Fonction inverse — Terminale STI2D

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés

Présentation

Dès qu'une grandeur est inversement proportionnelle à une autre, la fonction inverse apparaît : le temps de parcours face à la vitesse, l'intensité face à la tension à puissance constante, le coût moyen face à la quantité produite, la résistance équivalente de deux résistors en parallèle. Il faut alors savoir trois choses : la courbe est une HYPERBOLE en deux branches, la dérivée vaut $-\frac{1}{x^2}$ (toujours négative, d'où une décroissance sur chaque branche), et le comportement aux bornes — la courbe s'envole près de 0 et s'écrase vers l'axe à l'infini. Ces 20 exercices corrigés partent du calcul d'images pour arriver aux optimisations du type $ax + \frac{b}{x}$, très fréquentes au bac. La difficulté est croissante : l'énoncé puis la correction détaillée s'affichent d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-sti2d/fonction-inverse

Exercice 1 – Images et antécédents

Soit f la fonction inverse, définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.

1. Calcule $f(4)$, $f(0{,}5)$, $f(-2)$ et $f\left(\frac{2}{5}\right)$.

2. Détermine l'antécédent de 8, puis celui de $-0{,}25$.

Exercice 2 – Signe et sens de variation

On étudie $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $]-\infty\,;0[$ puis sur $]0\,;+\infty[$.

1. Donne le signe de $f(x)$ sur chaque intervalle.

2. Donne le sens de variation sur chaque intervalle.

3. Peut-on dire que f est décroissante sur $\mathbb{R}^*$?

Exercice 3 – Dérivée de la fonction inverse

On rappelle que la dérivée de $x \mapsto \frac{1}{x}$ est $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$.

1. Calcule $f'(1)$, $f'(2)$ et $f'(-3)$.

2. Que peut-on dire du signe de f' ? Qu'en déduis-tu ?

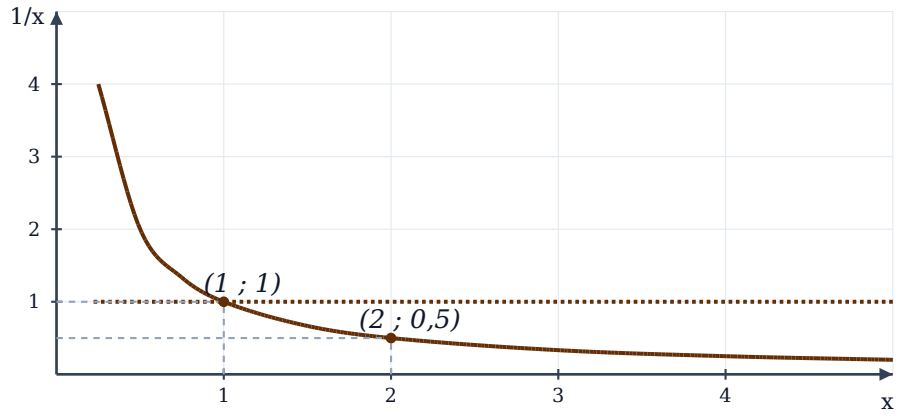
mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 4 – Lire l'hyperbole

La courbe représente $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $]0\,;5]$.

1. Lis $f(0{,}5)$, $f(1)$ et $f(4)$.

2. Résous graphiquement $f(x) = 0{,}5$, puis $f(x) > 1$.



Exercice 5 – Résoudre des équations

Résous dans $\mathbb{R}^*$ les équations $\frac{1}{x} = 5$, $\frac{1}{x} = -0{,}2$, $\frac{3}{x} = 12$ et $\frac{1}{x} = 0$.

1. Donne les solutions de ces quatre équations.

Exercice 6 – Tangente à l'hyperbole

Soit $f(x) = \frac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.

1. Détermine l'équation de la tangente à la courbe au point d'abscisse 2.

2. Cette tangente coupe-t-elle la courbe ailleurs ?

Exercice 7 – Comparer des inverses

On considère les nombres $a = 0{,}02$, $b = 0{,}2$, $c = 5$ et $d = 50$.

1. Range $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$, $\frac{1}{c}$ et $\frac{1}{d}$ dans l'ordre croissant.

2. Que peut-on dire de l'ordre des inverses par rapport à l'ordre des nombres ?

Exercice 8 – Inéquation avec un inverse

On cherche à résoudre $\frac{1}{x} < 4$ dans $\mathbb{R}^*$.

1. Résous sur $]0\,;+\infty[$.

2. Que se passe-t-il sur $]-\infty\,;0[$?

3. Donne l'ensemble des solutions.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Proportionnalité inverse

Un atelier doit produire 3 600 pièces. Le temps t nécessaire, en heures, dépend de la cadence c en pièces par heure : $t(c) = \dfrac{3\,600}{c}$.

1. Calcule le temps pour une cadence de 120, puis de 240 pièces par heure.

2. Que devient le temps si la cadence est multipliée par 3 ?

3. Quelle cadence permet de finir en 15 heures ?

Exercice 10 – Dériver une expression avec un inverse

Dérive les fonctions $f(x) = \dfrac{6}{x}$, $g(x) = 3x + \dfrac{12}{x}$ et $h(x) = \dfrac{5}{x} - 2$, toutes définies sur $]0\,;+\infty[$.

1. Donne f', g' et h'.

Exercice 11 – Coût moyen d'une production

Les charges fixes mensuelles d'un atelier s'élèvent à 9 600 €. Le coût moyen des charges fixes par pièce, pour q pièces produites, est $F(q) = \dfrac{9\,600}{q}$.

1. Calcule $F(200)$, $F(400)$ et $F(1\,200)$.

2. Calcule $F'(q)$ et interprète son signe.

3. À partir de quelle production les charges fixes représentent-elles moins de 10 € par pièce ?

Exercice 12 – Tension et intensité à puissance constante

Un convertisseur délivre une puissance constante de 600 W. La relation entre tension u (en volts) et intensité i (en ampères) est $u \times i = 600$.

1. Exprime i en fonction de u.

2. Calcule l'intensité pour $u = 12$ V, $u = 48$ V et $u = 230$ V.

3. Pourquoi transporte-t-on l'électricité sous haute tension ?

Exercice 13 – Comportement aux bornes

On étudie le comportement de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ près de 0 et pour les grandes valeurs de x.

1. Calcule $f(0{,}1)$, $f(0{,}01)$ et $f(0{,}001)$. Que se passe-t-il ?

2. Calcule $f(100)$, $f(10\,000)$ et $f(10^6)$. Que se passe-t-il ?

3. Que se passe-t-il pour x négatif proche de 0 ?

Exercice 14 – Résistances en parallèle

Deux résistors de résistances R_1 et R_2 montés en parallèle ont une résistance équivalente R donnée par $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}$.

1. Calcule R pour $R_1 = 30\ \Omega$ et $R_2 = 60\ \Omega$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

2. Montre que $R = \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$.

3. Que vaut R si les deux résistances sont égales à r ?

Exercice 15 – Une somme avec un inverse

On considère $f(x) = x + \dfrac{9}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.

1. Calcule $f(1)$, $f(3)$ et $f(9)$.

2. Calcule $f'(x)$ et détermine son signe.

3. Dresse le tableau de variations et donne le minimum de f.

Exercice 16 – Type bac : minimiser un coût total

Un atelier commande des composants par lots de x unités. Le coût annuel de stockage est $2x$ euros et le coût annuel de passation des commandes est $\dfrac{1\,800}{x}$ euros. Le coût total est $C(x) = 2x + \dfrac{1\,800}{x}$, pour $x > 0$.

1. Calcule $C(20)$, $C(30)$ et $C(50)$.

2. Calcule $C'(x)$ et détermine la taille de lot optimale.

3. Calcule le coût minimal et compare les deux postes de dépense à l'optimum.

Exercice 17 – Type bac : temps de remplissage

Une cuve de 4 500 L est remplie par une pompe de débit réglable d (en L/min). Le temps de remplissage est $t(d) = \dfrac{4\,500}{d}$ minutes. La pompe consomme $0{,}02\,d^2$ watts et le coût de l'électricité est proportionnel à la puissance multipliée par la durée.

1. Calcule le temps de remplissage pour $d = 50$ et $d = 150$ L/min.

2. Montre que l'énergie consommée, proportionnelle à $0{,}02d^2 \times t(d)$, s'exprime simplement en fonction de d.

3. Que peut-on en conclure sur le réglage à choisir ?

Exercice 18 – Type bac : dilution progressive

Un bac contient 60 g de produit dissous dans 200 L d'eau. On ajoute x litres d'eau pure. La concentration devient $c(x) = \dfrac{60}{200 + x}$ g/L.

1. Calcule la concentration initiale, puis après ajout de 100 L.

2. Calcule $c'(x)$ et justifie le sens de variation.

3. Quel volume d'eau faut-il ajouter pour descendre à 0,15 g/L ?

4. Peut-on atteindre une concentration nulle ?

Exercice 19 – Type bac : section de câble et pertes

La résistance d'un câble de longueur fixe est inversement proportionnelle à sa section : $R(s) = \dfrac{18}{s}$ ohms, où s est la section en mm². Le coût du câble est

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

proportionnel à la section : $4s$ euros. Les pertes annuelles coûtent $60\,R(s)$ euros.

1. Exprime le coût total $T(s)$ sur un an.

2. Calcule $T(10)$, $T(15)$ et $T(20)$.

3. Détermine la section qui minimise le coût total.

4. Que vaut alors la résistance du câble ?

Exercice 20 – Type bac : vitesse moyenne d'un aller-retour

Un véhicule de livraison parcourt 60 km à l'aller à 40 km/h, puis les mêmes 60 km au retour à 60 km/h.

1. Calcule la durée de chaque trajet, puis la durée totale.

2. Calcule la vitesse moyenne sur l'aller-retour.

3. Pourquoi n'est-elle pas égale à 50 km/h ?

4. Exprime la vitesse moyenne en fonction des deux vitesses v_1 et v_2.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).