# Équations différentielles — Terminale STI2D

## 20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés

### Présentation

Une équation différentielle relie une grandeur à sa propre vitesse de variation. C'est la forme naturelle des lois de la physique : un condensateur se charge d'autant plus vite qu'il est loin de sa tension finale ($u' = \frac{E-u}{RC}$), une pièce refroidit d'autant plus vite qu'elle est loin de l'ambiante ($T' = -k(T - T_{\text{amb}})$). Le programme de STI2D en résout deux familles : $y' = ay$, de solutions $Ce^{at}$, et $y' = ay + b$, qu'on ramène à la première en repérant sa solution CONSTANTE. La condition initiale fixe ensuite $C$. Ces 20 exercices corrigés couvrent la résolution, l'interprétation de la constante de temps, la méthode d'Euler et les modèles RC, RL et thermiques du bac. La difficulté est croissante : l'énoncé puis la correction détaillée s'affichent d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-sti2d/equations-differentielles

### Exercice 1 – Vérifier qu'une fonction est solution

On considère l'équation différentielle $y' = 3y$ et la fonction $f(t) = 5e^{3t}$.

**1.** Vérifie que $f$ est solution de cette équation.

**2.** La fonction $g(t) = 5e^{2t}$ est-elle solution ?

### Exercice 2 – Solutions de y' = ay

On rappelle que les solutions de $y' = ay$ sont les fonctions $y(t) = Ce^{at}$, avec $C$ réel quelconque.

**1.** Donne les solutions de $y' = 4y$, $y' = -0{,}2y$ et $2y' = 6y$.

### Exercice 3 – Condition initiale

On cherche la solution de $y' = -0{,}5y$ vérifiant $y(0) = 8$.

**1.** Donne la forme générale des solutions.

**2.** Détermine celle qui vérifie la condition.

**3.** Calcule $y(4)$.

### Exercice 4 – Solution constante de y' = ay + b

On considère l'équation $y' = -2y + 10$.

**1.** Cherche une solution CONSTANTE de cette équation.

**2.** Donne la forme générale des solutions.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

## Exercice 5 – Reconnaître une équation différentielle

Quatre situations physiques : ① la vitesse de refroidissement est proportionnelle à l'écart avec l'ambiante à 20 °C ; ② la charge d'un condensateur croît proportionnellement à $E - u$ ; ③ la population double tous les jours ; ④ la position d'un mobile croît de 5 m/s.

**1.** Écris l'équation différentielle correspondante et précise sa forme.

## Exercice 6 – Résoudre y' = ay avec condition

Résous $y' = 0{,}25y$ avec $y(0) = 40$, puis $y' + 3y = 0$ avec $y(0) = 2$.

**1.** Donne les deux solutions et calcule $y(2)$ dans chaque cas.

## Exercice 7 – Résoudre y' = ay + b

Résous $y' = 2y + 6$ avec $y(0) = 1$.

**1.** Détermine la solution constante.

**2.** Donne la forme générale, puis la solution vérifiant la condition.

**3.** Calcule $y(1)$.

## Exercice 8 – Condition initiale non nulle en t = 0

Résous $y' = -0{,}4y + 20$ avec $y(0) = 10$.

**1.** Donne la solution.

**2.** Calcule $y(5)$ et la limite en $+\infty$.

## Exercice 9 – Charge d'un condensateur

Dans un circuit RC série alimenté par $E = 12$ V, la tension du condensateur vérifie $RC\,u' + u = E$, avec $R = 2$ kΩ, $C = 50$ µF et $u(0) = 0$.

**1.** Calcule la constante de temps $\tau = RC$.

**2.** Mets l'équation sous la forme $u' = au + b$.

**3.** Résous et donne $u(t)$.

## Exercice 10 – Lire la constante de temps

Quatre solutions d'équations différentielles : $y_1 = 5e^{-t\,/\,0{,}02}$, $y_2 = 3e^{-50t}$, $y_3 = 8 - 8e^{-0{,}1t}$ et $y_4 = 2e^{0{,}5t}$.

**1.** Donne la constante de temps de chacune (quand elle existe).

**2.** Précise le comportement à long terme.

## Exercice 11 – Décharge d'un condensateur

Un condensateur chargé à 9 V se décharge dans une résistance. La tension vérifie $RC\,u' + u = 0$ avec $R = 5$ kΩ et $C = 20$ µF.

**1.** Calcule $\tau$ et mets l'équation sous forme standard.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

**2.** Résous avec la condition $u(0) = 9$.

**3.** Calcule $u(0{,}1)$ et l'instant où la tension vaut 1 V.

## Exercice 12 – Loi de refroidissement

Une pièce à 180 °C refroidit dans un atelier à 20 °C. La loi de Newton donne $T' = -0{,}06(T - 20)$ ($t$ en minutes).

**1.** Mets l'équation sous la forme $T' = aT + b$.

**2.** Résous avec $T(0) = 180$.

**3.** Calcule $T(20)$ et la limite.

**4.** À quel instant la pièce atteint-elle 50 °C ?

## Exercice 13 – Euler contre solution exacte

On étudie $y' = -2y$ avec $y(0) = 100$. On compare la solution exacte à la méthode d'Euler de pas $h = 0{,}1$.

**1.** Donne la solution exacte et calcule $y(0{,}3)$.

**2.** Applique Euler sur trois pas.

**3.** Calcule l'erreur relative.

## Exercice 14 – Établissement du courant dans une bobine

Dans un circuit RL série alimenté par $E = 24$ V, le courant vérifie $L\,i' + R\,i = E$, avec $R = 12\ \Omega$, $L = 0{,}6$ H et $i(0) = 0$.

**1.** Mets l'équation sous la forme $i' = ai + b$.

**2.** Calcule la constante de temps $\tau = \dfrac{L}{R}$ et le courant final.

**3.** Résous et calcule $i(0{,}05)$.

## Exercice 15 – Condition donnée ailleurs qu'en 0

Résous $y' = -0{,}5y$ sachant que $y(2) = 30$.

**1.** Détermine la constante $C$.

**2.** Donne la solution et calcule $y(0)$.

**3.** Calcule $y(6)$.

## Exercice 16 – Type bac : circuit RC complet

Un circuit RC série est alimenté par $E = 15$ V, avec $R = 4{,}7\ \text{k}\Omega$ et $C = 22\ \mu\text{F}$. Le condensateur est initialement déchargé. La tension vérifie $RC\,u' + u = E$.

**1.** Calcule $\tau$ et résous l'équation.

**2.** Calcule $u$ après 0,1 s et après 0,3 s.

**3.** Détermine l'instant où $u = 10$ V.

**4.** Au bout de combien de temps la charge est-elle « terminée » (à 1% près) ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

## Exercice 17 – Type bac : refroidissement et Euler

Un four coupé refroidit selon $T' = -0{,}03(T - 25)$ ($t$ en minutes), avec $T(0) = 205$ °C.

**1.** Résous exactement l'équation.

**2.** Calcule $T(30)$ exactement.

**3.** Applique la méthode d'Euler avec $h = 10$ min pour estimer $T(30)$.

**4.** Compare et commente.

## Exercice 18 – Type bac : remplissage d'un réservoir

Un réservoir reçoit un débit constant de 30 L/min et fuit proportionnellement à son volume, à raison de 0,05 par minute. Le volume vérifie $V' = 30 - 0{,}05V$, avec $V(0) = 100$ L.

**1.** Détermine le volume d'équilibre.

**2.** Résous l'équation.

**3.** Calcule $V(20)$ et $V(60)$.

**4.** Au bout de combien de temps le réservoir contient-il 500 L ?

## Exercice 19 – Type bac : identifier les paramètres

Un capteur mesure une grandeur qui suit une loi $y(t) = Ce^{at} + d$. Trois mesures sont disponibles : $y(0) = 90$, la limite à long terme est 30, et $y(10) = 54$ ($t$ en secondes).

**1.** Détermine $d$.

**2.** Détermine $C$.

**3.** Détermine $a$ et la constante de temps.

**4.** Écris l'équation différentielle vérifiée par $y$.

## Exercice 20 – Type bac : deux régimes successifs

Un condensateur ($\tau = 0{,}2$ s) est d'abord chargé sous $E = 10$ V pendant 0,4 s, puis le générateur est remplacé par un court-circuit et le condensateur se décharge.

**1.** Donne $u(t)$ sur la phase de charge et calcule $u(0{,}4)$.

**2.** Écris l'équation de la phase de décharge et sa solution, en prenant $t' = t - 0{,}4$.

**3.** Calcule la tension 0,2 s après le début de la décharge.

**4.** Au bout de combien de temps, après le début de la décharge, la tension descend-elle sous 0,5 V ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).