Fonction exponentielle — Terminale STI2D

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

Parmi toutes les fonctions exponentielles a^x, une seule a la propriété d'être égale à sa propre dérivée : celle de base $e \approx 2{,}718$. C'est ce qui la rend incontournable en physique, où les lois d'évolution s'écrivent presque toujours $e^{-t/\tau}$ — décharge d'un condensateur, refroidissement d'une pièce, amortissement d'une vibration. Ces 20 exercices corrigés installent les propriétés algébriques, la dérivée de e^{kx}, les limites en $\pm\infty$ et les croissances comparées, puis les mettent au service des modèles RC et thermiques du bac. Le logarithme népérien, qui permettra de résoudre $e^x = b$, arrive au chapitre suivant : ici, les seuils sont obtenus par identification d'exposants ou par balayage. La difficulté est croissante : l'énoncé puis la correction détaillée s'affichent d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-sti2d/fonction-exponentielle

Exercice 1 – Premières valeurs

On rappelle que $e \approx 2{,}718$.

1. Donne les valeurs exactes de e^0 et e^1.

2. Calcule e^2, e^{-1} et e^{-2}, arrondis à 10^{-4}.

3. Que peut-on dire du signe de e^x ?

Exercice 2 – Propriétés algébriques

Simplifie $A = e^3 \times e^5$, $B = \dfrac{e^7}{e^4}$, $C = \left(e^2\right)^3$ et $D = e^x \times e^{-x}$.

1. Donne la forme la plus simple de chacune.

Exercice 3 – Dérivée de l'exponentielle

Dérive $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{3x}$, $h(x) = 5e^{-2x}$ et $k(x) = e^x + 4x$.

1. Donne les quatre dérivées.

Exercice 4 – Équations avec l'exponentielle

Résous dans $\mathbb{R}$ les équations $e^x = e^4$, $e^{2x} = e^{x+3}$, $e^x = 0$ et $e^{x+1} = 1$.

1. Résous les quatre équations.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

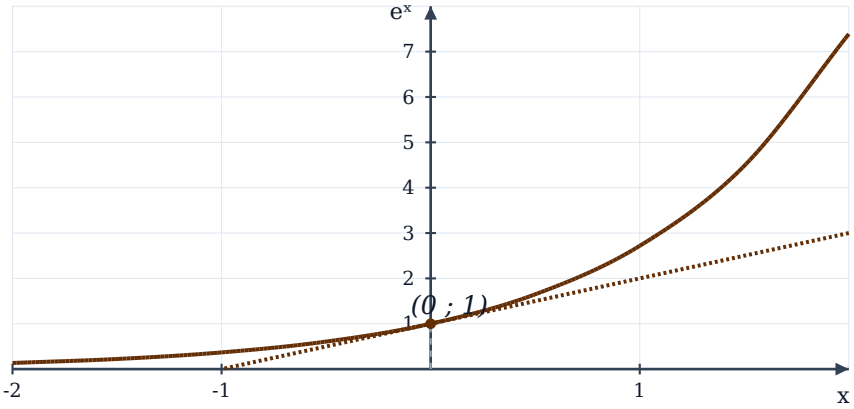
Exercice 5 – Variations et courbe

On étudie $f(x) = e^x$ sur $\mathbb{R}$.

1. Donne le sens de variation de f et justifie.

2. Donne l'équation de la tangente au point d'abscisse 0.

3. Compare e^x et $x + 1$ pour $x = 0{,}5$ et $x = -0{,}5$.



Exercice 6 – Dériver des expressions avec exponentielle

Dérive $f(x) = 12e^{-0{,}25x}$, $g(x) = e^{2x+1}$ et $h(x) = x\,e^x$.

1. Donne les trois dérivées.

Exercice 7 – Tangente à une courbe exponentielle

Soit $f(x) = e^{2x}$.

1. Détermine l'équation de la tangente au point d'abscisse 0.

2. Détermine celle au point d'abscisse 1, avec une valeur approchée des coefficients.

Exercice 8 – Équations et inéquations

Résous $e^{3x-1} = e^{x+5}$, puis l'inéquation $e^{2x} > e^6$, et enfin $e^{x^2} = e^{4x}$.

1. Résous les trois.

Exercice 9 – Limites de l'exponentielle

On s'intéresse au comportement de e^x et de e^{-x} aux bornes de $\mathbb{R}$.

1. Calcule e^5, e^{10} et e^{20} (ordres de grandeur). Que se passe-t-il quand $x \to +\infty$?

2. Calcule e^{-5}, e^{-10}. Que se passe-t-il quand $x \to -\infty$?

3. Donne les limites de e^{-x} en $+\infty$ et en $-\infty$.

Exercice 10 – Signe d'une dérivée factorisée

Soit $f(x) = (x - 3)e^x$ sur $\mathbb{R}$.

1. Calcule $f'(x)$ et factorise par e^x.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

2. Dresse le tableau de variations de f.

Exercice 11 – Décharge d'un condensateur

La tension aux bornes d'un condensateur qui se décharge suit $u(t) = 12e^{-t/0{,}02}$ volts, t en secondes. La constante de temps est $\tau = 0{,}02$ s.

1. Calcule $u(0)$, $u(\tau)$ et $u(3\tau)$.

2. Calcule $u'(t)$ et $u'(0)$.

3. Au bout de combien de constantes de temps la tension descend-elle sous 1% de sa valeur initiale ?

Exercice 12 – Croissances comparées

On compare la croissance de e^x et celle de x, puis de x^2.

1. Calcule $\dfrac{e^x}{x}$ pour $x = 5$, 10 et 20.

2. Calcule $\dfrac{e^x}{x^2}$ pour les mêmes valeurs.

3. Que peut-on conclure ?

Exercice 13 – Étude d'une fonction produit

Soit $f(x) = x\,e^{-x}$ sur $[0\,;+\infty[$.

1. Calcule $f'(x)$ et factorise.

2. Dresse le tableau de variations et donne le maximum.

3. Donne la limite de f en $+\infty$.

Exercice 14 – Charge d'un condensateur

La tension de charge d'un condensateur suit $u(t) = 24\left(1 - e^{-t/0{,}05}\right)$ volts, t en secondes.

1. Calcule $u(0)$, $u(0{,}05)$ et $u(0{,}15)$.

2. Quelle est la limite de u quand t devient grand ?

3. Calcule $u'(t)$ et $u'(0)$.

Exercice 15 – Étude de $e^x - x$

Soit $f(x) = e^x - x$ sur $\mathbb{R}$.

1. Calcule $f'(x)$ et détermine son signe.

2. Dresse le tableau de variations et donne le minimum.

3. Que peut-on en déduire sur la position relative des courbes de e^x et de x ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 16 – Type bac : refroidissement d'une pièce

Une pièce sortie du four à 220 °C refroidit dans un atelier à 20 °C. Sa température suit $T(t) = 20 + 200e^{-0{,}08t}$ (t en minutes).

1. Vérifie la cohérence du modèle en $t = 0$ et sa limite en $+\infty$.

2. Calcule $T(10)$ et $T(30)$.

3. Calcule $T'(t)$ et la vitesse de refroidissement initiale.

4. À quel instant la pièce passe-t-elle sous 60 °C ? (par balayage)

Exercice 17 – Type bac : étude complète d'une fonction

Soit $f(x) = (2 - x)e^x$ sur $[-1\,;3]$.

1. Calcule $f'(x)$ et factorise par e^x.

2. Dresse le tableau de variations sur $[-1\,;3]$.

3. Détermine les extremums, en valeurs approchées.

4. Donne l'équation de la tangente au point d'abscisse 0.

Exercice 18 – Type bac : amortissement d'une vibration

L'amplitude des vibrations d'un support, en millimètres, suit $A(t) = 6e^{-0{,}5t}$ (t en secondes). Le seuil acceptable est 0,5 mm.

1. Calcule $A(0)$, $A(2)$ et $A(6)$.

2. Calcule le temps nécessaire pour que l'amplitude soit divisée par deux.

3. Détermine par balayage l'instant où l'amplitude passe sous le seuil.

4. Calcule $A'(2)$ et interprète.

Exercice 19 – Type bac : croissances comparées et seuil

Le coût cumulé de maintenance d'un équipement, en milliers d'euros, est modélisé par $C(t) = 0{,}5t^2$, tandis que sa valeur résiduelle vaut $V(t) = 40e^{-0{,}15t}$ (t en années).

1. Calcule $C(5)$, $V(5)$, puis $C(10)$ et $V(10)$.

2. Détermine par balayage l'année où le coût cumulé dépasse la valeur résiduelle.

3. Que peut-on dire du comportement à long terme des deux modèles ?

4. Quelle décision de gestion cela suggère-t-il ?

Exercice 20 – Type bac : base e ou base a ?

Une production décroît de 12% par an. On peut la modéliser par $f(t) = 500 \times 0{,}88^t$ (base a) ou par $g(t) = 500e^{-kt}$ (base e).

1. Calcule $f(1)$, $f(3)$ et $f(5)$.

2. Détermine k par balayage pour que $g(1) = f(1)$.

3. Vérifie que les deux modèles coïncident aussi en $t = 3$ et $t = 5$.

4. Pourquoi la physique préfère-t-elle la base e ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Premières valeurs

$e^0 = 1$: toute exponentielle vaut 1 en 0.

$e^1 = e \approx 2{,}718\,3$.

$e^2 \approx 7{,}389\,1$.

$e^{-1} = \dfrac{1}{e} \approx 0{,}367\,9$.

$e^{-2} = \dfrac{1}{e^2} \approx 0{,}135\,3$.

Signe : e^x est STRICTEMENT POSITIF pour tout réel x. La fonction ne s'annule jamais et ne change jamais de signe.

Conséquence pratique très utile : dans une expression comme $f'(x) = (2x-6)e^x$, le signe de f' est celui de $(2x-6)$ seul, puisque $e^x > 0$.

Réponse. $e^0 = 1$ et $e^1 = e \approx 2{,}718 \cdot e^2 \approx 7{,}389\,1$, $e^{-1} \approx 0{,}367\,9$, $e^{-2} \approx 0{,}135\,3 \cdot e^x > 0$ toujours.

Rappel de cours. $e^0 = 1 \cdot e^{-x} = \dfrac{1}{e^x} \cdot$ et $e^x > 0$ pour tout x : c'est l'argument qui simplifie tous les tableaux de signes.

Erreur fréquente. Écrire $e^{-2} = -e^2$: un exposant négatif donne un INVERSE, pas un opposé. e^{-2} est positif.

Correction de l'exercice 2 – Propriétés algébriques

Produit : les exposants s'AJOUTENT. $A = e^{3+5} = e^8$.

Quotient : les exposants se RETRANCHENT. $B = e^{7-4} = e^3$.

Puissance d'une puissance : les exposants se MULTIPLIENT. $C = e^{2\times 3} = e^6$.

$D = e^{x+(-x)} = e^0 = 1$.

Le dernier résultat est fondamental : e^x et e^{-x} sont INVERSES l'un de l'autre.

Contrôle numérique : $e^3 \times e^5 \approx 20{,}09 \times 148{,}41 \approx 2\,981$, et $e^8 \approx 2\,981$ ✔.

Réponse. $A = e^8 \cdot B = e^3 \cdot C = e^6 \cdot D = 1$.

Rappel de cours. $e^a e^b = e^{a+b} \cdot \dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b} \cdot (e^a)^n = e^{an} \cdot e^{-a} = \dfrac{1}{e^a}$.

Erreur fréquente. Écrire $e^3 \times e^5 = e^{15}$: dans un produit, les exposants s'additionnent, ils ne se multiplient pas.

Correction de l'exercice 3 – Dérivée de l'exponentielle

$f'(x) = e^x$: la fonction exponentielle est égale à sa propre dérivée. C'est sa propriété caractéristique.

$g(x) = e^{3x}$: c'est une composée e^{ax}, dont la dérivée est $a\,e^{ax}$. Donc $g'(x) = 3e^{3x}$.

$h(x) = 5e^{-2x}$: $h'(x) = 5 \times (-2)e^{-2x} = -10e^{-2x}$.

$k'(x) = e^x + 4$.

Le facteur a est l'élément le plus oublié : la dérivée de e^{3x} n'est PAS e^{3x}.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Contrôle par les signes : h' est toujours négative (car $e^{-2x} > 0$), donc h est décroissante — ce qui est cohérent avec un modèle de décharge.

Réponse. $f'(x) = e^x \cdot g'(x) = 3e^{3x} \cdot h'(x) = -10e^{-2x} \cdot k'(x) = e^x + 4$.

Rappel de cours. $\left(e^{ax+b}\right)' = a\,e^{ax+b}$: on multiplie par le coefficient de x, l'exponentielle reste inchangée.

Erreur fréquente. Dériver e^{-2x} en e^{-2x} : il manque le facteur -2, qui donne le signe de la variation.

Correction de l'exercice 4 – Équations avec l'exponentielle

Propriété : $e^u = e^v \Leftrightarrow u = v$ (la fonction exponentielle est strictement croissante, donc injective).

$e^x = e^4$ donne $x = 4$.

$e^{2x} = e^{x+3}$ donne $2x = x + 3$, soit $x = 3$.

$e^x = 0$: AUCUNE solution, puisque e^x est toujours strictement positif.

$e^{x+1} = 1$: comme $1 = e^0$, l'équation devient $e^{x+1} = e^0$, donc $x + 1 = 0$ et $x = -1$.

Contrôle : $e^{-1+1} = e^0 = 1$ ✔.

Remarque : pour résoudre $e^x = 5$, où 5 n'est pas une puissance évidente de e, il faudra le logarithme népérien — c'est l'objet du chapitre suivant.

Réponse. $x = 4 \cdot x = 3 \cdot$ aucune solution pour $e^x = 0 \cdot x = -1$.

Rappel de cours. $e^u = e^v \Leftrightarrow u = v \cdot$ et $e^x = k$ n'a de solution que si $k > 0$.

Erreur fréquente. Répondre $x = 0$ à l'équation $e^x = 0$: $e^0 = 1$, pas 0. L'exponentielle ne s'annule jamais.

Correction de l'exercice 5 – Variations et courbe

$f'(x) = e^x > 0$ pour tout x : la fonction est donc STRICTEMENT CROISSANTE sur $\mathbb{R}$.

Tangente en 0 : $f(0) = 1$ et $f'(0) = e^0 = 1$.

T : $y = 1 \times (x - 0) + 1 = x + 1$.

Comparaison en $x = 0{,}5$: $e^{0{,}5} \approx 1{,}648\,7$ contre $x + 1 = 1{,}5$. L'exponentielle est au-dessus.

En $x = -0{,}5$: $e^{-0{,}5} \approx 0{,}606\,5$ contre $0{,}5$. L'exponentielle est encore au-dessus.

Propriété générale : $e^x \geq x + 1$ pour tout réel x, avec égalité seulement en $x = 0$. La courbe est donc toujours au-dessus de sa tangente en 0.

Cette inégalité sert souvent de point de départ pour comparer l'exponentielle à une fonction affine.

Réponse. $f' = e^x > 0$: strictement croissante · tangente en 0 : $y = x + 1 \cdot$ et $e^x \geq x + 1$ partout (égalité en 0 seulement).

Rappel de cours. $e^x \geq x + 1$: la courbe de l'exponentielle est toujours au-dessus de sa tangente au point $(0\,;1)$.

Correction de l'exercice 6 – Dériver des expressions avec exponentielle

$f'(x) = 12 \times (-0{,}25)e^{-0{,}25x} = -3e^{-0{,}25x}$.

$g'(x) = 2e^{2x+1}$: le coefficient de x dans l'exposant est 2.

Pour h, c'est un PRODUIT : $u = x$ donc $u' = 1$; $v = e^x$ donc $v' = e^x$.

$h'(x) = 1 \times e^x + x\,e^x = (1 + x)e^x$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

On factorise systématiquement par l'exponentielle : cela rend l'étude du signe immédiate, puisque $e^x > 0$.

Ici le signe de h' est celui de $(1 + x)$: h est décroissante sur $]-\infty ; -1]$ puis croissante, avec un minimum en $x = -1$.

Réponse. $f'(x) = -3e^{-0{,}25x} \cdot g'(x) = 2e^{2x+1} \cdot h'(x) = (1 + x)e^x$.

Rappel de cours. Après dérivation, on FACTORISE toujours par l'exponentielle : son signe étant connu, seul le facteur restant compte.

Erreur fréquente. Dériver $x\,e^x$ en e^x : c'est un produit, il faut deux termes $(u'v + uv')$.

Correction de l'exercice 7 – Tangente à une courbe exponentielle

$f(0) = e^0 = 1$ et $f'(x) = 2e^{2x}$, donc $f'(0) = 2$.

Tangente en 0 : $y = 2(x - 0) + 1 = 2x + 1$.

En $x = 1$: $f(1) = e^2 \approx 7{,}389$ et $f'(1) = 2e^2 \approx 14{,}778$.

Tangente : $y = 14{,}778(x - 1) + 7{,}389 = 14{,}778x - 14{,}778 + 7{,}389$.

Soit $y \approx 14{,}778x - 7{,}389$.

Observation : la pente passe de 2 en $x = 0$ à 14,8 en $x = 1$. C'est le propre de l'exponentielle : sa pente croît aussi vite que la fonction elle-même.

Contrôle : la tangente en 1 coupe l'axe des abscisses en $x = \dfrac{7{,}389}{14{,}778} = 0{,}5$ exactement. En effet, la tangente à e^{2x} en $x = a$ coupe toujours l'axe en $a - \frac{1}{2}$.

Réponse. Tangente en 0 : $y = 2x + 1$ · tangente en 1 : $y \approx 14{,}778x - 7{,}389$.

Rappel de cours. $y = f'(a)(x - a) + f(a)$, avec $f'(x) = 2e^{2x}$ pour $f(x) = e^{2x}$.

Erreur fréquente. Utiliser $f'(1) = e^2$ sans le facteur 2 : la pente serait deux fois trop faible.

Correction de l'exercice 8 – Équations et inéquations

$e^{3x-1} = e^{x+5}$ donne $3x - 1 = x + 5$, soit $2x = 6$ et $x = 3$.

Pour l'inéquation, la fonction exponentielle étant CROISSANTE, on peut comparer directement les exposants : $e^{2x} > e^6 \Leftrightarrow 2x > 6 \Leftrightarrow x > 3$.

Le sens de l'inégalité est CONSERVÉ, précisément parce que l'exponentielle est croissante.

Troisième équation : $e^{x^2} = e^{4x}$ donne $x^2 = 4x$, soit $x^2 - 4x = 0$ et $x(x - 4) = 0$.

Les solutions sont $x = 0$ et $x = 4$.

Contrôle : pour $x = 4$, $e^{16} = e^{16}$ ✔ ; pour $x = 0$, $e^0 = e^0 = 1$ ✔.

Méthode générale : toute équation ou inéquation entre deux exponentielles se ramène à l'exposant. Tout le travail se fait ensuite sur les exposants, avec les techniques habituelles.

Réponse. $x = 3$ · $x > 3$ · $x = 0$ ou $x = 4$.

Rappel de cours. $e^u \geq e^v \Leftrightarrow u \geq v$: le sens est conservé, l'exponentielle étant croissante.

Erreur fréquente. Diviser par x dans $x^2 = 4x$: on perdrait la solution $x = 0$.

Correction de l'exercice 9 – Limites de l'exponentielle

$e^5 \approx 148{,}4$; $e^{10} \approx 22\,026$; $e^{20} \approx 4{,}85 \times 10^8$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Les valeurs croissent sans limite : $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

$e^{-5} \approx 0{,}006\,7$; $e^{-10} \approx 4{,}54 \times 10^{-5}$.

Les valeurs se rapprochent de 0 sans l'atteindre : $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$.

L'axe des abscisses est donc une ASYMPTOTE HORIZONTALE de la courbe en $-\infty$.

Pour e^{-x}, tout s'inverse : $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$.

C'est e^{-x} qui modélise les décroissances physiques : décharge, refroidissement, amortissement. La grandeur tend vers 0 sans jamais l'atteindre.

Réponse. $e^x \to +\infty$ en $+\infty$ et $\to 0$ en $-\infty$ (asymptote horizontale) · e^{-x} fait l'inverse : $\to 0$ en $+\infty$, $\to +\infty$ en $-\infty$.

Rappel de cours. $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ · $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$. L'exponentielle « écrase » vers 0 à gauche et « explose » à droite.

Erreur fréquente. Écrire $\lim_{x \to -\infty} e^x = -\infty$: l'exponentielle reste POSITIVE, elle tend vers 0.

Correction de l'exercice 10 – Signe d'une dérivée factorisée

Dérivée d'un produit avec $u = x - 3$ ($u' = 1$) et $v = e^x$ ($v' = e^x$).

$f'(x) = 1 \times e^x + (x-3)e^x = e^x(1 + x - 3) = (x-2)e^x$.

Signe : $e^x > 0$ pour tout x, donc le signe de f' est celui de $(x-2)$.

$f'(x) < 0$ pour $x < 2$ et $f'(x) > 0$ pour $x > 2$.

f est donc DÉCROISSANTE sur $]-\infty\,;2]$ puis CROISSANTE sur $[2\,;+\infty[$.

Minimum : $f(2) = (2-3)e^2 = -e^2 \approx -7{,}389$.

Contrôle : $f(0) = -3$ et $f(3) = 0$, deux valeurs supérieures à $-7{,}39$ ✔.

Réponse. $f'(x) = (x-2)e^x$ · décroissante puis croissante · minimum $f(2) = -e^2 \approx -7{,}39$.

Rappel de cours. Toute dérivée du type $P(x)e^x$ a le signe du POLYNÔME $P(x)$, puisque l'exponentielle est positive.

Erreur fréquente. Étudier le signe de e^x : il est toujours positif, cela ne change jamais rien au tableau de signes.

Correction de l'exercice 11 – Décharge d'un condensateur

$u(0) = 12e^0 = 12$ V.

$u(\tau) = u(0{,}02) = 12e^{-1} \approx 12 \times 0{,}367\,9 \approx 4{,}41$ V, soit 36,8% de la valeur initiale.

$u(3\tau) = 12e^{-3} \approx 12 \times 0{,}049\,8 \approx 0{,}60$ V, soit 5% environ.

Dérivée : $u'(t) = 12 \times \left(-\dfrac{1}{0{,}02}\right) e^{-t/0{,}02} = -600e^{-t/0{,}02}$.

$u'(0) = -600$ V/s : la tension chute très vite au début.

Seuil de 1% : on cherche $e^{-t/\tau} \leq 0{,}01$, c'est-à-dire $e^{-n} \leq 0{,}01$ en posant $n = \frac{t}{\tau}$.

Balayage : $e^{-4} \approx 0{,}018\,3$ (insuffisant) ; $e^{-5} \approx 0{,}006\,7$ (suffisant).

Il faut donc entre 4 et 5 constantes de temps ; en affinant, $e^{-4{,}61} \approx 0{,}009\,95$, donc environ $4{,}6\,\tau$, soit 0,092 s.

Repère à connaître : après 5τ, une décharge est considérée comme terminée (il reste moins de 1%). C'est la règle du technicien.

Réponse. $u(0) = 12$ V, $u(\tau) \approx 4{,}41$ V (36,8%), $u(3\tau) \approx 0{,}60$ V (5%) · $u'(t) = -600e^{-t/0{,}02}$ et

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$u'(0) = -600$ V/s · moins de 1% après environ $4{,}6\,\tau$ (soit 0,092 s).

Rappel de cours. $e^{-1} \approx 0{,}368$: après une constante de temps, il reste 36,8% · après 3τ, 5% · après 5τ, moins de 1%.

Erreur fréquente. Oublier le facteur $\frac{1}{\tau} = 50$ dans la dérivée : on annoncerait -12 V/s au lieu de -600 V/s.

Correction de l'exercice 12 – Croissances comparées

$x = 5$: $\dfrac{e^5}{5} \approx \dfrac{148{,}4}{5} \approx 29{,}7$.

$x = 10$: $\dfrac{22\,026}{10} \approx 2\,203$.

$x = 20$: $\dfrac{4{,}85 \times 10^8}{20} \approx 2{,}43 \times 10^7$.

Le quotient explose : $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

Avec x^2 : $x = 5$ donne $\dfrac{148{,}4}{25} \approx 5{,}94$; $x = 10$ donne $\dfrac{22\,026}{100} \approx 220$; $x = 20$ donne $\dfrac{4{,}85 \times 10^8}{400} \approx 1{,}21 \times 10^6$.

Là encore le quotient tend vers $+\infty$.

Conclusion : l'exponentielle croît PLUS VITE que n'importe quelle puissance de x. C'est le théorème des croissances comparées.

Réciproquement, $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} x\,e^{-x} = 0$: c'est la même propriété, écrite autrement.

Ordre de grandeur frappant : en $x = 20$, e^x est 24 millions de fois plus grand que x, et 1 million de fois plus grand que x^2.

Réponse. $\frac{e^x}{x}$: 29,7 ; 2 203 ; $2{,}43 \times 10^7$ · $\frac{e^x}{x^2}$: 5,94 ; 220 ; $1{,}21 \times 10^6$ · dans les deux cas la limite est $+\infty$: l'exponentielle l'emporte sur toute puissance.

Rappel de cours. Croissances comparées : $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} x^n e^{-x} = 0$.

Erreur fréquente. Croire que x^2 rattrape e^x parce qu'il est plus grand au départ : $x^2 > e^x$ sur une partie de l'intervalle, mais l'exponentielle finit toujours par dominer.

Correction de l'exercice 13 – Étude d'une fonction produit

Produit avec $u = x$ ($u' = 1$) et $v = e^{-x}$ ($v' = -e^{-x}$).

$f'(x) = e^{-x} + x \times (-e^{-x}) = e^{-x}(1 - x)$.

Signe : $e^{-x} > 0$, donc le signe de f' est celui de $(1 - x)$.

$f'(x) > 0$ pour $x < 1$ et $f'(x) < 0$ pour $x > 1$: f croît puis décroît.

Maximum : $f(1) = 1 \times e^{-1} = \dfrac{1}{e} \approx 0{,}368$, atteint en $x = 1$.

Limite en $+\infty$: par croissances comparées, $\lim_{x \to +\infty} x\,e^{-x} = 0$.

La courbe monte donc jusqu'à $(1\,;0{,}368)$ puis redescend vers 0 sans l'atteindre : l'axe des abscisses est asymptote.

Contrôle : $f(5) = 5e^{-5} \approx 0{,}034$ et $f(10) = 10e^{-10} \approx 0{,}000\,45$ ✔ la décroissance vers 0 est nette.

Cette allure — montée rapide, maximum, décroissance lente vers zéro — est celle de

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

nombreux phénomènes transitoires en électronique.

Réponse. $f'(x) = (1-x)e^{-x}$ · croissante sur $[0\,;1]$ puis décroissante · maximum $f(1) = \frac{1}{e} \approx 0{,}368$ · limite 0 en $+\infty$.

Rappel de cours. Dérivée d'un produit, puis factorisation par l'exponentielle : le signe se lit sur le facteur polynomial.

Erreur fréquente. Conclure que f croît indéfiniment parce que x croît : le facteur e^{-x} décroît plus vite, et l'emporte après $x = 1$.

Correction de l'exercice 14 – Charge d'un condensateur

$u(0) = 24(1 - e^{0}) = 24(1-1) = 0$ V : le condensateur part déchargé ✔.

$u(0{,}05) = 24\left(1 - e^{-1}\right) \approx 24 \times (1 - 0{,}367\,9) \approx 24 \times 0{,}632\,1 \approx 15{,}17$ V.

Soit 63,2% de la tension finale après une constante de temps — le repère classique de la charge.

$u(0{,}15) = 24\left(1 - e^{-3}\right) \approx 24 \times 0{,}950\,2 \approx 22{,}80$ V, soit 95%.

Limite : $e^{-t/0{,}05}$ tend vers 0, donc $u(t)$ tend vers 24 V. La tension de charge tend vers la tension du générateur, sans l'atteindre.

Dérivée : $u'(t) = 24 \times \left(0 - \left(-\frac{1}{0{,}05}\right)e^{-t/0{,}05}\right) = \frac{24}{0{,}05}e^{-t/0{,}05} = 480e^{-t/0{,}05}$.

$u'(0) = 480$ V/s : la charge démarre à 480 volts par seconde, puis ralentit.

Symétrie avec la décharge : $u_{\text{charge}}(t) + u_{\text{décharge}}(t) = 24$ si les deux partent du même τ. Les deux courbes sont symétriques par rapport à la droite $y = 12$.

Réponse. $u(0) = 0$, $u(\tau) \approx 15{,}17$ V (63,2%), $u(3\tau) \approx 22{,}80$ V (95%) · limite 24 V · $u'(t) = 480e^{-t/0{,}05}$ et $u'(0) = 480$ V/s.

Rappel de cours. Charge : $u = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$, avec 63,2% à τ et 95% à 3τ · décharge : $u = E\,e^{-t/\tau}$.

Erreur fréquente. Dériver $1 - e^{-t/\tau}$ en $-\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}$: le double signe moins donne une dérivée POSITIVE, cohérente avec une tension qui monte.

Correction de l'exercice 15 – Étude de $e^x - x$

$f'(x) = e^{x} - 1$.

Signe : $e^{x} - 1 > 0$ équivaut à $e^{x} > 1 = e^{0}$, c'est-à-dire $x > 0$ (l'exponentielle étant croissante).

Donc $f'(x) < 0$ pour $x < 0$ et $f'(x) > 0$ pour $x > 0$.

f est DÉCROISSANTE sur $]-\infty\,;0]$ puis CROISSANTE sur $[0\,;+\infty[$.

Minimum : $f(0) = e^{0} - 0 = 1$.

Conclusion : $f(x) \geq 1$ pour tout réel x, c'est-à-dire $e^{x} - x \geq 1$, soit $e^{x} \geq x + 1$.

Position relative : la courbe de l'exponentielle est donc TOUJOURS au-dessus de la droite $y = x + 1$, avec un unique point de contact en $x = 0$.

Or $y = x + 1$ est précisément la tangente à la courbe de e^{x} au point $(0\,;1)$: la courbe est au-dessus de sa tangente.

Conséquence utile : $e^{x} > x$ pour tout réel x. L'exponentielle ne croise jamais la première bissectrice, contrairement à ce qu'un tracé grossier pourrait laisser croire.

Contrôle : $f(-2) = e^{-2} + 2 \approx 2{,}135$ et $f(1) = e - 1 \approx 1{,}718$, tous deux supérieurs à 1 ✔.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $f'(x) = e^x - 1$, négative avant 0, positive après · minimum $f(0) = 1$ · donc $e^x \geq x + 1$: la courbe de e^x est toujours au-dessus de sa tangente en $(0\,;1)$.

Rappel de cours. $e^x \geq x + 1$ pour tout réel x, avec égalité seulement en $x = 0$.

Erreur fréquente. Résoudre $e^x - 1 > 0$ en écrivant $x > 1$: il faut comparer e^x à e^0, donc x à 0.

Correction de l'exercice 16 – Type bac : refroidissement d'une pièce

$T(0) = 20 + 200e^0 = 220$ °C ✔ conforme à la sortie du four.

Limite : $e^{-0{,}08t} \to 0$, donc $T(t) \to 20$ °C — la température de l'atelier ✔. Le modèle est physiquement cohérent.

$T(10) = 20 + 200e^{-0{,}8}$. Or $e^{-0{,}8} \approx 0{,}449\,3$, donc $T(10) \approx 20 + 89{,}9 = 109{,}9$ °C.

$T(30) = 20 + 200e^{-2{,}4}$. Or $e^{-2{,}4} \approx 0{,}090\,7$, donc $T(30) \approx 20 + 18{,}1 = 38{,}1$ °C.

Dérivée : $T'(t) = 200 \times (-0{,}08)e^{-0{,}08t} = -16e^{-0{,}08t}$.

$T'(0) = -16$ °C/min : la pièce perd 16 degrés par minute au tout début.

Seuil de 60 °C : il faut $200e^{-0{,}08t} \leq 40$, soit $e^{-0{,}08t} \leq 0{,}2$.

Balayage : $e^{-1{,}6} \approx 0{,}201\,9$ (pour $t = 20$, juste insuffisant) ; $e^{-1{,}68} \approx 0{,}186\,4$ (pour $t = 21$, suffisant).

La pièce passe donc sous 60 °C entre 20 et 21 minutes, plus précisément vers $t \approx 20{,}1$ min.

Contrôle : $T(20) = 20 + 200 \times 0{,}201\,9 \approx 60{,}4$ °C et $T(21) \approx 57{,}3$ °C ✔.

Remarque : le chapitre suivant (logarithme népérien) permettra d'obtenir directement $t = \frac{\ln 5}{0{,}08} \approx 20{,}1$ min, sans balayage.

Réponse. $T(0) = 220$ °C et $T \to 20$ °C ✔ · $T(10) \approx 109{,}9$ °C, $T(30) \approx 38{,}1$ °C · $T'(t) = -16e^{-0{,}08t}$, soit -16 °C/min au départ · sous 60 °C vers $t \approx 20{,}1$ min.

Rappel de cours. Loi de refroidissement : $T(t) = T_{\text{amb}} + (T_0 - T_{\text{amb}})e^{-kt}$. C'est l'ÉCART qui décroît exponentiellement.

Erreur fréquente. Modéliser $T(t) = 220e^{-0{,}08t}$: la pièce tendrait vers 0 °C, ce qui est impossible dans un atelier à 20 °C.

Correction de l'exercice 17 – Type bac : étude complète d'une fonction

Produit avec $u = 2 - x$ ($u' = -1$) et $v = e^x$ ($v' = e^x$).

$f'(x) = -e^x + (2 - x)e^x = e^x(-1 + 2 - x) = (1 - x)e^x$.

Signe : $e^x > 0$, donc le signe de f' est celui de $(1 - x)$.

$f'(x) > 0$ sur $[-1\,;1[$ et $f'(x) < 0$ sur $]1\,;3]$: f croît puis décroît.

Maximum en $x = 1$: $f(1) = (2 - 1)e^1 = e \approx 2{,}718$.

Valeurs aux bornes : $f(-1) = (2 + 1)e^{-1} = 3e^{-1} \approx 1{,}104$ et $f(3) = (2 - 3)e^3 = -e^3 \approx -20{,}086$.

Le minimum sur l'intervalle est donc $f(3) \approx -20{,}086$, atteint à la borne droite.

Tangente en 0 : $f(0) = 2e^0 = 2$ et $f'(0) = (1 - 0)e^0 = 1$.

$T : y = 1 \times (x - 0) + 2 = x + 2$.

Contrôle de cohérence : f s'annule en $x = 2$ (car $2 - x = 0$), valeur bien située entre le maximum en 1 et le minimum en 3 ✔.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $f'(x) = (1 - x)e^x$ · croissante sur $[-1\,;1]$, décroissante sur $[1\,;3]$ · maximum $f(1) = e \approx 2{,}72$, minimum $f(3) = -e^3 \approx -20{,}09$ · tangente en 0 : $y = x + 2$.

Rappel de cours. Sur un intervalle FERMÉ, les extremums se cherchent parmi les points où $f' = 0$ ET les bornes.

Erreur fréquente. Annoncer le minimum en $x = -1$: $f(-1) \approx 1{,}10$ est positif, alors que $f(3) \approx -20{,}09$ est bien plus petit.

Correction de l'exercice 18 – Type bac : amortissement d'une vibration

$A(0) = 6$ mm.

$A(2) = 6e^{-1} \approx 6 \times 0{,}367\,9 \approx 2{,}21$ mm.

$A(6) = 6e^{-3} \approx 6 \times 0{,}049\,8 \approx 0{,}30$ mm.

Division par deux : on cherche $e^{-0{,}5t} = 0{,}5$. Par balayage, $e^{-1{,}4} \approx 0{,}246\,6$ et $e^{-0{,}7} \approx 0{,}496\,6$.

Donc $0{,}5t \approx 0{,}693$, soit $t \approx 1{,}39$ s. (Le chapitre suivant donnera $t = \frac{\ln 2}{0{,}5}$ directement.)

Propriété : ce temps de demi-amplitude est CONSTANT — de 6 à 3 mm ou de 3 à 1,5 mm, il faut les mêmes 1,39 s.

Seuil de 0,5 mm : $6e^{-0{,}5t} \leq 0{,}5$, soit $e^{-0{,}5t} \leq 0{,}083\,3$.

Balayage : $e^{-2{,}4} \approx 0{,}090\,7$ (insuffisant) ; $e^{-2{,}5} \approx 0{,}082\,1$ (suffisant).

Donc $0{,}5t \approx 2{,}48$, soit $t \approx 4{,}97$ s. L'amplitude passe sous le seuil vers 5 secondes.

Dérivée : $A'(t) = -3e^{-0{,}5t}$, donc $A'(2) = -3e^{-1} \approx -1{,}10$ mm/s.

Interprétation : à $t = 2$ s, l'amplitude diminue d'environ 1,1 mm par seconde. Au départ, la décroissance était de $A'(0) = -3$ mm/s : l'amortissement ralentit à mesure que l'amplitude diminue.

Réponse. $A(0) = 6$ mm, $A(2) \approx 2{,}21$ mm, $A(6) \approx 0{,}30$ mm · demi-amplitude en $\approx 1{,}39$ s (constante) · seuil de 0,5 mm vers $t \approx 5$ s · $A'(2) \approx -1{,}10$ mm/s.

Rappel de cours. Dans un modèle A_0e^{-kt}, le temps de division par deux vaut $\frac{\ln 2}{k}$ et ne dépend pas de l'amplitude de départ.

Erreur fréquente. Croire que l'amplitude s'annule : $6e^{-0{,}5t}$ reste strictement positif. On ne peut que descendre sous un seuil.

Correction de l'exercice 19 – Type bac : croissances comparées et seuil

$C(5) = 0{,}5 \times 25 = 12{,}5$ k€ et $V(5) = 40e^{-0{,}75} \approx 40 \times 0{,}472\,4 \approx 18{,}9$ k€.

À 5 ans, la valeur résiduelle dépasse encore le coût cumulé.

$C(10) = 0{,}5 \times 100 = 50$ k€ et $V(10) = 40e^{-1{,}5} \approx 40 \times 0{,}223\,1 \approx 8{,}9$ k€.

À 10 ans, le rapport s'est inversé, et largement.

Balayage entre 5 et 10 ans : $t = 7$ donne $C = 24{,}5$ et $V = 40e^{-1{,}05} \approx 14{,}0$ — déjà inversé.

$t = 6$: $C = 18$ et $V = 40e^{-0{,}9} \approx 16{,}3$ — inversé aussi, de peu.

$t = 5{,}5$: $C = 15{,}1$ et $V = 40e^{-0{,}825} \approx 17{,}5$ — pas encore inversé.

Le croisement a donc lieu entre 5,5 et 6 ans, vers $t \approx 5{,}8$ ans.

Long terme : $C(t) = 0{,}5t^2$ croît sans limite, tandis que $V(t) = 40e^{-0{,}15t}$ tend vers 0. L'écart se creuse donc indéfiniment.

À 20 ans : $C = 200$ k€ contre $V \approx 2$ k€ — le coût cumulé vaut cent fois la valeur du bien.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Décision : il faut remplacer l'équipement autour de la 6e année, c'est-à-dire dès que le coût cumulé de maintenance dépasse ce que vaut encore la machine. Le conserver plus longtemps revient à entretenir un bien qui ne vaut plus rien.

Réponse. $C(5) = 12{,}5$ contre $V(5) \approx 18{,}9$; $C(10) = 50$ contre $V(10) \approx 8{,}9$ · croisement vers $t \approx 5{,}8$ ans · C croît sans limite, V tend vers 0 · remplacement conseillé vers la 6e année.

Rappel de cours. Une exponentielle DÉCROISSANTE tend vers 0 plus vite que n'importe quel polynôme ne croît : leur croisement est inévitable.

Erreur fréquente. Comparer les valeurs initiales ($C(0) = 0$ contre $V(0) = 40$) et en conclure que l'équipement reste rentable : l'écart s'inverse en moins de six ans.

Correction de l'exercice 20 – Type bac : base e ou base a ?

$f(1) = 500 \times 0{,}88 = 440$.

$f(3) = 500 \times 0{,}88^3 = 500 \times 0{,}681\,472 \approx 340{,}7$.

$f(5) = 500 \times 0{,}88^5 \approx 500 \times 0{,}527\,732 \approx 263{,}9$.

Pour $g(1) = 440$, il faut $e^{-k} = 0{,}88$.

Balayage : $e^{-0{,}12} \approx 0{,}886\,9$ (un peu trop grand) ; $e^{-0{,}13} \approx 0{,}878\,1$ (un peu trop petit).

En affinant : $e^{-0{,}1278} \approx 0{,}880\,0$. Donc $k \approx 0{,}1278$.

Vérification en $t = 3$: $g(3) = 500e^{-0{,}383\,4} \approx 500 \times 0{,}681\,5 \approx 340{,}7$ ✔ identique à $f(3)$.

En $t = 5$: $g(5) = 500e^{-0{,}639} \approx 500 \times 0{,}527\,7 \approx 263{,}9$ ✔.

Les deux modèles sont donc EXACTEMENT les mêmes, écrits différemment : $0{,}88^t = e^{-0{,}1278\,t}$.

Pourquoi la base e en physique ? Parce que sa dérivée est immédiate : $\left(e^{-kt}\right)' = -k\,e^{-kt}$, alors que dériver $0{,}88^t$ demanderait de passer par e de toute façon.

Et parce que le paramètre k a un sens physique direct : $\frac{1}{k}$ est la CONSTANTE DE TEMPS du phénomène, ici $\frac{1}{0{,}1278} \approx 7{,}8$ ans.

Conclusion : base a pour parler de taux d'évolution (−12% par an), base e pour dériver et pour raisonner en constante de temps.

Réponse. $f(1) = 440$, $f(3) \approx 340{,}7$, $f(5) \approx 263{,}9$ · $k \approx 0{,}1278$ et les deux modèles coïncident partout · la base e se dérive immédiatement et fait apparaître la constante de temps $\frac{1}{k} \approx 7{,}8$ ans.

Rappel de cours. $a^t = e^{kt}$ avec k tel que $e^k = a$: ce sont deux écritures du même modèle, et $\frac{1}{|k|}$ est la constante de temps.

Erreur fréquente. Prendre $k = 0{,}12$ parce que la baisse est de 12% : ce serait $e^{-0{,}12} \approx 0{,}887$, soit une baisse de 11,3% et non 12%.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).