2e^{-6} \approx 2 \times 0,002\,479 \approx 0,004\,96$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Contraste instructif : la première solution croît ($a > 0$), la seconde s'effondre presque à zéro en deux unités de temps ($a < 0$ et grand en valeur absolue).

Réponse. $y(t) = 40e^{0,25t}$ et $y(2) \approx 65,9$ · $y(t) = 2e^{-3t}$ et $y(2) \approx 0,005$.

Rappel de cours. $y' + 3y = 0$ se réécrit $y' = -3y$: attention au SIGNE quand l'équation est donnée sous forme « tout à gauche ».

Erreur fréquente. Lire $a = 3$ dans $y' + 3y = 0$: la solution serait croissante au lieu de décroissante, contresens complet.

Correction de l'exercice 7 – Résoudre y' = ay + b

Solution constante : $0 = 2y + 6$ donne $y = -3$. On retrouve $-\frac{b}{a} = -\frac{6}{2} = -3$ ✔.

Forme générale : $y(t) = Ce^{2t} - 3$.

Condition initiale : $y(0) = C - 3 = 1$, donc $C = 4$.

Solution : $y(t) = 4e^{2t} - 3$.

$y(1) = 4e^{2} - 3 \approx 4 \times 7,389 - 3 \approx 29,56 - 3 \approx 26,56$.

Vérification : $y'(t) = 8e^{2t}$ et $2y + 6 = 8e^{2t} - 6 + 6 = 8e^{2t}$ ✔.

Attention à l'ordre des opérations : on détermine C APRÈS avoir ajouté la solution constante, sinon la condition initiale est mal exploitée.

Réponse. Solution constante -3 · général $y = Ce^{2t} - 3$, puis $C = 4$ · $y(t) = 4e^{2t} - 3$ et $y(1) \approx 26,56$.

Rappel de cours. $y(0) = C - \frac{b}{a}$: la constante C n'est PAS égale à $y(0)$ quand $b \neq 0$.

Erreur fréquente. Poser $C = 1$ directement : on oublierait le -3, et la solution ne vérifierait ni l'équation ni la condition.

Correction de l'exercice 8 – Condition initiale non nulle en t = 0

Solution constante : $-\frac{b}{a} = -\frac{20}{-0,4} = 50$.

Forme générale : $y(t) = Ce^{-0,4t} + 50$.

Condition : $y(0) = C + 50 = 10$, donc $C = -40$.

Solution : $y(t) = -40e^{-0,4t} + 50$, qu'on écrit plutôt $y(t) = 50 - 40e^{-0,4t}$.

$y(5) = 50 - 40e^{-2} \approx 50 - 40 \times 0,135\,3 \approx 50 - 5,41 \approx 44,59$.

Limite : $e^{-0,4t} \to 0$, donc $y(t) \to 50$. La solution monte vers 50 sans l'atteindre.

Allure : c'est exactement la forme d'une charge de condensateur, partant de 10 et tendant vers l'équilibre 50.

Contrôle : $y'(0) = -40 \times (-0,4) = 16$ et $-0,4 \times 10 + 20 = 16$ ✔.

Réponse. $y(t) = 50 - 40e^{-0,4t}$ · $y(5) \approx 44,59$ · limite 50 (la solution constante).

Rappel de cours. La solution constante est la LIMITE de toutes les solutions quand $a < 0$: c'est l'équilibre du système.

Erreur fréquente. Écrire $C = 10 - 50 = -40$ puis oublier le signe dans $y = -40e^{-0,4t} + 50$: le terme exponentiel doit être NÉGATIF pour que la courbe monte.

Correction de l'exercice 9 – Charge d'un condensateur

$\tau = RC = 2\,000 \times 50 \times 10^{-6} = 0,1$ s.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

L'équation $0{,}1\,u' + u = 12$ se réécrit $u' = \dfrac{12-u}{0{,}1} = -10u + 120$.

Donc $a = -10$ et $b = 120$.

Solution constante : $-\dfrac{b}{a} = -\dfrac{120}{-10} = 12$ V — c'est bien la tension du générateur ✔.

Forme générale : $u(t) = Ce^{-10t} + 12$.

Condition initiale : $u(0) = C + 12 = 0$, donc $C = -12$.

Solution : $u(t) = 12\left(1 - e^{-10t}\right)$ volts.

Contrôle : $a = -10 = -\dfrac{1}{\tau}$ ✔ le coefficient de l'exponentielle est toujours l'opposé de l'inverse de la constante de temps.

Réponse. $\tau = 0{,}1$ s · $u' = -10u + 120$ · $u(t) = 12\left(1 - e^{-10t}\right)$.

Rappel de cours. $RC\,u' + u = E \Rightarrow u' = -\dfrac{1}{\tau}u + \dfrac{E}{\tau}$, de solution $u = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$ si $u(0) = 0$.

Erreur fréquente. Oublier de diviser par RC : l'équation $u' = 12 - u$ donnerait $\tau = 1$ s au lieu de 0,1 s, soit un facteur 10 sur toute la dynamique.

Correction de l'exercice 10 – Lire la constante de temps

La constante de temps τ est telle que l'exponentielle s'écrit $e^{-t/\tau}$.

$y_1 = 5e^{-t/0{,}02}$: $\tau = 0{,}02$ s. Elle tend vers 0.

$y_2 = 3e^{-50t}$: on identifie $-50 = -\dfrac{1}{\tau}$, donc $\tau = \dfrac{1}{50} = 0{,}02$ s également. Elle tend vers 0.

Les deux premières ont donc la même dynamique, écrite de deux façons différentes.

$y_3 = 8 - 8e^{-0{,}1t}$: $\tau = \dfrac{1}{0{,}1} = 10$ s. Elle tend vers 8 (sa solution constante).

$y_4 = 2e^{0{,}5t}$: l'exposant est POSITIF, il n'y a pas de constante de temps au sens d'un amortissement. La solution diverge vers $+\infty$.

Repère pratique : après 3τ, une évolution a parcouru 95% du chemin vers son équilibre ; après 5τ, 99%.

Réponse. y_1 et y_2 : $\tau = 0{,}02$ s, tendent vers 0 · y_3 : $\tau = 10$ s, tend vers 8 · y_4 : pas de constante de temps, diverge.

Rappel de cours. e^{at} avec $a < 0$ s'écrit $e^{-t/\tau}$ avec $\tau = \dfrac{1}{|a|}$: c'est la constante de temps.

Erreur fréquente. Annoncer $\tau = 50$ s pour y_2 : la constante de temps est l'INVERSE du coefficient, soit 0,02 s.

Correction de l'exercice 11 – Décharge d'un condensateur

$\tau = RC = 5\,000 \times 20 \times 10^{-6} = 0{,}1$ s.

L'équation devient $u' = -\dfrac{u}{\tau} = -10u$: c'est une équation $y' = ay$ avec $a = -10$.

Solutions : $u(t) = Ce^{-10t}$, et la condition $u(0) = C = 9$ donne $u(t) = 9e^{-10t}$.

$u(0{,}1) = 9e^{-1} \approx 9 \times 0{,}367\,9 \approx 3{,}31$ V — soit 36,8% de la tension initiale, après exactement une constante de temps ✔.

Instant où $u = 1$ V : $9e^{-10t} = 1$ donne $e^{-10t} = \dfrac{1}{9}$.

$-10t = \ln\dfrac{1}{9} = -\ln 9 \approx -2{,}197$, donc $t \approx 0{,}2197$ s, soit environ 220 ms.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Contrôle en constantes de temps : $\dfrac{0{,}2197}{0{,}1} \approx 2{,}2\,\tau$. Cohérent, puisque descendre à 11% prend un peu plus de deux constantes de temps ✔.

Réponse. $\tau = 0{,}1$ s et $u' = -10u \cdot u(t) = 9e^{-10t} \cdot u(0{,}1) \approx 3{,}31$ V et $u = 1$ V à $t = 0{,}1 \ln 9 \approx 220$ ms.

Rappel de cours. Décharge : $u' = -\frac{u}{\tau}$, donc $u = U_0 e^{-t/\tau}$, et $t = \tau \ln \dfrac{U_0}{u}$ pour atteindre une tension donnée.

Erreur fréquente. Confondre charge et décharge : la décharge n'a PAS de terme constant, son équation est $y' = ay$ et sa limite est 0.

Correction de l'exercice 12 – Loi de refroidissement

On développe : $T' = -0{,}06T + 1{,}2$. Donc $a = -0{,}06$ et $b = 1{,}2$.

Solution constante : $-\dfrac{b}{a} = -\dfrac{1{,}2}{-0{,}06} = 20$ °C — la température de l'atelier ✔.

Forme générale : $T(t) = Ce^{-0{,}06t} + 20$.

Condition : $T(0) = C + 20 = 180$, donc $C = 160$.

Solution : $T(t) = 20 + 160e^{-0{,}06t}$.

$T(20) = 20 + 160e^{-1{,}2} \approx 20 + 160 \times 0{,}301\,2 \approx 20 + 48{,}2 = 68{,}2$ °C.

Limite : $T \to 20$ °C ✔ physiquement cohérent.

Pour 50 °C : $160e^{-0{,}06t} = 30$, donc $e^{-0{,}06t} = 0{,}1875$.

$-0{,}06t = \ln 0{,}1875 \approx -1{,}673\,98$, donc $t \approx 27{,}9$ minutes.

Contrôle : $T(28) \approx 20 + 160 \times 0{,}186\,4 \approx 49{,}8$ °C ✔ juste sous les 50 °C.

Réponse. $T' = -0{,}06T + 1{,}2 \cdot T(t) = 20 + 160e^{-0{,}06t} \cdot T(20) \approx 68{,}2$ °C, limite 20 °C · 50 °C atteint vers $t \approx 27{,}9$ min.

Rappel de cours. Loi de Newton : $T' = -k(T - T_{\text{amb}})$, de solution $T = T_{\text{amb}} + (T_0 - T_{\text{amb}})e^{-kt}$.

Erreur fréquente. Résoudre $T' = -0{,}06T$ en oubliant le $+1{,}2$: la pièce tendrait vers 0 °C au lieu de 20 °C.

Correction de l'exercice 13 – Euler contre solution exacte

Solution exacte : $y(t) = 100e^{-2t}$.

$y(0{,}3) = 100e^{-0{,}6} \approx 100 \times 0{,}548\,8 = 54{,}88$.

Euler : $y_{n+1} = y_n + h\,y'(t_n) = y_n + 0{,}1 \times (-2y_n) = y_n(1 - 0{,}2) = 0{,}8\,y_n$.

$y_1 = 80$ (à $t = 0{,}1$) ; $y_2 = 64$ (à $t = 0{,}2$) ; $y_3 = 51{,}2$ (à $t = 0{,}3$).

Erreur absolue : $54{,}88 - 51{,}2 = 3{,}68$.

Erreur relative : $\dfrac{3{,}68}{54{,}88} \approx 0{,}067$, soit 6,7%.

Euler SOUS-estime ici, parce qu'il utilise la pente du début de chaque pas, trop forte pour une fonction décroissante qui s'aplatit.

Avec $h = 0{,}05$ (six pas), le facteur devient 0,9 et l'on obtient $100 \times 0{,}9^6 \approx 53{,}14$, soit une erreur de 3,2% : diviser le pas par deux divise l'erreur par deux environ.

Réponse. Exact : $y(t) = 100e^{-2t}$ et $y(0{,}3) \approx 54{,}88$ · Euler : 80 ; 64 ; 51,2 · erreur relative $\approx 6{,}7\%$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Rappel de cours. Pour $y' = ay$, Euler donne $y_{n+1} = y_n(1 + ah)$: c'est une suite GÉOMÉTRIQUE de raison $1 + ah$.

Erreur fréquente. Croire qu'Euler est exact parce que la suite est géométrique : $(1 + ah)^n$ n'est qu'une approximation de e^{anh}.

Correction de l'exercice 14 – Établissement du courant dans une bobine

On divise par $L = 0{,}6$: $i' = -\frac{R}{L}i + \frac{E}{L} = -\frac{12}{0{,}6}i + \frac{24}{0{,}6}$.

Donc $i' = -20i + 40$.

Constante de temps : $\tau = \frac{L}{R} = \frac{0{,}6}{12} = 0{,}05$ s. On vérifie que $a = -20 = -\frac{1}{\tau}$ ✔.

Courant final (solution constante) : $-\frac{b}{a} = -\frac{40}{-20} = 2$ A. C'est $\frac{E}{R} = \frac{24}{12} = 2$ A ✔ la bobine finit par se comporter comme un simple fil.

Forme générale : $i(t) = Ce^{-20t} + 2$, avec $i(0) = C + 2 = 0$, donc $C = -2$.

Solution : $i(t) = 2\left(1 - e^{-20t}\right)$ ampères.

$i(0{,}05) = 2\left(1 - e^{-1}\right) \approx 2 \times 0{,}632\,1 \approx 1{,}26$ A, soit 63,2% du courant final après une constante de temps ✔.

Réponse. $i' = -20i + 40 \cdot \tau = \frac{L}{R} = 0{,}05$ s et $i_{\text{final}} = \frac{E}{R} = 2$ A · $i(t) = 2\left(1 - e^{-20t}\right)$ et $i(0{,}05) \approx 1{,}26$ A.

Rappel de cours. Circuit RL : $\tau = \frac{L}{R}$ et courant final $\frac{E}{R}$ · circuit RC : $\tau = RC$ et tension finale E.

Erreur fréquente. Oublier de diviser E par L : avec $i' = -20i + 24$, le courant final serait 1,2 A au lieu de 2 A.

Correction de l'exercice 15 – Condition donnée ailleurs qu'en 0

Forme générale : $y(t) = Ce^{-0{,}5t}$.

Condition : $y(2) = Ce^{-1} = 30$, donc $C = 30e^{1} = 30e \approx 81{,}55$.

Solution : $y(t) = 30e\,e^{-0{,}5t} = 30e^{1\,-\,0{,}5t}$.

$y(0) = 30e \approx 81{,}55$: c'est la valeur initiale, qu'on a donc RETROUVÉE à partir d'une mesure faite à $t = 2$.

$y(6) = 30e^{1\,-\,3} = 30e^{-2} \approx 30 \times 0{,}135\,3 \approx 4{,}06$.

Contrôle : de $t = 2$ à $t = 6$, il s'écoule 4 unités, donc la grandeur est multipliée par $e^{-0{,}5 \times 4} = e^{-2} \approx 0{,}135$. Et $30 \times 0{,}135 \approx 4{,}06$ ✔.

Méthode générale : quand la condition est donnée en $t_0 \neq 0$, il est souvent plus simple d'écrire $y(t) = y(t_0)e^{a(t\,-\,t_0)}$.

Réponse. $C = 30e \approx 81{,}55$ · $y(t) = 30e^{1\,-\,0{,}5t}$, avec $y(0) \approx 81{,}55$ · $y(6) = 30e^{-2} \approx 4{,}06$.

Rappel de cours. $y(t) = y(t_0)\,e^{a(t\,-\,t_0)}$: cette écriture évite de calculer C explicitement.

Erreur fréquente. Poser $C = 30$: ce serait la valeur en $t = 0$, or la mesure est faite en $t = 2$.

Correction de l'exercice 16 – Type bac : circuit RC complet

$\tau = RC = 4\,700 \times 22 \times 10^{-6} = 0{,}103\,4$ s.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Équation standard : $u' = -\dfrac{1}{0{,}103\,4}u + \dfrac{15}{0{,}103\,4}$, soit environ $u' = -9{,}67u + 145{,}1$.

Solution constante : 15 V. Forme générale : $u(t) = Ce^{-t/0{,}103\,4} + 15$.

Condition $u(0) = 0$: $C = -15$, d'où $u(t) = 15\left(1 - e^{-t/0{,}103\,4}\right)$.

$u(0{,}1) = 15\left(1 - e^{-0{,}967\,1}\right) \approx 15(1 - 0{,}380\,3) \approx 9{,}30$ V.

$u(0{,}3) = 15\left(1 - e^{-2{,}901\,4}\right) \approx 15(1 - 0{,}055\,0) \approx 14{,}18$ V.

Pour $u = 10$ V : $1 - e^{-t/\tau} = \dfrac{10}{15} = \dfrac{2}{3}$, donc $e^{-t/\tau} = \dfrac{1}{3}$.

$t = \tau \ln 3 \approx 0{,}103\,4 \times 1{,}098\,6 \approx 0{,}113\,6$ s, soit environ 114 ms.

Charge terminée à 1% près : il faut $e^{-t/\tau} \leq 0{,}01$, donc
$t \geq \tau \ln 100 \approx 0{,}103\,4 \times 4{,}605 \approx 0{,}476$ s.

Soit environ 476 ms, c'est-à-dire $4{,}6\,\tau$ — le repère habituel ✔.

Réponse. $\tau \approx 0{,}1034$ s · $u(t) = 15\left(1 - e^{-t/0{,}1034}\right)$ · $u(0{,}1) \approx 9{,}30$ V et $u(0{,}3) \approx 14{,}18$ V · 10 V à $t = \tau \ln 3 \approx 114$ ms · charge terminée vers 476 ms.

Rappel de cours. $u = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$ atteint la fraction f de E à l'instant $t = \tau \ln \dfrac{1}{1-f}$.

Erreur fréquente. Calculer $\tau = 4{,}7 \times 22 = 103{,}4$ sans les unités : τ vaut 103,4 ms, soit 0,1034 s, et non 103 s.

Correction de l'exercice 17 – Type bac : refroidissement et Euler

Forme standard : $T' = -0{,}03T + 0{,}75$. Solution constante : $-\dfrac{0{,}75}{-0{,}03} = 25$ °C ✔.

Général : $T(t) = Ce^{-0{,}03t} + 25$, et $T(0) = C + 25 = 205$ donne $C = 180$.

Solution : $T(t) = 25 + 180e^{-0{,}03t}$.

$T(30) = 25 + 180e^{-0{,}9} \approx 25 + 180 \times 0{,}406\,6 \approx 25 + 73{,}2 = 98{,}2$ °C.

Euler avec $h = 10$: $T_{n+1} = T_n + 10 \times (-0{,}03(T_n - 25)) = T_n - 0{,}3(T_n - 25)$.

$T_1 = 205 - 0{,}3 \times 180 = 205 - 54 = 151$ °C (à $t = 10$).

$T_2 = 151 - 0{,}3 \times 126 = 151 - 37{,}8 = 113{,}2$ °C (à $t = 20$).

$T_3 = 113{,}2 - 0{,}3 \times 88{,}2 = 113{,}2 - 26{,}46 = 86{,}74$ °C (à $t = 30$).

Comparaison : Euler donne 86,7 °C contre 98,2 °C exactement, soit une erreur de 11,5 °C (environ 12%).

Euler SOUS-estime la température, car il applique sur tout le pas la pente du début — trop forte, la décroissance ralentissant ensuite.

Avec $h = 1$ min (30 pas), on obtiendrait $25 + 180 \times 0{,}97^{30} \approx 25 + 180 \times 0{,}401\,0 \approx 97{,}2$ °C, soit une erreur d'à peine 1 °C ✔.

Réponse. $T(t) = 25 + 180e^{-0{,}03t}$ · $T(30) \approx 98{,}2$ °C · Euler ($h = 10$) : 151 ; 113,2 ; 86,7 °C · erreur de 11,5 °C, ramenée à 1 °C avec $h = 1$.

Rappel de cours. Euler avec un pas trop grand dérive vite. L'erreur est à peu près proportionnelle au pas.

Erreur fréquente. Utiliser la pente initiale pour tous les pas : la pente doit être RECALCULÉE à chaque étape avec la valeur courante de T.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 18 – Type bac : remplissage d'un réservoir

Équilibre : $V' = 0$ donne $30 = 0{,}05V$, soit $V = 600$ L.

On retrouve $-\frac{b}{a} = -\frac{30}{-0{,}05} = 600$ ✔.

Interprétation : à 600 L, la fuite ($0{,}05 \times 600 = 30$ L/min) compense exactement l'apport.

Forme générale : $V(t) = Ce^{-0{,}05t} + 600$, et $V(0) = C + 600 = 100$ donne $C = -500$.

Solution : $V(t) = 600 - 500e^{-0{,}05t}$.

$V(20) = 600 - 500e^{-1} \approx 600 - 500 \times 0{,}367\,9 \approx 600 - 183{,}9 = 416{,}1$ L.

$V(60) = 600 - 500e^{-3} \approx 600 - 500 \times 0{,}049\,8 \approx 600 - 24{,}9 = 575{,}1$ L.

Pour 500 L : $500e^{-0{,}05t} = 100$, donc $e^{-0{,}05t} = 0{,}2$.

$-0{,}05t = \ln 0{,}2 \approx -1{,}609\,4$, donc $t \approx 32{,}2$ minutes.

Contrôle : $V(32) \approx 600 - 500 \times 0{,}201\,9 \approx 499{,}1$ L ✔ juste sous les 500 L.

Remarque : le réservoir n'atteindra jamais 600 L, ni a fortiori 700 L. Toute cible supérieure ou égale à l'équilibre est inatteignable.

Réponse. Équilibre 600 L · $V(t) = 600 - 500e^{-0{,}05t}$ · $V(20) \approx 416{,}1$ L et $V(60) \approx 575{,}1$ L · 500 L atteints à $t \approx 32{,}2$ min.

Rappel de cours. Apport constant et fuite proportionnelle : $V' = b + aV$ avec $a < 0$, d'équilibre $-\frac{b}{a}$, jamais atteint mais approché.

Erreur fréquente. Chercher le temps pour atteindre 600 L : l'équation $500e^{-0{,}05t} = 0$ n'a pas de solution. L'équilibre est une limite.

Correction de l'exercice 19 – Type bac : identifier les paramètres

La limite à long terme (avec $a < 0$) est d, puisque $e^{at} \to 0$. Donc $d = 30$.

$y(0) = C + d = 90$, donc $C = 90 - 30 = 60$.

Le modèle s'écrit donc $y(t) = 60e^{at} + 30$.

Troisième mesure : $y(10) = 60e^{10a} + 30 = 54$, donc $60e^{10a} = 24$ et $e^{10a} = 0{,}4$.

$10a = \ln 0{,}4 \approx -0{,}916\,3$, donc $a \approx -0{,}091\,63$ s^{-1}.

Constante de temps : $\tau = \frac{1}{|a|} \approx 10{,}91$ s.

Équation différentielle : à partir de $y = Ce^{at} + d$, on a $y' = aCe^{at} = a(y - d)$.

Donc $y' = -0{,}091\,63(y - 30)$, soit $y' = -0{,}091\,63y + 2{,}749$.

Contrôle : $y'(0) = -0{,}091\,63 \times (90 - 30) = -5{,}498$. Et l'on vérifie que la pente initiale est négative, cohérente avec une grandeur qui décroît de 90 vers 30 ✔.

Contrôle du modèle : $y(10) = 60 \times 0{,}4 + 30 = 54$ ✔ conforme à la mesure.

Réponse. $d = 30$ (la limite) · $C = 60$ · $a = \frac{\ln 0{,}4}{10} \approx -0{,}0916$ s^{-1}, soit $\tau \approx 10{,}9$ s · équation $y' = -0{,}0916(y - 30)$.

Rappel de cours. Dans $y = Ce^{at} + d$: d est la LIMITE, $C = y(0) - d$, et une troisième mesure donne a.

Erreur fréquente. Prendre $C = 90$: la constante C est l'ÉCART initial à la limite, soit $90 - 30 = 60$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 20 – Type bac : deux régimes successifs

Charge : $u(t) = 10\left(1 - e^{-t/0{,}2}\right)$, avec $u(0) = 0$.

$u(0{,}4) = 10\left(1 - e^{-2}\right) \approx 10(1 - 0{,}135\,3) \approx 8{,}65$ V.

Le condensateur n’est donc pas complètement chargé : après 2τ, il atteint 86,5% de E.

Décharge : l’équation devient $u' = -\frac{u}{\tau} = -5u$, sans terme constant.

En posant $t' = t - 0{,}4$, la condition initiale de cette phase est $u(t' = 0) = 8{,}65$ V.

Solution : $u(t') = 8{,}65e^{-5t'}$.

Après 0,2 s de décharge : $u = 8{,}65e^{-1} \approx 8{,}65 \times 0{,}367\,9 \approx 3{,}18$ V.

Seuil de 0,5 V : $8{,}65e^{-5t'} = 0{,}5$, donc $e^{-5t'} = 0{,}057\,8$.

$-5t' = \ln 0{,}057\,8 \approx -2{,}851$, donc $t' \approx 0{,}570$ s.

Soit environ 570 ms après le début de la décharge, c’est-à-dire $2{,}85\,\tau$.

Point de méthode essentiel : à chaque changement de régime, on RECALCULE la condition initiale (ici 8,65 V) et l’on repart de zéro en temps. La tension est CONTINUE au raccordement.

Réponse. Charge : $u = 10\left(1 - e^{-t/0{,}2}\right)$ et $u(0{,}4) \approx 8{,}65$ V · décharge : $u(t') = 8{,}65e^{-5t'}$ · 3,18 V après 0,2 s · sous 0,5 V après ≈ 570 ms.

Rappel de cours. Changement de régime : la grandeur est CONTINUE, sa valeur finale devient la condition initiale de la phase suivante.

Erreur fréquente. Repartir de 10 V pour la décharge : le condensateur n’avait atteint que 8,65 V, et toute la suite serait décalée.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).