Fonction logarithme décimal — Terminale STI2D

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

Au chapitre précédent, résoudre $1{,}06^x = 2$ demandait un balayage. Le logarithme décimal règle la question d'un coup : c'est la fonction qui « descend l'exposant », puisque $\log(a^x) = x\log a$. Il donne donc directement un temps de doublement, une demi-vie, une date de franchissement de seuil. Mais il sert aussi à LIRE les grandeurs qui s'étalent sur plusieurs décades — c'est le principe des décibels, du pH et des diagrammes de Bode, omniprésents en STI2D. Ces 20 exercices corrigés couvrent les valeurs de référence, les propriétés algébriques, la résolution de $a^x = b$ et les échelles logarithmiques, du calcul direct au problème type bac d'acoustique ou d'amplification. La difficulté est croissante : l'énoncé puis la correction détaillée s'affichent d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-sti2d/fonction-logarithme-decimal

Exercice 1 – Valeurs de référence

Le logarithme décimal est la fonction réciproque de $x \mapsto 10^x$: $\log(10^x) = x$ et $10^{\log a} = a$ pour $a > 0$.

1. Calcule $\log 1$, $\log 10$, $\log 100$ et $\log 1\,000$.

2. Calcule $\log 0{,}1$, $\log 0{,}001$ et $\log\left(10^7\right)$.

Exercice 2 – Propriétés algébriques

On donne $\log 2 \approx 0{,}301$ et $\log 3 \approx 0{,}477$.

1. Calcule $\log 6$, $\log 1{,}5$ et $\log 8$.

2. Calcule $\log 20$ et $\log 0{,}5$.

Exercice 3 – Résoudre 10^x = b

On cherche à résoudre les équations $10^x = 1\,000$, $10^x = 0{,}01$ et $10^x = 250$.

1. Résous ces trois équations.

Exercice 4 – Encadrer un logarithme

Sans calculatrice, on veut encadrer $\log 5\,000$, $\log 0{,}04$ et $\log 12\,000$ entre deux entiers consécutifs.

1. Donne les trois encadrements et justifie.

Exercice 5 – Signe et variation

On considère la fonction log sur $]0\,;+\infty[$.

1. Pour quelles valeurs de x a-t-on $\log x > 0$? $\log x < 0$?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

2. Résous $\log x = 2$ et $\log x > 3$.

Exercice 6 – Résoudre a^x = b

On reprend l'équation $1{,}06^x = 2$ du chapitre précédent, que l'on avait résolue par balayage.

1. Résous-la à l'aide du logarithme décimal.

2. Résous de même $0{,}96^x = 0{,}5$.

Exercice 7 – Temps de doublement

Une grandeur croît de 3,5% par an.

1. Calcule son temps de doublement.

2. Calcule le temps nécessaire pour qu'elle triple.

3. Compare avec l'approximation « 70 divisé par le taux ».

Exercice 8 – Demi-vie et durée de vie

L'activité d'une source décroît de 2,5% par jour.

1. Calcule sa demi-vie.

2. Calcule le temps au bout duquel il ne reste que 10% de l'activité initiale.

3. Vérifie la cohérence des deux résultats.

Exercice 9 – Simplifier des expressions

Simplifie $A = \log 4 + \log 25$, $B = \log 500 - \log 5$ et $C = 2\log 3 + \log \frac{1}{9}$.

1. Donne la valeur exacte de A, B et C.

Exercice 10 – Première échelle logarithmique

Le niveau sonore L, en décibels, est relié à l'intensité acoustique I, en W/m², par $L = 10\log \frac{I}{I_0}$ avec $I_0 = 10^{-12}$ W/m².

1. Calcule le niveau sonore pour $I = 10^{-6}$ W/m².

2. Calcule-le pour $I = 10^{-4}$ W/m².

3. De combien de décibels augmente-t-on quand l'intensité est multipliée par 100 ?

Exercice 11 – Acoustique : addition de sources

Dans un atelier, une machine produit un niveau sonore de 78 dB. On rappelle $L = 10\log \frac{I}{I_0}$, avec $I_0 = 10^{-12}$ W/m².

1. Calcule l'intensité acoustique correspondante.

2. Quel niveau obtient-on avec DEUX machines identiques ?

3. Combien de machines faudrait-il pour atteindre 88 dB ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 12 – pH d'une solution

Le pH d'une solution est défini par $\text{pH} = -\log\left[\text{H}^+\right]$, où $\left[\text{H}^+\right]$ est la concentration en ions hydrogène, en mol/L.

1. Calcule le pH d'un bain de traitement où $\left[\text{H}^+\right] = 2{,}5 \times 10^{-5}$ mol/L.

2. Calcule la concentration d'une solution de pH 3,2.

3. Quand le pH augmente de 1, comment varie la concentration ?

Exercice 13 – Seuil résolu exactement

Le nombre de composants en service d'un lot est $N(t) = 2\,000 \times 0{,}93^t$, t en années. On veut savoir quand il reste moins de 200 composants.

1. Résous l'inéquation à l'aide du logarithme.

2. Compare avec le balayage, qui donnait « la 32e année ».

Exercice 14 – Lire une échelle logarithmique

Sur un diagramme à échelle logarithmique en abscisse, les graduations correspondent aux fréquences 10, 100, 1 000 et 10 000 Hz, régulièrement espacées.

1. Pourquoi ces graduations sont-elles régulièrement espacées ?

2. Où se situe 500 Hz entre les graduations 100 et 1 000 ?

3. Quelle fréquence se trouve exactement au milieu de l'intervalle [100 ; 1 000] sur ce diagramme ?

Exercice 15 – Échelle de Richter

La magnitude d'un séisme est donnée par $M = \log \dfrac{A}{A_0}$, où A est l'amplitude mesurée et A_0 une amplitude de référence.

1. Un séisme a une amplitude 10 000 fois l'amplitude de référence. Quelle est sa magnitude ?

2. De quel facteur l'amplitude est-elle multipliée quand la magnitude augmente de 1 ? de 2 ?

3. Deux séismes ont des magnitudes 4,5 et 6,5. Compare leurs amplitudes.

Exercice 16 – Type bac : gain d'une chaîne d'amplification

Le gain en tension d'un étage d'amplification, en décibels, vaut $G = 20 \log \dfrac{U_s}{U_e}$, où U_e et U_s sont les tensions d'entrée et de sortie.

1. Calcule le gain d'un étage qui transforme 0,05 V en 1,5 V.

2. Une chaîne comporte trois étages de gains 18 dB, 24 dB et -6 dB. Quel est le gain total ?

3. Par quel facteur la tension est-elle multipliée par cette chaîne ?

4. Quel gain correspond à une tension divisée par deux ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 17 – Type bac : datation d'une source

Une source de contrôle radiographique avait une activité de 3 700 MBq à sa fabrication. Sa demi-vie est de 74 jours. Son activité mesurée aujourd'hui est de 950 MBq.

1. Exprime l'activité $A(t)$ après t jours.

2. Détermine le coefficient journalier de décroissance.

3. Depuis combien de jours la source a-t-elle été fabriquée ?

4. Quand son activité passera-t-elle sous 100 MBq ?

Exercice 18 – Type bac : atténuation d'une fibre optique

Une fibre optique atténue le signal de 0,25 dB par kilomètre. Le récepteur exige une puissance au moins égale à 1% de la puissance émise. On rappelle que l'atténuation en décibels vaut $A = 10\log\dfrac{P_e}{P_r}$.

1. Quelle atténuation totale correspond à une puissance reçue égale à 1% de la puissance émise ?

2. Quelle longueur maximale de fibre peut-on utiliser ?

3. Sur une liaison de 60 km, quel pourcentage de la puissance parvient au récepteur ?

4. Deux épissures ajoutent 0,3 dB chacune. La liaison de 60 km reste-t-elle exploitable ?

Exercice 19 – Type bac : conformité d'un rejet

Un bain de rinçage contient 45 mg/L de métal dissous. Un traitement en réduit la concentration de 18% par heure. La norme de rejet impose au plus 0,5 mg/L.

1. Exprime la concentration $C(t)$ après t heures.

2. Détermine par le calcul la durée minimale de traitement.

3. Combien de temps faut-il pour diviser la concentration par 10 ?

4. Le traitement dure 24 heures. Quelle concentration atteint-on ?

Exercice 20 – Type bac : linéariser par le logarithme

On relève la population N de bactéries dans un bain, en milliers par mL : $N(0) = 5$, $N(2) = 20$, $N(4) = 80$, $N(6) = 320$.

1. Calcule $\log N$ pour chaque relevé.

2. Montre que les points $(t\,;\log N)$ sont alignés et donne l'équation de la droite.

3. Déduis-en un modèle de la forme $N(t) = k\,a^t$.

4. Estime la population à $t = 5$ et le temps de doublement.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Valeurs de référence

$\log 1 = \log(10^0) = 0$.

$\log 10 = \log(10^1) = 1$.

$\log 100 = \log(10^2) = 2$ et $\log 1\,000 = 3$.

$\log 0{,}1 = \log(10^{-1}) = -1$.

$\log 0{,}001 = \log(10^{-3}) = -3$.

$\log\left(10^7\right) = 7$.

À retenir : le logarithme décimal d'une puissance de 10 est son EXPOSANT. C'est la définition même de la fonction.

Réponse. $\log 1 = 0 \cdot \log 10 = 1 \cdot \log 100 = 2 \cdot \log 1\,000 = 3 \cdot \log 0{,}1 = -1 \cdot \log 0{,}001 = -3 \cdot \log(10^7) = 7$.

Rappel de cours. $\log(10^n) = n$: le logarithme décimal « compte les zéros », et il est NÉGATIF pour les nombres inférieurs à 1.

Erreur fréquente. Écrire $\log 0 = 0$: le logarithme n'est défini que pour les nombres STRICTEMENT POSITIFS. $\log 0$ n'existe pas.

Correction de l'exercice 2 – Propriétés algébriques

Logarithme d'un produit : $\log(ab) = \log a + \log b$. Donc
$\log 6 = \log(2 \times 3) \approx 0{,}301 + 0{,}477 = 0{,}778$.

Logarithme d'un quotient : $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$. Donc

$\log 1{,}5 = \log \frac{3}{2} \approx 0{,}477 - 0{,}301 = 0{,}176$.

Logarithme d'une puissance : $\log(a^n) = n \log a$. Donc $\log 8 = \log(2^3) = 3 \log 2 \approx 0{,}903$.

$\log 20 = \log(2 \times 10) = \log 2 + \log 10 \approx 0{,}301 + 1 = 1{,}301$.

$\log 0{,}5 = \log \frac{1}{2} = -\log 2 \approx -0{,}301$.

Contrôle d'ordre de grandeur : 20 est entre 10 et 100, donc son logarithme doit être entre 1 et 2 ✔. Et $0{,}5 < 1$ donne bien un logarithme négatif ✔.

Réponse. $\log 6 \approx 0{,}778 \cdot \log 1{,}5 \approx 0{,}176 \cdot \log 8 \approx 0{,}903 \cdot \log 20 \approx 1{,}301 \cdot \log 0{,}5 \approx -0{,}301$.

Rappel de cours. $\log(ab) = \log a + \log b \cdot \log \frac{a}{b} = \log a - \log b \cdot \log(a^n) = n \log a$.

Erreur fréquente. Écrire $\log(2 \times 3) = \log 2 \times \log 3$: un logarithme transforme les produits en SOMMES, jamais en produits.

Correction de l'exercice 3 – Résoudre 10^x = b

Par définition, $10^x = b$ équivaut à $x = \log b$ (pour $b > 0$).

$10^x = 1\,000$ donne $x = \log 1\,000 = 3$.

$10^x = 0{,}01$ donne $x = \log 0{,}01 = -2$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$10^x = 250$ donne $x = \log 250$.

On peut le décomposer : $\log 250 = \log \frac{1\,000}{4} = 3 - \log 4 = 3 - 2\log 2 \approx 3 - 0{,}602 = 2{,}398$.

À la calculatrice, $\log 250 \approx 2{,}397\,9$ ✔.

Contrôle d'encadrement : 250 est entre $100 = 10^2$ et $1\,000 = 10^3$, donc x est entre 2 et 3 ✔.

Réponse. $x = 3 \cdot x = -2 \cdot x = \log 250 \approx 2{,}398$.

Rappel de cours. $10^x = b \Leftrightarrow x = \log b$. C'est la relation de réciprocité, valable pour tout $b > 0$.

Erreur fréquente. Diviser par 10 pour « isoler » x : l'inconnue est en exposant, seul le logarithme la fait descendre.

Correction de l'exercice 4 – Encadrer un logarithme

Méthode : on encadre le nombre entre deux puissances de 10 consécutives, puis on applique la croissance du logarithme.

$1\,000 < 5\,000 < 10\,000$, soit $10^3 < 5\,000 < 10^4$, donc $3 < \log 5\,000 < 4$.

$0{,}01 < 0{,}04 < 0{,}1$, soit $10^{-2} < 0{,}04 < 10^{-1}$, donc $-2 < \log 0{,}04 < -1$.

$10\,000 < 12\,000 < 100\,000$, donc $4 < \log 12\,000 < 5$.

Vérification à la calculatrice : $\log 5\,000 \approx 3{,}699$, $\log 0{,}04 \approx -1{,}398$, $\log 12\,000 \approx 4{,}079$ ✔.

Lecture pratique : la PARTIE ENTIÈRE du logarithme décimal donne l'ordre de grandeur. Un nombre dont le logarithme vaut 4,08 s'écrit avec 5 chiffres avant la virgule.

Réponse. $3 < \log 5\,000 < 4 \cdot -2 < \log 0{,}04 < -1 \cdot 4 < \log 12\,000 < 5$.

Rappel de cours. log est CROISSANTE : $a < b \Rightarrow \log a < \log b$. On encadre donc par les puissances de 10 voisines.

Erreur fréquente. Annoncer $-1 < \log 0{,}04 < 0$: 0,04 est plus petit que 0,1, son logarithme est donc inférieur à -1.

Correction de l'exercice 5 – Signe et variation

log est croissante et s'annule en $x = 1$ (car $\log 1 = 0$).

Donc $\log x > 0$ pour $x > 1$, et $\log x < 0$ pour $0 < x < 1$.

$\log x = 2$ équivaut à $x = 10^2 = 100$.

$\log x > 3$ équivaut à $x > 10^3$, soit $x > 1\,000$ (la fonction étant croissante, le sens de l'inégalité est conservé).

Contrôle : $\log 1\,001 \approx 3{,}0004 > 3$ ✔ et $\log 999 \approx 2{,}9996 < 3$ ✔.

À retenir : « passer à la puissance de 10 » dans une inéquation conserve le sens, puisque $x \mapsto 10^x$ est croissante elle aussi.

Réponse. $\log x > 0 \Leftrightarrow x > 1$ et $\log x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1 \cdot \log x = 2 \Leftrightarrow x = 100 \cdot \log x > 3 \Leftrightarrow x > 1\,000$.

Rappel de cours. $\log x = k \Leftrightarrow x = 10^k$, et l'inéquation garde son sens car log est croissante.

Erreur fréquente. Oublier la condition $x > 0$: l'ensemble des solutions de $\log x < 0$ est $]0\,;1[$, pas $]-\infty\,;1[$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 6 – Résoudre a^x = b

On applique le logarithme aux deux membres : $\log\left(1{,}06^{x}\right) = \log 2$.

La propriété $\log(a^x) = x\log a$ fait descendre l'exposant : $x\log 1{,}06 = \log 2$.

Donc $x = \dfrac{\log 2}{\log 1{,}06} \approx \dfrac{0{,}301\,03}{0{,}025\,306} \approx 11{,}896$.

On retrouve les 11,9 ans obtenus par balayage — mais en une ligne ✔.

Pour $0{,}96^{x} = 0{,}5$: $x = \dfrac{\log 0{,}5}{\log 0{,}96} = \dfrac{-0{,}301\,03}{-0{,}017\,729} \approx 16{,}98$.

Les deux logarithmes sont négatifs, leur quotient est donc positif ✔ — cohérent avec une durée.

Interprétation : une grandeur qui perd 4% par jour est divisée par deux en 17 jours environ.

Réponse. $x = \dfrac{\log 2}{\log 1{,}06} \approx 11{,}90 \cdot x = \dfrac{\log 0{,}5}{\log 0{,}96} \approx 16{,}98$.

Rappel de cours. $a^x = b \Leftrightarrow x = \dfrac{\log b}{\log a}$: c'est LA formule du chapitre, valable pour $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$.

Erreur fréquente. Écrire $x = \log \dfrac{b}{a}$ au lieu de $\dfrac{\log b}{\log a}$: ici cela donnerait $\log \frac{2}{1{,}06} \approx 0{,}276$, au lieu de 11,9.

Correction de l'exercice 7 – Temps de doublement

Doublement : on résout $1{,}035^{x} = 2$, donc $x = \dfrac{\log 2}{\log 1{,}035}$.

$\log 1{,}035 \approx 0{,}014\,940$, donc $x \approx \dfrac{0{,}301\,03}{0{,}014\,940} \approx 20{,}15$ ans.

Triplement : $x = \dfrac{\log 3}{\log 1{,}035} \approx \dfrac{0{,}477\,12}{0{,}014\,940} \approx 31{,}93$ ans.

Approximation usuelle : $\dfrac{70}{3{,}5} = 20$ ans, très proche des 20,15 ans exacts ✔.

Pourquoi 70 ? Parce que le temps de doublement vaut $\dfrac{\log 2}{\log(1+t)}$, et que pour un petit taux t, $\log(1+t) \approx \dfrac{t}{230}$... l'usage retient simplement que $\frac{70}{t\%}$ donne une bonne estimation.

Observation intéressante : tripler ne demande pas 1,5 fois plus longtemps que doubler, mais environ 1,58 fois, car $\log 3 \approx 1{,}585\log 2$.

Réponse. Doublement en ≈ 20,15 ans · triplement en ≈ 31,93 ans · l'approximation $\frac{70}{3{,}5} = 20$ ans est excellente.

Rappel de cours. Temps de doublement = $\dfrac{\log 2}{\log(1+t)}$. Il ne dépend PAS de la valeur initiale.

Erreur fréquente. Croire que le temps de triplement est 1,5 fois celui du doublement : c'est $\frac{\log 3}{\log 2} \approx 1{,}58$ fois.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l'exercice 8 – Demi-vie et durée de vie

Coefficient journalier : 0,975. Demi-vie : $0{,}975^x = 0{,}5$, donc $x = \dfrac{\log 0{,}5}{\log 0{,}975}$.

$\log 0{,}975 \approx -0{,}010\,995$, donc $x \approx \dfrac{-0{,}301\,03}{-0{,}010\,995} \approx 27{,}38$ jours.

Pour 10% : $0{,}975^x = 0{,}1$, donc $x = \dfrac{\log 0{,}1}{\log 0{,}975} = \dfrac{-1}{-0{,}010\,995} \approx 90{,}95$ jours.

Cohérence : passer à 10% demande $\dfrac{\log 0{,}1}{\log 0{,}5} = \dfrac{1}{0{,}301} \approx 3{,}32$ demi-vies.

Or $3{,}32 \times 27{,}38 \approx 90{,}9$ jours ✔ Les deux résultats concordent.

À retenir : diviser par 10 prend toujours environ 3,3 demi-vies, quelle que soit la substance. C'est une règle très utile en radioprotection.

Réponse. Demi-vie ≈ 27,4 jours · il reste 10% au bout de ≈ 91 jours · soit 3,32 demi-vies ✔.

Rappel de cours. $\dfrac{\log 0{,}1}{\log 0{,}5} \approx 3{,}32$: passer à un dixième prend toujours 3,32 demi-vies.

Erreur fréquente. Multiplier la demi-vie par 10 pour arriver à 10% : on annoncerait 274 jours au lieu de 91.

Correction de l'exercice 9 – Simplifier des expressions

$A = \log(4 \times 25) = \log 100 = 2$.

$B = \log \dfrac{500}{5} = \log 100 = 2$.

Pour C : $2\log 3 = \log(3^2) = \log 9$, et $\log \dfrac{1}{9} = -\log 9$.

Donc $C = \log 9 - \log 9 = 0$.

Contrôle numérique : $A \approx 0{,}602 + 1{,}398 = 2$ ✔ ; $B \approx 2{,}699 - 0{,}699 = 2$ ✔ ; $C \approx 0{,}954 - 0{,}954 = 0$ ✔.

Leçon de méthode : on cherche toujours à REGROUPER en un seul logarithme avant de calculer. Les valeurs approchées ne servent qu'au contrôle.

Réponse. $A = 2 \cdot B = 2 \cdot C = 0$.

Rappel de cours. $n\log a = \log(a^n)$ et $\log \dfrac{1}{a} = -\log a$: ces deux formes permettent de tout regrouper.

Erreur fréquente. Écrire $\log 4 + \log 25 = \log 29$: c'est le PRODUIT qui apparaît dans le logarithme d'une somme de logarithmes, donc $\log 100$.

Correction de l'exercice 10 – Première échelle logarithmique

$\dfrac{I}{I_0} = \dfrac{10^{-6}}{10^{-12}} = 10^6$, donc $L = 10\log(10^6) = 10 \times 6 = 60$ dB.

Pour $I = 10^{-4}$: $\dfrac{I}{I_0} = 10^8$, donc $L = 10 \times 8 = 80$ dB.

L'intensité a été multipliée par 100 et le niveau a augmenté de 20 dB.

Démonstration générale : si I devient $100\,I$, alors $L' = 10\log \dfrac{100I}{I_0} = 10\left(\log 100 + \log \dfrac{I}{I_0}\right) = 20 + L$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Multiplier l'intensité par 100 ajoute donc TOUJOURS 20 dB, quel que soit le niveau de départ.

C'est tout l'intérêt d'une échelle logarithmique : elle transforme des multiplications (qui couvrent douze décades pour l'oreille humaine) en additions lisibles de 0 à 120 dB.

Réponse. 60 dB pour 10^{-6} W/m² · 80 dB pour 10^{-4} W/m² · multiplier l'intensité par 100 ajoute 20 dB.

Rappel de cours. $L = 10\log\dfrac{I}{I_0}$: chaque facteur 10 sur l'intensité ajoute 10 dB, chaque facteur 100 en ajoute 20.

Erreur fréquente. Croire qu'un son de 80 dB est « un tiers plus fort » qu'un son de 60 dB : son intensité est CENT fois plus grande.

Correction de l'exercice 11 – Acoustique : addition de sources

On inverse la formule : $78 = 10\log\dfrac{I}{I_0}$ donne $\log\dfrac{I}{I_0} = 7{,}8$, donc $\dfrac{I}{I_0} = 10^{7{,}8}$.

$I = 10^{-12} \times 10^{7{,}8} = 10^{-4{,}2} \approx 6{,}31 \times 10^{-5}$ W/m².

Deux machines : les INTENSITÉS s'additionnent, donc $I' = 2I$.

$L' = 10\log\dfrac{2I}{I_0} = 10\log 2 + L \approx 3{,}01 + 78 \approx 81{,}0$ dB.

Doubler le nombre de sources ajoute donc environ 3 dB — un résultat à connaître.

Pour atteindre 88 dB, il faut gagner 10 dB, soit multiplier l'intensité par $10^1 = 10$.

Il faudrait donc 10 machines identiques.

Contrôle : $L = 10\log\dfrac{10I}{I_0} = 10 + 78 = 88$ dB ✔.

Remarque pour la prévention : passer de 78 à 88 dB double la sensation de bruit perçue, mais multiplie par 10 l'énergie sonore reçue. Au-delà de 85 dB, la protection auditive devient obligatoire.

Réponse. $I = 10^{-4{,}2} \approx 6{,}31 \times 10^{-5}$ W/m² · deux machines : ≈ 81 dB (+3 dB) · il faudrait 10 machines pour atteindre 88 dB.

Rappel de cours. Les intensités s'additionnent, pas les décibels : n sources identiques donnent $L + 10\log n$.

Erreur fréquente. Additionner les niveaux : deux machines à 78 dB ne font pas 156 dB (ce qui dépasserait le seuil de douleur), mais 81 dB.

Correction de l'exercice 12 – pH d'une solution

$\text{pH} = -\log\left(2{,}5 \times 10^{-5}\right) = -\left(\log 2{,}5 + \log 10^{-5}\right)$.

$\log 2{,}5 \approx 0{,}398$ et $\log 10^{-5} = -5$, donc $\text{pH} \approx -(0{,}398 - 5) = 4{,}602$.

Le pH vaut donc environ 4,6 : la solution est acide.

Réciproquement, pH = 3,2 donne $\log\left[\text{H}^+\right] = -3{,}2$, donc $\left[\text{H}^+\right] = 10^{-3{,}2}$.

$10^{-3{,}2} \approx 6{,}31 \times 10^{-4}$ mol/L.

Si le pH augmente de 1, alors $\log\left[\text{H}^+\right]$ diminue de 1, donc la concentration est DIVISÉE par 10.

Contrôle : un pH de 4,2 correspondrait à $10^{-4{,}2} \approx 6{,}31 \times 10^{-5}$ mol/L, soit exactement le dixième de la valeur trouvée pour 3,2 ✔.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Conséquence en atelier : un bain dont le pH dérive de 4,6 à 3,6 est devenu DIX fois plus acide, ce que l'échelle du pH masque à l'œil nu.

Réponse. pH $\approx 4{,}6 \cdot \left[\mathrm{H}^+\right] = 10^{-3{,}2} \approx 6{,}31 \times 10^{-4}$ mol/L · +1 de pH ⇒ concentration divisée par 10.

Rappel de cours. $\mathrm{pH} = -\log\left[\mathrm{H}^+\right]$ et $\left[\mathrm{H}^+\right] = 10^{-\mathrm{pH}}$: une unité de pH vaut un facteur 10.

Erreur fréquente. Oublier le signe moins : un pH est POSITIF alors que le logarithme d'une concentration (très petite) est négatif.

Correction de l'exercice 13 – Seuil résolu exactement

On résout $2\,000 \times 0{,}93^t < 200$, soit $0{,}93^t < 0{,}1$.

On applique le logarithme, qui est CROISSANT : $\log\left(0{,}93^t\right) < \log 0{,}1$, soit $t \log 0{,}93 < -1$.

Attention : $\log 0{,}93 \approx -0{,}031\,517$ est NÉGATIF. En divisant par ce nombre, l'inégalité change de sens.

$t > \dfrac{-1}{-0{,}031\,517} \approx 31{,}73$.

Le seuil est donc franchi à partir de $t \approx 31{,}73$ années, c'est-à-dire au cours de la 32e année.

Cohérence avec le balayage : celui-ci donnait le premier ENTIER convenable, soit 32 ✔. Le logarithme précise la date : environ 31 ans et 9 mois.

Avantage du logarithme : une seule ligne de calcul, une valeur exacte, et aucun risque d'oublier une valeur intermédiaire.

Réponse. $t > \dfrac{\log 0{,}1}{\log 0{,}93} \approx 31{,}73$ ans, soit au cours de la 32e année — conforme au balayage, en plus précis.

Rappel de cours. Diviser par $\log a$ quand $0 < a < 1$ INVERSE le sens de l'inégalité, puisque $\log a < 0$.

Erreur fréquente. Garder le sens de l'inégalité : on conclurait $t < 31{,}73$, soit exactement le contraire.

Correction de l'exercice 14 – Lire une échelle logarithmique

Sur une échelle logarithmique, la position d'une valeur f est proportionnelle à $\log f$.

Or $\log 10 = 1$, $\log 100 = 2$, $\log 1\,000 = 3$, $\log 10\,000 = 4$: les positions sont 1, 2, 3, 4 — régulièrement espacées ✔. Chaque intervalle est une DÉCADE (facteur 10).

Pour 500 Hz : $\log 500 \approx 2{,}699$. La position relative dans la décade $[2\,;3]$ est 0,699, soit environ 70% de l'intervalle.

Le point 500 Hz est donc situé aux 70% de l'intervalle, nettement plus près de 1 000 que de 100 — ce qui surprend au premier abord.

Milieu géométrique de l'intervalle : la position 2,5 correspond à $f = 10^{2{,}5} \approx 316{,}2$ Hz.

C'est la moyenne GÉOMÉTRIQUE de 100 et 1 000 : $\sqrt{100 \times 1\,000} = \sqrt{100\,000} \approx 316{,}2$ ✔.

À retenir : sur une échelle logarithmique, le milieu d'un intervalle est la moyenne géométrique des bornes, pas leur moyenne arithmétique (550 Hz, qui serait aux 74% de l'intervalle).

Réponse. Les graduations sont espacées régulièrement car leurs logarithmes sont 1, 2, 3, 4 · 500 Hz se situe aux 70% de la décade $[100\,;1\,000]$ · le milieu correspond à

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$10^{2,5} \approx 316$ Hz.

Rappel de cours. Échelle logarithmique : la position dépend de $\log f$. Le milieu d'un intervalle est la moyenne GÉOMÉTRIQUE des bornes.

Erreur fréquente. Placer 500 Hz au milieu de l'intervalle $[100\,;1\,000]$: cette position correspond à 316 Hz.

Correction de l'exercice 15 – Échelle de Richter

$M = \log 10\,000 = \log\left(10^4\right) = 4$. La magnitude vaut 4.

Si la magnitude augmente de 1, alors $\log \dfrac{A}{A_0}$ augmente de 1, donc $\dfrac{A}{A_0}$ est multiplié par 10.

Une magnitude +2 correspond donc à une amplitude multipliée par $10^2 = 100$.

Comparaison des deux séismes : l'écart de magnitude est $6{,}5 - 4{,}5 = 2$.

L'amplitude du second est donc 100 fois celle du premier.

Calcul détaillé : $\dfrac{A_2}{A_1} = \dfrac{10^{6,5}}{10^{4,5}} = 10^2 = 100$ ✔.

Attention à une confusion fréquente : l'ÉNERGIE libérée, elle, suit une autre loi (multipliée par environ 31,6 par unité de magnitude, soit $10^{1,5}$). Un écart de 2 correspond alors à un facteur 1 000 sur l'énergie.

Ordre de grandeur à retenir : une magnitude 6,5 n'est pas « 1,4 fois pire » qu'une magnitude 4,5, mais cent fois plus ample et mille fois plus énergétique.

Réponse. $M = 4$ · +1 de magnitude ⇒ amplitude ×10, +2 ⇒ ×100 · le séisme de magnitude 6,5 a une amplitude 100 fois plus grande.

Rappel de cours. Une échelle logarithmique transforme un facteur multiplicatif en écart ADDITIF : +1 de magnitude, c'est ×10 sur l'amplitude.

Erreur fréquente. Comparer les magnitudes par différence relative ($\frac{6,5}{4,5} \approx 1,4$) : sur une échelle logarithmique, seule la DIFFÉRENCE a un sens.

Correction de l'exercice 16 – Type bac : gain d'une chaîne d'amplification

$\dfrac{U_s}{U_e} = \dfrac{1,5}{0,05} = 30$, donc $G = 20\log 30$.

$\log 30 = \log 3 + \log 10 \approx 0{,}477 + 1 = 1{,}477$, donc $G \approx 20 \times 1{,}477 \approx 29{,}5$ dB.

Pour une chaîne, les tensions se MULTIPLIENT, donc les gains en décibels s'ADDITIONNENT : $G_{\text{total}} = 18 + 24 - 6 = 36$ dB.

C'est la grande commodité des décibels : une multiplication de facteurs devient une addition de gains.

Facteur d'amplification : $36 = 20\log k$ donne $\log k = 1{,}8$, donc $k = 10^{1,8} \approx 63{,}1$.

La tension est donc multipliée par environ 63.

Contrôle : les trois étages multiplient respectivement par $10^{0,9} \approx 7{,}94$, $10^{1,2} \approx 15{,}85$ et $10^{-0,3} \approx 0{,}501$. Produit : $7{,}94 \times 15{,}85 \times 0{,}501 \approx 63{,}1$ ✔.

Tension divisée par deux : $G = 20\log 0{,}5 \approx 20 \times (-0{,}301) \approx -6{,}02$ dB.

D'où le repère universel en électronique : −6 dB, c'est « moitié de la tension » (et −3 dB, moitié de la PUISSANCE, car la puissance utilise le facteur 10 et non 20).

Réponse. $G \approx 29{,}5$ dB · gain total 36 dB · tension multipliée par $10^{1,8} \approx 63$ · une division

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

par deux correspond à -6 dB.

Rappel de cours. Gains en cascade : les décibels s'ADDITIONNENT.
$G = 20\log k \Leftrightarrow k = 10^{G/20}$.

Erreur fréquente. Multiplier les gains en décibels : $18 \times 24 \times (-6)$ n'a aucun sens. Ce sont les FACTEURS qui se multiplient, les décibels qui s'ajoutent.

Correction de l'exercice 17 – Type bac : datation d'une source

Demi-vie de 74 jours : $A(t) = 3\,700 \times 0{,}5^{t/74}$ MBq.

Coefficient journalier : $a = 0{,}5^{1/74}$. Comme $\log a = \dfrac{\log 0{,}5}{74} \approx \dfrac{-0{,}301\,03}{74} \approx -0{,}004\,068$, on a $a \approx 10^{-0{,}004\,068} \approx 0{,}990\,68$.

Soit une baisse d'environ 0,93% par jour.

Âge de la source : on résout $3\,700 \times 0{,}5^{t/74} = 950$, soit $0{,}5^{t/74} = \dfrac{950}{3\,700} \approx 0{,}256\,76$.

En prenant le logarithme : $\dfrac{t}{74}\log 0{,}5 = \log 0{,}256\,76$.

$\log 0{,}256\,76 \approx -0{,}590\,5$, donc $\dfrac{t}{74} = \dfrac{-0{,}590\,2}{-0{,}301\,03} \approx 1{,}962$.

$t \approx 1{,}962 \times 74 \approx 145{,}2$ jours. La source a donc été fabriquée il y a environ 145 jours.

Contrôle : 1,96 demi-vie, c'est un peu moins de deux, et $\dfrac{3\,700}{4} = 925$ MBq après exactement deux demi-vies ✔ cohérent avec les 950 MBq mesurés.

Passage sous 100 MBq : $0{,}5^{t/74} < \dfrac{100}{3\,700} \approx 0{,}027\,027$.

$\dfrac{t}{74} > \dfrac{\log 0{,}027\,027}{\log 0{,}5} = \dfrac{-1{,}568\,2}{-0{,}301\,03} \approx 5{,}209$, donc $t > 385{,}5$ jours.

L'activité passera sous 100 MBq au bout d'environ 385 jours après la fabrication, soit dans $385 - 145 = 240$ jours environ.

Réponse. $A(t) = 3\,700 \times 0{,}5^{t/74}$ · coefficient journalier $\approx 0{,}9907$ ($-0{,}93\%$/jour) · source fabriquée il y a ≈ 145 jours · activité sous 100 MBq à $t \approx 385$ jours, soit dans 240 jours.

Rappel de cours. Modèle à demi-vie T : $A(t) = A_0\,0{,}5^{t/T}$, et $\dfrac{t}{T} = \dfrac{\log(A/A_0)}{\log 0{,}5}$ donne le nombre de demi-vies écoulées.

Erreur fréquente. Oublier de multiplier par 74 à la fin : on annoncerait un âge de 1,96 jour au lieu de 145 jours.

Correction de l'exercice 18 – Type bac : atténuation d'une fibre optique

Si $P_r = 0{,}01\,P_e$, alors $\dfrac{P_e}{P_r} = 100$, donc $A = 10\log 100 = 20$ dB.

L'atténuation admissible est donc de 20 dB au maximum.

Longueur maximale : $\dfrac{20}{0{,}25} = 80$ km.

Pour 60 km : $A = 0{,}25 \times 60 = 15$ dB.

On inverse la formule : $15 = 10\log\dfrac{P_e}{P_r}$ donne $\dfrac{P_e}{P_r} = 10^{1{,}5} \approx 31{,}62$.

Donc $\dfrac{P_r}{P_e} = \dfrac{1}{31{,}62} \approx 0{,}031\,6$, soit environ 3,16% de la puissance émise.

Ce résultat est bien supérieur au 1% exigé ✔ la liaison est exploitable avec une marge de

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

5 dB.

Avec deux épissures : $A = 15 + 0{,}3 + 0{,}3 = 15{,}6$ dB, toujours inférieur aux 20 dB admissibles.

Puissance reçue : $10^{1{,}56} \approx 36{,}31$, donc $\frac{P_r}{P_e} \approx 2{,}75\%$ — encore au-dessus du 1% requis.

Conclusion : la liaison reste exploitable, avec une marge de $20 - 15{,}6 = 4{,}4$ dB. On pourrait ajouter jusqu'à 14 épissures supplémentaires ($4{,}4 \div 0{,}3 \approx 14{,}7$) avant d'atteindre la limite.

Réponse. Atténuation admissible 20 dB · longueur maximale 80 km · à 60 km, ≈ 3,16% de la puissance arrive · avec les épissures, 15,6 dB et ≈ 2,75% : liaison exploitable (marge 4,4 dB).

Rappel de cours. Les atténuations en décibels s'ADDITIONNENT le long d'une liaison, et $\frac{P_r}{P_e} = 10^{-A/10}$.

Erreur fréquente. Additionner les pourcentages de puissance : 3,16% et 2,75% ne s'additionnent pas, ce sont deux scénarios différents de la même liaison.

Correction de l'exercice 19 – Type bac : conformité d'un rejet

Baisse de 18% par heure : $C(t) = 45 \times 0{,}82^t$ mg/L.

Norme : $45 \times 0{,}82^t \leq 0{,}5$, soit $0{,}82^t \leq \frac{0{,}5}{45} \approx 0{,}011\,111$.

On applique le logarithme : $t \log 0{,}82 \leq \log 0{,}011\,111$.

$\log 0{,}82 \approx -0{,}086\,186$ et $\log 0{,}011\,111 \approx -1{,}954\,2$.

En divisant par $\log 0{,}82$ (négatif, donc l'inégalité s'inverse) : $t \geq \frac{-1{,}954\,2}{-0{,}086\,186} \approx 22{,}67$ heures.

Il faut donc au moins 22,67 heures, soit environ 22 h 40 min de traitement.

Division par 10 : $0{,}82^t = 0{,}1$ donne $t = \frac{-1}{-0{,}086\,186} \approx 11{,}60$ heures.

Cohérence : passer de 45 à 0,5 mg/L, c'est diviser par 90, soit un peu moins de deux divisions par 10 (facteur 100). Et $2 \times 11{,}60 = 23{,}2$ heures, proche des 22,67 trouvées ✔.

Après 24 heures : $0{,}82^{24} \approx 0{,}008\,54$, donc $C(24) \approx 45 \times 0{,}008\,54 \approx 0{,}384$ mg/L.

$0{,}384 < 0{,}5$: le rejet est CONFORME, avec une marge de $24 - 22{,}67 \approx 1{,}3$ heure.

Réponse. $C(t) = 45 \times 0{,}82^t$ · durée minimale ≈ 22,67 h (soit 22 h 40 min) · division par 10 en ≈ 11,6 h · après 24 h, $C \approx 0{,}384$ mg/L : conforme.

Rappel de cours. Le temps de division par 10 est $\frac{-1}{\log a}$: constant, comme la demi-vie.

Erreur fréquente. Arrondir la durée à 22 heures : $C(22) \approx 0{,}57$ mg/L, au-dessus de la norme. Un seuil de conformité s'arrondit toujours vers le HAUT.

Correction de l'exercice 20 – Type bac : linéariser par le logarithme

$\log 5 \approx 0{,}699$; $\log 20 \approx 1{,}301$; $\log 80 \approx 1{,}903$; $\log 320 \approx 2{,}505$.

Écarts successifs : $1{,}301 - 0{,}699 = 0{,}602$; $1{,}903 - 1{,}301 = 0{,}602$; $2{,}505 - 1{,}903 = 0{,}602$.

Les écarts sont CONSTANTS pour un pas de 2 en abscisse : les points $(t\,;\log N)$ sont donc alignés.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Coefficient directeur : $\dfrac{0{,}602}{2} = 0{,}301$. Ordonnée à l'origine : $\log N(0) \approx 0{,}699$.

Équation : $\log N = 0{,}301\,t + 0{,}699$.

On revient à N en passant à la puissance de 10 : $N = 10^{0{,}301t\,+\,0{,}699} = 10^{0{,}699} \times \left(10^{0{,}301}\right)^{t}$.

Or $10^{0{,}699} \approx 5$ et $10^{0{,}301} \approx 2$, donc $N(t) \approx 5 \times 2^{t}$.

Le modèle est donc un DOUBLEMENT par unité de temps : le temps de doublement vaut exactement 1 (ici une heure, selon l'unité de l'énoncé).

Estimation à $t = 5$: $N(5) = 5 \times 2^{5} = 160$ milliers par mL.

Contrôle d'encadrement : $N(4) = 80$ et $N(6) = 320$, et 160 est bien la moyenne GÉOMÉTRIQUE des deux ($\sqrt{80 \times 320} = \sqrt{25\,600} = 160$) ✔.

Méthode générale à retenir : un nuage de points qui s'incurve peut devenir ALIGNÉ après passage au logarithme. C'est le changement de variable du chapitre de statistiques, et il révèle un modèle exponentiel.

Réponse. $\log N$: 0,699 ; 1,301 ; 1,903 ; 2,505, d'écarts constants 0,602 · droite $\log N = 0{,}301t + 0{,}699$ · modèle $N(t) = 5 \times 2^{t}$ · $N(5) = 160$ et doublement en 1 unité de temps.

Rappel de cours. $N = k\,a^{t} \Leftrightarrow \log N = \log k + t \log a$: le logarithme transforme un modèle exponentiel en modèle AFFINE.

Erreur fréquente. Ajuster directement le nuage $(t\,;N)$ par une droite : il est incurvé, l'ajustement affine n'a de sens qu'APRÈS passage au logarithme.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).