Fonction exponentielle — Terminale STI2D

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés

Présentation

Parmi toutes les fonctions exponentielles a^x, une seule a la propriété d'être égale à sa propre dérivée : celle de base $e \approx 2{,}718$. C'est ce qui la rend incontournable en physique, où les lois d'évolution s'écrivent presque toujours $e^{-t/\tau}$ — décharge d'un condensateur, refroidissement d'une pièce, amortissement d'une vibration. Ces 20 exercices corrigés installent les propriétés algébriques, la dérivée de e^{kx}, les limites en $\pm\infty$ et les croissances comparées, puis les mettent au service des modèles RC et thermiques du bac. Le logarithme népérien, qui permettra de résoudre $e^x = b$, arrive au chapitre suivant : ici, les seuils sont obtenus par identification d'exposants ou par balayage. La difficulté est croissante : l'énoncé puis la correction détaillée s'affichent d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-sti2d/fonction-exponentielle

Exercice 1 – Premières valeurs

On rappelle que $e \approx 2{,}718$.

1. Donne les valeurs exactes de e^0 et e^1.

2. Calcule e^2, e^{-1} et e^{-2}, arrondis à 10^{-4}.

3. Que peut-on dire du signe de e^x ?

Exercice 2 – Propriétés algébriques

Simplifie $A = e^3 \times e^5$, $B = \dfrac{e^7}{e^4}$, $C = \left(e^2\right)^3$ et $D = e^x \times e^{-x}$.

1. Donne la forme la plus simple de chacune.

Exercice 3 – Dérivée de l'exponentielle

Dérive $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{3x}$, $h(x) = 5e^{-2x}$ et $k(x) = e^x + 4x$.

1. Donne les quatre dérivées.

Exercice 4 – Équations avec l'exponentielle

Résous dans $\mathbb{R}$ les équations $e^x = e^4$, $e^{2x} = e^{x+3}$, $e^x = 0$ et $e^{x+1} = 1$.

1. Résous les quatre équations.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

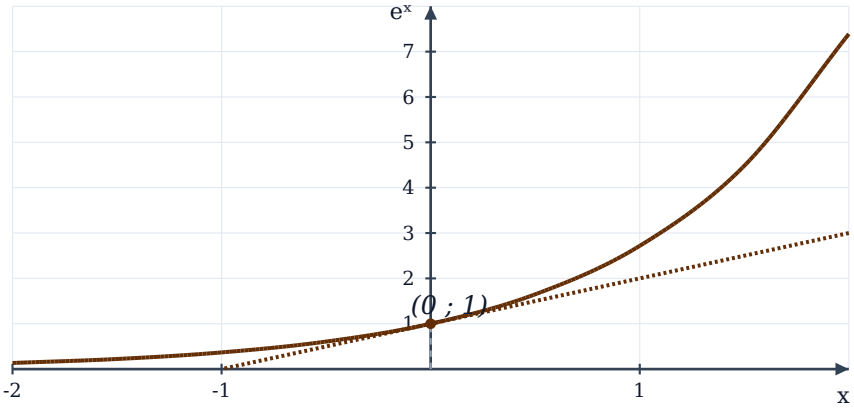
Exercice 5 – Variations et courbe

On étudie $f(x) = e^x$ sur $\mathbb{R}$.

1. Donne le sens de variation de f et justifie.

2. Donne l'équation de la tangente au point d'abscisse 0.

3. Compare e^x et $x + 1$ pour $x = 0{,}5$ et $x = -0{,}5$.



Exercice 6 – Dériver des expressions avec exponentielle

Dérive $f(x) = 12e^{-0{,}25x}$, $g(x) = e^{2x+1}$ et $h(x) = x\,e^x$.

1. Donne les trois dérivées.

Exercice 7 – Tangente à une courbe exponentielle

Soit $f(x) = e^{2x}$.

1. Détermine l'équation de la tangente au point d'abscisse 0.

2. Détermine celle au point d'abscisse 1, avec une valeur approchée des coefficients.

Exercice 8 – Équations et inéquations

Résous $e^{3x-1} = e^{x+5}$, puis l'inéquation $e^{2x} > e^6$, et enfin $e^{x^2} = e^{4x}$.

1. Résous les trois.

Exercice 9 – Limites de l'exponentielle

On s'intéresse au comportement de e^x et de e^{-x} aux bornes de $\mathbb{R}$.

1. Calcule e^5, e^{10} et e^{20} (ordres de grandeur). Que se passe-t-il quand $x \to +\infty$?

2. Calcule e^{-5}, e^{-10}. Que se passe-t-il quand $x \to -\infty$?

3. Donne les limites de e^{-x} en $+\infty$ et en $-\infty$.

Exercice 10 – Signe d'une dérivée factorisée

Soit $f(x) = (x - 3)e^x$ sur $\mathbb{R}$.

1. Calcule $f'(x)$ et factorise par e^x.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

2. Dresse le tableau de variations de f.

Exercice 11 – Décharge d'un condensateur

La tension aux bornes d'un condensateur qui se décharge suit $u(t) = 12e^{-t/0{,}02}$ volts, t en secondes. La constante de temps est $\tau = 0{,}02$ s.

1. Calcule $u(0)$, $u(\tau)$ et $u(3\tau)$.

2. Calcule $u'(t)$ et $u'(0)$.

3. Au bout de combien de constantes de temps la tension descend-elle sous 1% de sa valeur initiale ?

Exercice 12 – Croissances comparées

On compare la croissance de e^x et celle de x, puis de x^2.

1. Calcule $\dfrac{e^x}{x}$ pour $x = 5$, 10 et 20.

2. Calcule $\dfrac{e^x}{x^2}$ pour les mêmes valeurs.

3. Que peut-on conclure ?

Exercice 13 – Étude d'une fonction produit

Soit $f(x) = x\,e^{-x}$ sur $[0\,;+\infty[$.

1. Calcule $f'(x)$ et factorise.

2. Dresse le tableau de variations et donne le maximum.

3. Donne la limite de f en $+\infty$.

Exercice 14 – Charge d'un condensateur

La tension de charge d'un condensateur suit $u(t) = 24\left(1 - e^{-t/0{,}05}\right)$ volts, t en secondes.

1. Calcule $u(0)$, $u(0{,}05)$ et $u(0{,}15)$.

2. Quelle est la limite de u quand t devient grand ?

3. Calcule $u'(t)$ et $u'(0)$.

Exercice 15 – Étude de $e^x - x$

Soit $f(x) = e^x - x$ sur $\mathbb{R}$.

1. Calcule $f'(x)$ et détermine son signe.

2. Dresse le tableau de variations et donne le minimum.

3. Que peut-on en déduire sur la position relative des courbes de e^x et de x ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 16 – Type bac : refroidissement d'une pièce

Une pièce sortie du four à 220 °C refroidit dans un atelier à 20 °C. Sa température suit $T(t) = 20 + 200e^{-0{,}08t}$ (t en minutes).

1. Vérifie la cohérence du modèle en $t = 0$ et sa limite en $+\infty$.

2. Calcule $T(10)$ et $T(30)$.

3. Calcule $T'(t)$ et la vitesse de refroidissement initiale.

4. À quel instant la pièce passe-t-elle sous 60 °C ? (par balayage)

Exercice 17 – Type bac : étude complète d'une fonction

Soit $f(x) = (2 - x)e^x$ sur $[-1\,;3]$.

1. Calcule $f'(x)$ et factorise par e^x.

2. Dresse le tableau de variations sur $[-1\,;3]$.

3. Détermine les extremums, en valeurs approchées.

4. Donne l'équation de la tangente au point d'abscisse 0.

Exercice 18 – Type bac : amortissement d'une vibration

L'amplitude des vibrations d'un support, en millimètres, suit $A(t) = 6e^{-0{,}5t}$ (t en secondes). Le seuil acceptable est 0,5 mm.

1. Calcule $A(0)$, $A(2)$ et $A(6)$.

2. Calcule le temps nécessaire pour que l'amplitude soit divisée par deux.

3. Détermine par balayage l'instant où l'amplitude passe sous le seuil.

4. Calcule $A'(2)$ et interprète.

Exercice 19 – Type bac : croissances comparées et seuil

Le coût cumulé de maintenance d'un équipement, en milliers d'euros, est modélisé par $C(t) = 0{,}5t^2$, tandis que sa valeur résiduelle vaut $V(t) = 40e^{-0{,}15t}$ (t en années).

1. Calcule $C(5)$, $V(5)$, puis $C(10)$ et $V(10)$.

2. Détermine par balayage l'année où le coût cumulé dépasse la valeur résiduelle.

3. Que peut-on dire du comportement à long terme des deux modèles ?

4. Quelle décision de gestion cela suggère-t-il ?

Exercice 20 – Type bac : base e ou base a ?

Une production décroît de 12% par an. On peut la modéliser par $f(t) = 500 \times 0{,}88^t$ (base a) ou par $g(t) = 500e^{-kt}$ (base e).

1. Calcule $f(1)$, $f(3)$ et $f(5)$.

2. Détermine k par balayage pour que $g(1) = f(1)$.

3. Vérifie que les deux modèles coïncident aussi en $t = 3$ et $t = 5$.

4. Pourquoi la physique préfère-t-elle la base e ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).