Fonction inverse — Terminale STI2D

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

Dès qu'une grandeur est inversement proportionnelle à une autre, la fonction inverse apparaît : le temps de parcours face à la vitesse, l'intensité face à la tension à puissance constante, le coût moyen face à la quantité produite, la résistance équivalente de deux résistors en parallèle. Il faut alors savoir trois choses : la courbe est une HYPERBOLE en deux branches, la dérivée vaut $-\frac{1}{x^2}$ (toujours négative, d'où une décroissance sur chaque branche), et le comportement aux bornes — la courbe s'envole près de 0 et s'écrase vers l'axe à l'infini. Ces 20 exercices corrigés partent du calcul d'images pour arriver aux optimisations du type $ax + \frac{b}{x}$, très fréquentes au bac. La difficulté est croissante : l'énoncé puis la correction détaillée s'affichent d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-sti2d/fonction-inverse

Exercice 1 – Images et antécédents

Soit f la fonction inverse, définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.

1. Calcule $f(4)$, $f(0{,}5)$, $f(-2)$ et $f\left(\frac{2}{5}\right)$.

2. Détermine l'antécédent de 8, puis celui de $-0{,}25$.

Exercice 2 – Signe et sens de variation

On étudie $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $]-\infty\,;0[$ puis sur $]0\,;+\infty[$.

1. Donne le signe de $f(x)$ sur chaque intervalle.

2. Donne le sens de variation sur chaque intervalle.

3. Peut-on dire que f est décroissante sur $\mathbb{R}^*$?

Exercice 3 – Dérivée de la fonction inverse

On rappelle que la dérivée de $x \mapsto \frac{1}{x}$ est $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$.

1. Calcule $f'(1)$, $f'(2)$ et $f'(-3)$.

2. Que peut-on dire du signe de f' ? Qu'en déduis-tu ?

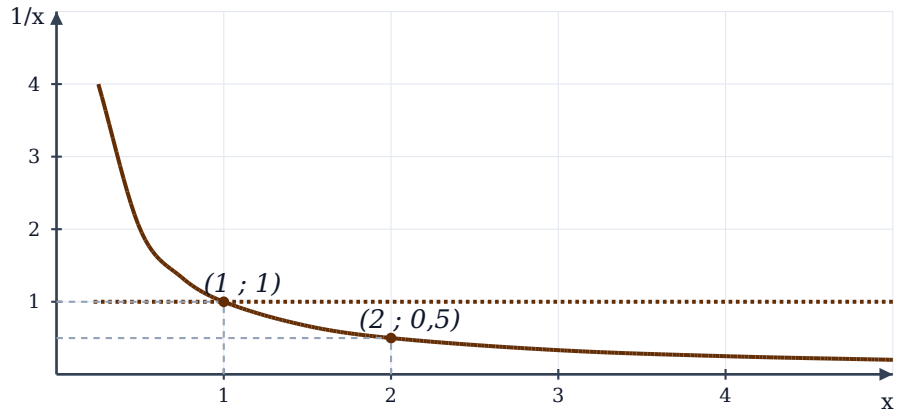
mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 4 – Lire l'hyperbole

La courbe représente $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $]0\,;5]$.

1. Lis $f(0{,}5)$, $f(1)$ et $f(4)$.

2. Résous graphiquement $f(x) = 0{,}5$, puis $f(x) > 1$.



Exercice 5 – Résoudre des équations

Résous dans $\mathbb{R}^*$ les équations $\frac{1}{x} = 5$, $\frac{1}{x} = -0{,}2$, $\frac{3}{x} = 12$ et $\frac{1}{x} = 0$.

1. Donne les solutions de ces quatre équations.

Exercice 6 – Tangente à l'hyperbole

Soit $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.

1. Détermine l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 2.

2. Cette tangente coupe-t-elle la courbe ailleurs ?

Exercice 7 – Comparer des inverses

On considère les nombres $a = 0{,}02$, $b = 0{,}2$, $c = 5$ et $d = 50$.

1. Range $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ et $\frac{1}{d}$ dans l'ordre croissant.

2. Que peut-on dire de l'ordre des inverses par rapport à l'ordre des nombres ?

Exercice 8 – Inéquation avec un inverse

On cherche à résoudre $\frac{1}{x} < 4$ dans $\mathbb{R}^*$.

1. Résous sur $]0\,;+\infty[$.

2. Que se passe-t-il sur $]-\infty\,;0[$?

3. Donne l'ensemble des solutions.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Proportionnalité inverse

Un atelier doit produire 3 600 pièces. Le temps t nécessaire, en heures, dépend de la cadence c en pièces par heure : $t(c) = \dfrac{3\,600}{c}$.

1. Calcule le temps pour une cadence de 120, puis de 240 pièces par heure.

2. Que devient le temps si la cadence est multipliée par 3 ?

3. Quelle cadence permet de finir en 15 heures ?

Exercice 10 – Dériver une expression avec un inverse

Dérive les fonctions $f(x) = \dfrac{6}{x}$, $g(x) = 3x + \dfrac{12}{x}$ et $h(x) = \dfrac{5}{x} - 2$, toutes définies sur $]0\,;+\infty[$.

1. Donne f', g' et h'.

Exercice 11 – Coût moyen d'une production

Les charges fixes mensuelles d'un atelier s'élèvent à 9 600 €. Le coût moyen des charges fixes par pièce, pour q pièces produites, est $F(q) = \dfrac{9\,600}{q}$.

1. Calcule $F(200)$, $F(400)$ et $F(1\,200)$.

2. Calcule $F'(q)$ et interprète son signe.

3. À partir de quelle production les charges fixes représentent-elles moins de 10 € par pièce ?

Exercice 12 – Tension et intensité à puissance constante

Un convertisseur délivre une puissance constante de 600 W. La relation entre tension u (en volts) et intensité i (en ampères) est $u \times i = 600$.

1. Exprime i en fonction de u.

2. Calcule l'intensité pour $u = 12$ V, $u = 48$ V et $u = 230$ V.

3. Pourquoi transporte-t-on l'électricité sous haute tension ?

Exercice 13 – Comportement aux bornes

On étudie le comportement de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ près de 0 et pour les grandes valeurs de x.

1. Calcule $f(0{,}1)$, $f(0{,}01)$ et $f(0{,}001)$. Que se passe-t-il ?

2. Calcule $f(100)$, $f(10\,000)$ et $f(10^6)$. Que se passe-t-il ?

3. Que se passe-t-il pour x négatif proche de 0 ?

Exercice 14 – Résistances en parallèle

Deux résistors de résistances R_1 et R_2 montés en parallèle ont une résistance équivalente R donnée par $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$.

1. Calcule R pour $R_1 = 30\ \Omega$ et $R_2 = 60\ \Omega$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

2. Montre que $R = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$.

3. Que vaut R si les deux résistances sont égales à r ?

Exercice 15 – Une somme avec un inverse

On considère $f(x) = x + \dfrac{9}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.

1. Calcule $f(1)$, $f(3)$ et $f(9)$.

2. Calcule $f'(x)$ et détermine son signe.

3. Dresse le tableau de variations et donne le minimum de f.

Exercice 16 – Type bac : minimiser un coût total

Un atelier commande des composants par lots de x unités. Le coût annuel de stockage est $2x$ euros et le coût annuel de passation des commandes est $\dfrac{1\,800}{x}$ euros. Le coût total est $C(x) = 2x + \dfrac{1\,800}{x}$, pour $x > 0$.

1. Calcule $C(20)$, $C(30)$ et $C(50)$.

2. Calcule $C'(x)$ et détermine la taille de lot optimale.

3. Calcule le coût minimal et compare les deux postes de dépense à l'optimum.

Exercice 17 – Type bac : temps de remplissage

Une cuve de 4 500 L est remplie par une pompe de débit réglable d (en L/min). Le temps de remplissage est $t(d) = \dfrac{4\,500}{d}$ minutes. La pompe consomme $0{,}02\,d^2$ watts et le coût de l'électricité est proportionnel à la puissance multipliée par la durée.

1. Calcule le temps de remplissage pour $d = 50$ et $d = 150$ L/min.

2. Montre que l'énergie consommée, proportionnelle à $0{,}02d^2 \times t(d)$, s'exprime simplement en fonction de d.

3. Que peut-on en conclure sur le réglage à choisir ?

Exercice 18 – Type bac : dilution progressive

Un bac contient 60 g de produit dissous dans 200 L d'eau. On ajoute x litres d'eau pure. La concentration devient $c(x) = \dfrac{60}{200 + x}$ g/L.

1. Calcule la concentration initiale, puis après ajout de 100 L.

2. Calcule $c'(x)$ et justifie le sens de variation.

3. Quel volume d'eau faut-il ajouter pour descendre à 0,15 g/L ?

4. Peut-on atteindre une concentration nulle ?

Exercice 19 – Type bac : section de câble et pertes

La résistance d'un câble de longueur fixe est inversement proportionnelle à sa section : $R(s) = \dfrac{18}{s}$ ohms, où s est la section en mm². Le coût du câble est

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

proportionnel à la section : $4s$ euros. Les pertes annuelles coûtent $60\,R(s)$ euros.

1. Exprime le coût total $T(s)$ sur un an.

2. Calcule $T(10)$, $T(15)$ et $T(20)$.

3. Détermine la section qui minimise le coût total.

4. Que vaut alors la résistance du câble ?

Exercice 20 – Type bac : vitesse moyenne d'un aller-retour

Un véhicule de livraison parcourt 60 km à l'aller à 40 km/h, puis les mêmes 60 km au retour à 60 km/h.

1. Calcule la durée de chaque trajet, puis la durée totale.

2. Calcule la vitesse moyenne sur l'aller-retour.

3. Pourquoi n'est-elle pas égale à 50 km/h ?

4. Exprime la vitesse moyenne en fonction des deux vitesses v_1 et v_2.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Images et antécédents

$f(4) = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

$f(0{,}5) = \frac{1}{0{,}5} = 2$: diviser par 0,5 revient à multiplier par 2.

$f(-2) = \frac{1}{-2} = -0{,}5$: l'inverse d'un négatif est négatif.

$f\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{1}{2/5} = \frac{5}{2} = 2{,}5$: l'inverse d'une fraction s'obtient en l'inversant.

Antécédent de 8 : on résout $\frac{1}{x} = 8$, donc $x = \frac{1}{8} = 0{,}125$.

Antécédent de $-0{,}25$: $\frac{1}{x} = -0{,}25$ donne $x = \frac{1}{-0{,}25} = -4$.

Propriété remarquable : la fonction inverse est sa propre réciproque — chercher un antécédent, c'est encore prendre l'inverse.

Réponse. $f(4) = 0{,}25$ · $f(0{,}5) = 2$ · $f(-2) = -0{,}5$ · $f(2/5) = 2{,}5$ · antécédent de 8 : 0,125 · antécédent de $-0{,}25$: -4.

Rappel de cours. $\frac{1}{x}$ n'est pas défini en 0 · l'inverse conserve le SIGNE · l'inverse d'un nombre entre 0 et 1 est supérieur à 1.

Erreur fréquente. Écrire $f(0{,}5) = 0{,}5$: l'inverse de 0,5 vaut 2. Plus le nombre est petit, plus son inverse est grand.

Correction de l'exercice 2 – Signe et sens de variation

Signe : $\frac{1}{x}$ est du même signe que x. Donc $f(x) < 0$ sur $]-\infty\,;0[$ et $f(x) > 0$ sur $]0\,;+\infty[$.

Variations : f est DÉCROISSANTE sur $]-\infty\,;0[$ et DÉCROISSANTE sur $]0\,;+\infty[$.

Vérification sur la branche positive : $f(1) = 1$, $f(2) = 0{,}5$, $f(10) = 0{,}1$ — les images diminuent ✔.

Sur la branche négative : $f(-10) = -0{,}1$, $f(-2) = -0{,}5$, $f(-1) = -1$ — elles diminuent aussi ✔.

Mais NON, on ne peut pas dire que f est décroissante sur $\mathbb{R}^*$: $f(-1) = -1$ et $f(1) = 1$, donc en passant de -1 à 1 l'image AUGMENTE.

La décroissance ne vaut donc que sur chaque intervalle séparément. C'est une précision de rédaction toujours attendue au bac.

Réponse. $f < 0$ sur $]-\infty\,;0[$ et $f > 0$ sur $]0\,;+\infty[$ · décroissante sur CHACUN des deux intervalles · mais pas sur $\mathbb{R}^*$ pris en entier.

Rappel de cours. La fonction inverse est décroissante sur chaque intervalle de son domaine, jamais « sur $\mathbb{R}^*$ » — la valeur 0 coupe le domaine en deux.

Erreur fréquente. Annoncer une décroissance globale : le contre-exemple $f(-1) = -1 < f(1) = 1$ suffit à la réfuter.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 3 – Dérivée de la fonction inverse

$f'(1) = -\dfrac{1}{1^2} = -1$.

$f'(2) = -\dfrac{1}{4} = -0{,}25$.

$f'(-3) = -\dfrac{1}{(-3)^2} = -\dfrac{1}{9} \approx -0{,}111$.

Le dénominateur x^2 est toujours STRICTEMENT POSITIF (pour $x \neq 0$), donc $-\dfrac{1}{x^2}$ est toujours STRICTEMENT NÉGATIF.

On en déduit que f est décroissante sur chacun des deux intervalles de son domaine — ce que l’on avait constaté numériquement.

Remarque : $|f'(x)|$ est d’autant plus grand que x est proche de 0. En $x = 0{,}1$, la pente vaut -100 : la courbe est presque verticale.

Réponse. $f'(1) = -1 \cdot f'(2) = -0{,}25 \cdot f'(-3) \approx -0{,}111 \cdot f'$ est toujours négative, donc f décroît sur chaque intervalle.

Rappel de cours. $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$: négative partout, et d’autant plus grande en valeur absolue que x est proche de 0.

Erreur fréquente. Écrire $f'(-3) = +\dfrac{1}{9}$: le carré rend le dénominateur positif, et le signe moins de la formule subsiste.

Correction de l’exercice 4 – Lire l’hyperbole

Lecture : $f(0{,}5) = 2$, $f(1) = 1$ et $f(4) = 0{,}25$.

$f(x) = 0{,}5$: on part de 0,5 sur l’axe vertical, on rejoint la courbe, on lit $x = 2$.

Contrôle : $\dfrac{1}{2} = 0{,}5$ ✔.

$f(x) > 1$: la courbe est au-dessus de la droite $y = 1$ pour les abscisses INFÉRIEURES à 1.

Donc $f(x) > 1$ pour $0 < x < 1$.

Observation importante sur la courbe : elle se rapproche de l’axe vertical sans le toucher quand x tend vers 0, et de l’axe horizontal quand x grandit. Ces deux axes sont les ASYMPTOTES de l’hyperbole.

Réponse. $f(0{,}5) = 2$, $f(1) = 1$, $f(4) = 0{,}25 \cdot f(x) = 0{,}5$ pour $x = 2 \cdot f(x) > 1$ pour $0 < x < 1$.

Rappel de cours. La courbe de la fonction inverse est une hyperbole : elle longe les deux axes sans jamais les atteindre.

Correction de l’exercice 5 – Résoudre des équations

$\dfrac{1}{x} = 5$ donne $x = \dfrac{1}{5} = 0{,}2$.

$\dfrac{1}{x} = -0{,}2$ donne $x = \dfrac{1}{-0{,}2} = -5$.

$\dfrac{3}{x} = 12$: on multiplie par x puis on divise par 12, soit $3 = 12x$ et $x = \dfrac{3}{12} = 0{,}25$.

$\dfrac{1}{x} = 0$: cette équation n’a AUCUNE solution. Un quotient de numérateur 1 ne peut jamais être nul.

Justification : si $\dfrac{1}{x} = 0$, en multipliant par x on obtiendrait $1 = 0$, ce qui est faux.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Interprétation graphique : la courbe ne coupe jamais l'axe des abscisses — c'est une asymptote, pas un point de la courbe.

Réponse. $x = 0{,}2$ · $x = -5$ · $x = 0{,}25$ · aucune solution pour $\frac{1}{x} = 0$.

Rappel de cours. $\frac{k}{x} = b \Leftrightarrow x = \frac{k}{b}$ (pour $b \neq 0$) · et $\frac{k}{x}$ ne s'annule jamais si $k \neq 0$.

Erreur fréquente. Répondre $x = 0$ à la dernière équation : 0 est justement la valeur INTERDITE de la fonction.

Correction de l'exercice 6 – Tangente à l'hyperbole

$f(2) = 0{,}5$ et $f'(2) = -\frac{1}{4} = -0{,}25$.

Tangente : $y = f'(2)(x - 2) + f(2) = -0{,}25(x - 2) + 0{,}5$.

En développant : $y = -0{,}25x + 0{,}5 + 0{,}5 = -0{,}25x + 1$.

Pour la seconde question, on résout $\frac{1}{x} = -0{,}25x + 1$ sur $]0\,;+\infty[$.

On multiplie par $x > 0$: $1 = -0{,}25x^2 + x$, soit $0{,}25x^2 - x + 1 = 0$.

On multiplie par 4 : $x^2 - 4x + 4 = 0$, c'est-à-dire $(x - 2)^2 = 0$.

La seule solution est $x = 2$: la tangente ne touche la courbe QU'au point de tangence.

Le carré parfait obtenu n'est pas un hasard : une tangente « double » toujours son point de contact, d'où une racine double.

Réponse. Tangente : $y = -0{,}25x + 1$ · elle ne rencontre la courbe qu'en $x = 2$ (racine double).

Rappel de cours. $y = f'(a)(x - a) + f(a)$: la dérivée donne la pente, la fonction donne le point.

Erreur fréquente. Oublier de multiplier par 4 ou se tromper de signe : l'équation $0{,}25x^2 - x + 1 = 0$ doit conduire à un carré parfait.

Correction de l'exercice 7 – Comparer des inverses

$\frac{1}{a} = 50$; $\frac{1}{b} = 5$; $\frac{1}{c} = 0{,}2$; $\frac{1}{d} = 0{,}02$.

Ordre croissant : $\frac{1}{d} < \frac{1}{c} < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$, soit $0{,}02 < 0{,}2 < 5 < 50$.

Or les nombres de départ vérifiaient $a < b < c < d$.

L'ordre est donc RENVERSÉ : pour des nombres tous positifs, prendre l'inverse inverse le classement.

C'est une conséquence directe de la décroissance de la fonction inverse sur $]0\,;+\infty[$.

Attention : ce renversement n'est garanti que si les nombres sont de MÊME signe. Avec $-2 < 3$, on a $-0{,}5 < 0{,}333$: l'ordre est conservé, parce que les deux branches de l'hyperbole ne se comparent pas entre elles.

Réponse. $0{,}02 < 0{,}2 < 5 < 50$, soit $\frac{1}{d} < \frac{1}{c} < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$ · l'ordre est renversé (pour des nombres de même signe).

Rappel de cours. Pour $0 < a < b$: $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$. Le passage à l'inverse renverse l'ordre sur chaque branche.

Erreur fréquente. Appliquer le renversement à des nombres de signes contraires : $-2 < 3$ mais $\frac{1}{-2} < \frac{1}{3}$, l'ordre est ici conservé.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 8 – Inéquation avec un inverse

Sur $]0\,;+\infty[$: on multiplie par x, qui est POSITIF, donc le sens est conservé : $1 < 4x$, soit $x > \frac{1}{4}$.

Les solutions positives sont donc $x > 0{,}25$.

Sur $]-\infty\,;0[$: $\frac{1}{x}$ est négatif, donc automatiquement inférieur à 4. TOUS les négatifs sont solutions.

Ensemble des solutions : $]-\infty\,;0[\cup]0{,}25\,;+\infty[$.

Contrôle : $x = -1$ donne $\frac{1}{-1} = -1 < 4$ ✔ ; $x = 0{,}1$ donne $10 > 4$ ✘ (non solution) ; $x = 1$ donne $1 < 4$ ✔.

Méthode à retenir : on ne multiplie JAMAIS une inéquation par x sans discuter son signe. On traite les deux branches séparément.

Réponse. $x > 0{,}25$ sur les positifs · tous les négatifs sont solutions · au total $]-\infty\,;0[\cup]0{,}25\,;+\infty[$.

Rappel de cours. Multiplier par x exige de connaître son signe : positif, le sens est conservé ; négatif, il s'inverse.

Erreur fréquente. Répondre « $x > 0{,}25$ » : on oublierait toute la branche négative, pourtant entièrement solution.

Correction de l'exercice 9 – Proportionnalité inverse

$t(120) = \frac{3\,600}{120} = 30$ heures.

$t(240) = \frac{3\,600}{240} = 15$ heures.

La cadence a doublé, le temps a été divisé par deux : c'est la signature d'une proportionnalité INVERSE.

Si la cadence est multipliée par 3 : $t(3c) = \frac{3\,600}{3c} = \frac{1}{3} \times \frac{3\,600}{c} = \frac{t(c)}{3}$.

Le temps est donc divisé par 3.

Cadence pour 15 heures : on résout $\frac{3\,600}{c} = 15$, donc $15c = 3\,600$ et $c = 240$ pièces par heure ✔ cohérent avec la première question.

Le produit $t \times c$ vaut toujours 3 600 : c'est la caractéristique d'une proportionnalité inverse (le PRODUIT est constant, et non le quotient).

Réponse. 30 h à 120 pièces/h, 15 h à 240 pièces/h · cadence ×3 ⇒ temps ÷3 · il faut 240 pièces/h pour finir en 15 h.

Rappel de cours. Proportionnalité inverse : $t \times c =$ constante, donc $t = \frac{k}{c}$. C'est le produit qui est constant.

Erreur fréquente. Croire que doubler la cadence fait « gagner deux heures » : elle divise le temps par deux, ce qui en fait gagner 15.

Correction de l'exercice 10 – Dériver une expression avec un inverse

$f(x) = 6 \times \frac{1}{x}$, donc $f'(x) = 6 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{6}{x^2}$.

g se dérive terme à terme : la dérivée de $3x$ est 3, celle de $\frac{12}{x}$ est $-\frac{12}{x^2}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Donc $g'(x) = 3 - \frac{12}{x^2}$.

$h'(x) = -\frac{5}{x^2} + 0 = -\frac{5}{x^2}$ (la dérivée de la constante -2 est nulle).

Remarque sur g' : contrairement à f' et h', elle n'est pas de signe constant. $g'(x) = 0$ donne $x^2 = 4$, soit $x = 2$ sur $]0\,;+\infty[$.

C'est ce type de dérivée qui donne lieu à un OPTIMUM, et donc aux problèmes de minimisation de coût étudiés plus loin.

Réponse. $f'(x) = -\frac{6}{x^2} \cdot g'(x) = 3 - \frac{12}{x^2} \cdot h'(x) = -\frac{5}{x^2}$.

Rappel de cours. $\left(\frac{k}{x}\right)' = -\frac{k}{x^2}$: le coefficient reste devant, le signe moins apparaît.

Erreur fréquente. Dériver $\frac{12}{x}$ en $-\frac{1}{x^2}$: le coefficient 12 ne disparaît pas.

Correction de l'exercice 11 – Coût moyen d'une production

$F(200) = \frac{9\,600}{200} = 48$ € par pièce.

$F(400) = 24$ € par pièce et $F(1\,200) = 8$ € par pièce.

$F'(q) = -\frac{9\,600}{q^2}$, toujours négative : le coût fixe unitaire DÉCROÎT quand la production augmente.

C'est l'effet d'échelle : les mêmes charges fixes se répartissent sur davantage de pièces.

Seuil : $\frac{9\,600}{q} < 10$ donne (en multipliant par $q > 0$) $9\,600 < 10q$, soit $q > 960$.

Il faut donc produire plus de 960 pièces par mois.

Contrôle : $F(960) = 10$ € exactement, et $F(1\,000) = 9{,}60$ € ✔.

Observation économique : passer de 200 à 400 pièces fait gagner 24 € par pièce ; passer de 1 000 à 1 200 n'en fait gagner que 1,60. L'effet d'échelle s'épuise — c'est exactement ce que dit $F'(q) = -\frac{9\,600}{q^2}$, qui tend vers 0.

Réponse. $F(200) = 48$ €, $F(400) = 24$ €, $F(1\,200) = 8$ € par pièce · $F'(q) = -\frac{9\,600}{q^2} < 0$: décroissance · moins de 10 € par pièce dès $q > 960$.

Rappel de cours. Coût fixe unitaire $= \frac{\text{charges fixes}}{\text{quantité}}$: une fonction inverse, donc décroissante, mais jamais nulle.

Erreur fréquente. Croire que le coût unitaire peut devenir nul : $\frac{9\,600}{q}$ tend vers 0 sans l'atteindre, quelle que soit la production.

Correction de l'exercice 12 – Tension et intensité à puissance constante

$i(u) = \frac{600}{u}$: l'intensité est inversement proportionnelle à la tension.

$i(12) = \frac{600}{12} = 50$ A.

$i(48) = \frac{600}{48} = 12{,}5$ A.

$i(230) = \frac{600}{230} \approx 2{,}61$ A.

Pour la même puissance, multiplier la tension par ≈ 19 (de 12 à 230 V) divise l'intensité

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

d'autant.

Or les pertes en ligne valent Ri^2 : elles dépendent du CARRÉ de l'intensité. Diviser i par 19 divise les pertes par $19^2 \approx 361$.

C'est pourquoi l'électricité est transportée sous très haute tension : à puissance égale, cela réduit l'intensité, donc les pertes par échauffement des câbles.

Contrôle : à 50 A dans un câble de 0,1 Ω, les pertes valent $0{,}1 \times 2\,500 = 250$ W — soit 42% des 600 W transportés ! À 2,61 A, elles tombent à 0,68 W.

Réponse. $i(u) = \dfrac{600}{u}$ · 50 A à 12 V, 12,5 A à 48 V, ≈ 2,61 A à 230 V · la haute tension réduit l'intensité, donc les pertes en Ri^2.

Rappel de cours. À puissance constante, u et i sont inversement proportionnels : $i = \dfrac{P}{u}$.

Erreur fréquente. Croire que doubler la tension double l'intensité : à puissance constante, elle la DIVISE par deux.

Correction de l'exercice 13 – Comportement aux bornes

$f(0{,}1) = 10$; $f(0{,}01) = 100$; $f(0{,}001) = 1\,000$.

Quand x se rapproche de 0 par valeurs positives, $f(x)$ devient arbitrairement GRAND : on dit que $f(x)$ tend vers $+\infty$.

Graphiquement, la courbe s'envole le long de l'axe vertical, qui est une asymptote.

$f(100) = 0{,}01$; $f(10\,000) = 10^{-4}$; $f(10^6) = 10^{-6}$.

Quand x devient très grand, $f(x)$ se rapproche de 0 sans jamais l'atteindre : la courbe s'écrase le long de l'axe horizontal, l'autre asymptote.

Pour x négatif proche de 0 : $f(-0{,}1) = -10$, $f(-0{,}01) = -100$. La fonction tend vers $-\infty$.

Les deux branches se comportent donc symétriquement : elles fuient l'axe vertical, l'une vers le haut, l'autre vers le bas.

Conséquence pour la modélisation : un modèle en $\frac{k}{x}$ « explose » près de $x = 0$. En pratique, il faut donc toujours préciser un domaine où il reste crédible (une cadence nulle ne donne pas un temps infini, elle ne donne rien du tout).

Réponse. Près de 0^+, $f(x) \to +\infty$ · pour x très grand, $f(x) \to 0$ · près de 0^-, $f(x) \to -\infty$ · les deux axes sont des asymptotes.

Rappel de cours. Axe des ordonnées : asymptote VERTICALE · axe des abscisses : asymptote HORIZONTALE. La courbe les longe sans jamais les toucher.

Erreur fréquente. Écrire $f(0) = +\infty$: la fonction n'est pas définie en 0. On parle de comportement AU VOISINAGE de 0, pas d'une valeur.

Correction de l'exercice 14 – Résistances en parallèle

$\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{30} + \dfrac{1}{60}$. On met au même dénominateur : $\dfrac{2}{60} + \dfrac{1}{60} = \dfrac{3}{60} = \dfrac{1}{20}$.

Donc $R = 20$ Ω.

Remarque essentielle : 20 Ω est INFÉRIEUR aux deux résistances. Un montage en parallèle diminue toujours la résistance.

Démonstration de la formule : $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} = \dfrac{R_2 + R_1}{R_1 R_2}$.

En prenant l'inverse des deux membres : $R = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ ✔.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Contrôle : $\frac{30 \times 60}{90} = \frac{1\,800}{90} = 20\ \Omega$ ✔.

Cas de deux résistances égales : $R = \frac{r \times r}{2r} = \frac{r}{2}$. Deux résistors identiques en parallèle donnent la MOITIÉ de la résistance.

Réponse. $R = 20\ \Omega \cdot R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ · et $R = \frac{r}{2}$ pour deux résistances égales.

Rappel de cours. En parallèle, ce sont les INVERSES des résistances qui s'additionnent. La résistance équivalente est toujours plus petite que la plus petite des deux.

Erreur fréquente. Écrire $R = R_1 + R_2 = 90\ \Omega$: c'est la formule du montage en SÉRIE. En parallèle, la résistance diminue.

Correction de l'exercice 15 – Une somme avec un inverse

$f(1) = 1 + 9 = 10$; $f(3) = 3 + 3 = 6$; $f(9) = 9 + 1 = 10$.

On remarque que $f(1) = f(9)$: la fonction descend puis remonte.

$f'(x) = 1 - \frac{9}{x^2}$.

$f'(x) = 0$ donne $\frac{9}{x^2} = 1$, soit $x^2 = 9$ et $x = 3$ (la solution -3 est hors du domaine).

Signe : pour $x < 3$, $\frac{9}{x^2} > 1$ donc $f'(x) < 0$; pour $x > 3$, $\frac{9}{x^2} < 1$ donc $f'(x) > 0$.

f est donc DÉCROISSANTE sur $]0\,;3]$ puis CROISSANTE sur $[3\,;+\infty[$.

Le minimum est $f(3) = 6$, atteint en $x = 3$.

Contrôle : $f(2) = 2 + 4{,}5 = 6{,}5$ et $f(4) = 4 + 2{,}25 = 6{,}25$, tous deux supérieurs à 6 ✔.

Résultat général à connaître : $x + \frac{k}{x}$ est minimale en $x = \sqrt{k}$, et son minimum vaut $2\sqrt{k}$. Ici $\sqrt{9} = 3$ et $2\sqrt{9} = 6$ ✔.

Réponse. $f(1) = f(9) = 10$ et $f(3) = 6$ · $f'(x) = 1 - \frac{9}{x^2}$, négative avant 3, positive après · minimum $f(3) = 6$.

Rappel de cours. $x + \frac{k}{x}$ atteint son minimum en $x = \sqrt{k}$, avec pour valeur $2\sqrt{k}$.

Erreur fréquente. Conclure que f est décroissante parce qu'elle contient un inverse : le terme x finit par l'emporter, d'où le minimum.

Correction de l'exercice 16 – Type bac : minimiser un coût total

$C(20) = 40 + 90 = 130$ € ; $C(30) = 60 + 60 = 120$ € ; $C(50) = 100 + 36 = 136$ €.

$C'(x) = 2 - \frac{1\,800}{x^2}$.

$C'(x) = 0$ donne $\frac{1\,800}{x^2} = 2$, soit $x^2 = 900$ et $x = 30$ (seule solution positive).

Signe : C' est négative pour $x < 30$ et positive pour $x > 30$: C décroît puis croît, le minimum est bien en $x = 30$.

Coût minimal : $C(30) = 60 + 60 = 120$ € par an.

Observation frappante : à l'optimum, les deux postes sont ÉGAUX (60 € de stockage et 60 € de passation).

Ce n'est pas un hasard : à l'optimum, $2x = \frac{1\,800}{x}$ (c'est l'équation $C'(x) = 0$ réécrite), donc les deux coûts se valent.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

C'est le résultat classique de la gestion des stocks : la taille de lot économique équilibre coût de stockage et coût de commande.

Contrôle de l'écart : commander par lots de 20 ou de 50 coûte 130 ou 136 € au lieu de 120 € — soit 8 à 13% de surcoût.

Réponse. $C(20) = 130$ €, $C(30) = 120$ €, $C(50) = 136$ € · $C'(x) = 2 - \dfrac{1\,800}{x^2}$, optimum en $x = 30$ · coût minimal 120 € avec 60 € sur chaque poste.

Rappel de cours. À l'optimum d'un coût $ax + \dfrac{b}{x}$, les deux termes sont égaux, et $x = \sqrt{\dfrac{b}{a}}$.

Erreur fréquente. Chercher le minimum en annulant $C(x)$: le coût ne s'annule jamais, c'est sa DÉRIVÉE qu'on annule.

Correction de l'exercice 17 – Type bac : temps de remplissage

$t(50) = \dfrac{4\,500}{50} = 90$ minutes et $t(150) = \dfrac{4\,500}{150} = 30$ minutes.

Énergie (à une constante près) : $E(d) = 0{,}02d^2 \times \dfrac{4\,500}{d}$.

On simplifie : $E(d) = 0{,}02 \times 4\,500 \times \dfrac{d^2}{d} = 90\,d$.

L'énergie consommée est donc PROPORTIONNELLE au débit : elle croît linéairement, sans minimum sur $]0\,;+\infty[$.

Vérification : à $d = 50$, $E = 4\,500$ (unités arbitraires) ; à $d = 150$, $E = 13\,500$ — trois fois plus pour un remplissage trois fois plus rapide.

Conclusion : plus on pompe vite, plus on dépense d'énergie. Le débit le plus économe est le plus FAIBLE possible, mais il n'y a pas d'optimum interne — le choix résulte d'un compromis avec le temps disponible.

Si l'on devait minimiser une combinaison « énergie + valeur du temps », par exemple $90d + \dfrac{9\,000}{d}$, on retrouverait un problème du type $ax + \dfrac{b}{x}$, avec un optimum en $d = \sqrt{100} = 10$ L/min.

Leçon de méthode : avant de dériver, il faut SIMPLIFIER l'expression. Ici, ce qui ressemblait à un problème d'optimisation s'est révélé linéaire.

Réponse. $t(50) = 90$ min et $t(150) = 30$ min · $E(d) = 90d$, proportionnelle au débit · aucun optimum : l'énergie est minimale au débit le plus faible, le choix est un compromis avec le temps.

Rappel de cours. $d^2 \times \dfrac{1}{d} = d$: simplifier avant de dériver évite bien des calculs inutiles.

Erreur fréquente. Dériver $0{,}02d^2 \times \dfrac{4\,500}{d}$ comme un produit sans simplifier : le calcul est faisable mais bien plus long, et l'on manque la conclusion (c'est une fonction linéaire).

Correction de l'exercice 18 – Type bac : dilution progressive

Concentration initiale : $c(0) = \dfrac{60}{200} = 0{,}3$ g/L.

Après 100 L : $c(100) = \dfrac{60}{300} = 0{,}2$ g/L.

Dérivée : avec $u = 60$ (constante) et $v = 200 + x$, la formule du quotient donne $c'(x) = \dfrac{0 - 60 \times 1}{(200+x)^2} = -\dfrac{60}{(200+x)^2}$.

Cette dérivée est toujours négative : la concentration décroît quand on ajoute de l'eau ✔

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

ce qui était attendu.

Objectif 0,15 g/L : $\frac{60}{200+x} = 0{,}15$ donne $0{,}15(200+x) = 60$, soit $200 + x = \frac{60}{0{,}15} = 400$.

Donc $x = 200$ L d'eau à ajouter : il faut DOUBLER le volume pour diviser la concentration par deux ✔ cohérent avec une proportionnalité inverse.

Concentration nulle : $\frac{60}{200+x} = 0$ n'a pas de solution, puisqu'un quotient de numérateur 60 ne s'annule jamais.

La concentration tend vers 0 quand x devient très grand, sans jamais l'atteindre : on ne peut pas « rincer parfaitement » par dilution, seulement descendre sous un seuil.

Contrôle chiffré : pour atteindre 0,001 g/L, il faudrait $200 + x = 60\,000$, soit $x = 59\,800$ L — irréaliste. D'où le recours à des traitements plutôt qu'à la dilution.

Réponse. $c(0) = 0{,}3$ g/L et $c(100) = 0{,}2$ g/L · $c'(x) = -\frac{60}{(200+x)^2} < 0$ · il faut ajouter 200 L pour atteindre 0,15 g/L · la concentration nulle est inatteignable.

Rappel de cours. $\frac{k}{ax+b}$ a pour dérivée $-\frac{ka}{(ax+b)^2}$: toujours du signe opposé à a, et jamais nulle.

Erreur fréquente. Croire qu'ajouter 200 L divise la concentration par 200 : c'est le volume TOTAL qui double, donc la concentration qui est divisée par deux.

Correction de l'exercice 19 – Type bac : section de câble et pertes

Coût des pertes : $60 \times \frac{18}{s} = \frac{1\,080}{s}$ euros.

Coût total : $T(s) = 4s + \frac{1\,080}{s}$.

$T(10) = 40 + 108 = 148$ € ; $T(15) = 60 + 72 = 132$ € ; $T(20) = 80 + 54 = 134$ €.

Le minimum semble donc situé entre 15 et 20 mm².

Dérivée : $T'(s) = 4 - \frac{1\,080}{s^2}$.

$T'(s) = 0$ donne $s^2 = \frac{1\,080}{4} = 270$, donc $s = \sqrt{270} \approx 16{,}43$ mm².

Signe : T' est négative avant, positive après : c'est bien un minimum.

Coût minimal : $T(16{,}43) \approx 65{,}7 + 65{,}7 \approx 131{,}5$ € — et l'on retrouve l'égalité des deux postes à l'optimum ✔.

Résistance correspondante : $R(16{,}43) = \frac{18}{16{,}43} \approx 1{,}10$ Ω.

En pratique, les sections sont normalisées : on choisirait 16 mm² ($T(16) = 64 + 67{,}5 = 131{,}5$ €) plutôt que 25 mm² ($T(25) = 100 + 43{,}2 = 143{,}2$ €).

Lecture d'ingénieur : sur-dimensionner le câble coûte plus cher en achat que ce qu'il fait économiser en pertes, et le sous-dimensionner coûte plus cher en pertes. L'optimum équilibre exactement les deux.

Réponse. $T(s) = 4s + \frac{1\,080}{s}$ · $T(10) = 148$ €, $T(15) = 132$ €, $T(20) = 134$ € · optimum $s = \sqrt{270} \approx 16{,}4$ mm² pour $\approx 131{,}5$ € · résistance $\approx 1{,}10$ Ω.

Rappel de cours. Tout arbitrage « achat contre pertes » prend la forme $as + \frac{b}{s}$, d'optimum $s = \sqrt{\frac{b}{a}}$.

Erreur fréquente. Choisir la plus grosse section « pour limiter les pertes » : au-delà de

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

l'optimum, chaque mm² supplémentaire coûte plus qu'il ne rapporte.

Correction de l'exercice 20 – Type bac : vitesse moyenne d'un aller-retour

Aller : $t_1 = \frac{60}{40} = 1{,}5$ h. Retour : $t_2 = \frac{60}{60} = 1$ h.

Durée totale : 2,5 h, pour une distance totale de 120 km.

Vitesse moyenne : $v_m = \frac{120}{2{,}5} = 48$ km/h.

Pourquoi pas 50 km/h ? Parce que le véhicule passe PLUS DE TEMPS à la vitesse lente (1,5 h à 40 km/h contre 1 h à 60 km/h).

La moyenne arithmétique $\frac{40+60}{2} = 50$ supposerait des DURÉES égales, alors que ce sont les DISTANCES qui le sont.

Expression générale : pour une distance d dans chaque sens, $v_m = \frac{2d}{\frac{d}{v_1}+\frac{d}{v_2}} = \frac{2}{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}}$.

C'est la MOYENNE HARMONIQUE des deux vitesses : l'inverse de la moyenne des inverses.

Contrôle : $\frac{2}{\frac{1}{40}+\frac{1}{60}} = \frac{2}{0{,}025+0{,}016\,67} = \frac{2}{0{,}041\,67} = 48$ ✔.

Remarque : la moyenne harmonique est TOUJOURS inférieure ou égale à la moyenne arithmétique. Ici 48 < 50, et l'écart grandit avec la différence entre les deux vitesses (à 20 et 80 km/h, elle tomberait à 32 km/h).

Réponse. $t_1 = 1{,}5$ h et $t_2 = 1$ h, soit 2,5 h · $v_m = 48$ km/h · pas 50 km/h car les durées ne sont pas égales · $v_m = \frac{2}{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}}$ (moyenne harmonique).

Rappel de cours. Vitesse moyenne = $\frac{\text{distance totale}}{\text{durée totale}}$: on moyenne les INVERSES quand les distances sont égales.

Erreur fréquente. Faire la moyenne des vitesses : on surestime toujours, parce que le trajet lent dure plus longtemps.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).