Fonction logarithme décimal — Terminale STI2D

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés

Présentation

Au chapitre précédent, résoudre $1{,}06^x = 2$ demandait un balayage. Le logarithme décimal règle la question d'un coup : c'est la fonction qui « descend l'exposant », puisque $\log(a^x) = x\log a$. Il donne donc directement un temps de doublement, une demi-vie, une date de franchissement de seuil. Mais il sert aussi à LIRE les grandeurs qui s'étalent sur plusieurs décades — c'est le principe des décibels, du pH et des diagrammes de Bode, omniprésents en STI2D. Ces 20 exercices corrigés couvrent les valeurs de référence, les propriétés algébriques, la résolution de $a^x = b$ et les échelles logarithmiques, du calcul direct au problème type bac d'acoustique ou d'amplification. La difficulté est croissante : l'énoncé puis la correction détaillée s'affichent d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables : mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-sti2d/fonction-logarithme-decimal

Exercice 1 – Valeurs de référence

Le logarithme décimal est la fonction réciproque de $x \mapsto 10^x$: $\log(10^x) = x$ et $10^{\log a} = a$ pour $a > 0$.

1. Calcule $\log 1$, $\log 10$, $\log 100$ et $\log 1\,000$.

2. Calcule $\log 0{,}1$, $\log 0{,}001$ et $\log\left(10^7\right)$.

Exercice 2 – Propriétés algébriques

On donne $\log 2 \approx 0{,}301$ et $\log 3 \approx 0{,}477$.

1. Calcule $\log 6$, $\log 1{,}5$ et $\log 8$.

2. Calcule $\log 20$ et $\log 0{,}5$.

Exercice 3 – Résoudre 10^x = b

On cherche à résoudre les équations $10^x = 1\,000$, $10^x = 0{,}01$ et $10^x = 250$.

1. Résous ces trois équations.

Exercice 4 – Encadrer un logarithme

Sans calculatrice, on veut encadrer $\log 5\,000$, $\log 0{,}04$ et $\log 12\,000$ entre deux entiers consécutifs.

1. Donne les trois encadrements et justifie.

Exercice 5 – Signe et variation

On considère la fonction log sur $]0\,;+\infty[$.

1. Pour quelles valeurs de x a-t-on $\log x > 0$? $\log x < 0$?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

2. Résous $\log x = 2$ et $\log x > 3$.

Exercice 6 – Résoudre a^x = b

On reprend l'équation $1{,}06^x = 2$ du chapitre précédent, que l'on avait résolue par balayage.

1. Résous-la à l'aide du logarithme décimal.

2. Résous de même $0{,}96^x = 0{,}5$.

Exercice 7 – Temps de doublement

Une grandeur croît de 3,5% par an.

1. Calcule son temps de doublement.

2. Calcule le temps nécessaire pour qu'elle triple.

3. Compare avec l'approximation « 70 divisé par le taux ».

Exercice 8 – Demi-vie et durée de vie

L'activité d'une source décroît de 2,5% par jour.

1. Calcule sa demi-vie.

2. Calcule le temps au bout duquel il ne reste que 10% de l'activité initiale.

3. Vérifie la cohérence des deux résultats.

Exercice 9 – Simplifier des expressions

Simplifie $A = \log 4 + \log 25$, $B = \log 500 - \log 5$ et $C = 2\log 3 + \log \frac{1}{9}$.

1. Donne la valeur exacte de A, B et C.

Exercice 10 – Première échelle logarithmique

Le niveau sonore L, en décibels, est relié à l'intensité acoustique I, en W/m², par $L = 10\log \frac{I}{I_0}$ avec $I_0 = 10^{-12}$ W/m².

1. Calcule le niveau sonore pour $I = 10^{-6}$ W/m².

2. Calcule-le pour $I = 10^{-4}$ W/m².

3. De combien de décibels augmente-t-on quand l'intensité est multipliée par 100 ?

Exercice 11 – Acoustique : addition de sources

Dans un atelier, une machine produit un niveau sonore de 78 dB. On rappelle $L = 10\log \frac{I}{I_0}$, avec $I_0 = 10^{-12}$ W/m².

1. Calcule l'intensité acoustique correspondante.

2. Quel niveau obtient-on avec DEUX machines identiques ?

3. Combien de machines faudrait-il pour atteindre 88 dB ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 12 – pH d'une solution

Le pH d'une solution est défini par $\text{pH} = -\log\left[\text{H}^+\right]$, où $\left[\text{H}^+\right]$ est la concentration en ions hydrogène, en mol/L.

1. Calcule le pH d'un bain de traitement où $\left[\text{H}^+\right] = 2{,}5 \times 10^{-5}$ mol/L.

2. Calcule la concentration d'une solution de pH 3,2.

3. Quand le pH augmente de 1, comment varie la concentration ?

Exercice 13 – Seuil résolu exactement

Le nombre de composants en service d'un lot est $N(t) = 2\,000 \times 0{,}93^t$, t en années. On veut savoir quand il reste moins de 200 composants.

1. Résous l'inéquation à l'aide du logarithme.

2. Compare avec le balayage, qui donnait « la 32e année ».

Exercice 14 – Lire une échelle logarithmique

Sur un diagramme à échelle logarithmique en abscisse, les graduations correspondent aux fréquences 10, 100, 1 000 et 10 000 Hz, régulièrement espacées.

1. Pourquoi ces graduations sont-elles régulièrement espacées ?

2. Où se situe 500 Hz entre les graduations 100 et 1 000 ?

3. Quelle fréquence se trouve exactement au milieu de l'intervalle [100 ; 1 000] sur ce diagramme ?

Exercice 15 – Échelle de Richter

La magnitude d'un séisme est donnée par $M = \log \dfrac{A}{A_0}$, où A est l'amplitude mesurée et A_0 une amplitude de référence.

1. Un séisme a une amplitude 10 000 fois l'amplitude de référence. Quelle est sa magnitude ?

2. De quel facteur l'amplitude est-elle multipliée quand la magnitude augmente de 1 ? de 2 ?

3. Deux séismes ont des magnitudes 4,5 et 6,5. Compare leurs amplitudes.

Exercice 16 – Type bac : gain d'une chaîne d'amplification

Le gain en tension d'un étage d'amplification, en décibels, vaut $G = 20 \log \dfrac{U_s}{U_e}$, où U_e et U_s sont les tensions d'entrée et de sortie.

1. Calcule le gain d'un étage qui transforme 0,05 V en 1,5 V.

2. Une chaîne comporte trois étages de gains 18 dB, 24 dB et -6 dB. Quel est le gain total ?

3. Par quel facteur la tension est-elle multipliée par cette chaîne ?

4. Quel gain correspond à une tension divisée par deux ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 17 – Type bac : datation d'une source

Une source de contrôle radiographique avait une activité de 3 700 MBq à sa fabrication. Sa demi-vie est de 74 jours. Son activité mesurée aujourd'hui est de 950 MBq.

1. Exprime l'activité $A(t)$ après t jours.

2. Détermine le coefficient journalier de décroissance.

3. Depuis combien de jours la source a-t-elle été fabriquée ?

4. Quand son activité passera-t-elle sous 100 MBq ?

Exercice 18 – Type bac : atténuation d'une fibre optique

Une fibre optique atténue le signal de 0,25 dB par kilomètre. Le récepteur exige une puissance au moins égale à 1% de la puissance émise. On rappelle que l'atténuation en décibels vaut $A = 10\log\dfrac{P_e}{P_r}$.

1. Quelle atténuation totale correspond à une puissance reçue égale à 1% de la puissance émise ?

2. Quelle longueur maximale de fibre peut-on utiliser ?

3. Sur une liaison de 60 km, quel pourcentage de la puissance parvient au récepteur ?

4. Deux épissures ajoutent 0,3 dB chacune. La liaison de 60 km reste-t-elle exploitable ?

Exercice 19 – Type bac : conformité d'un rejet

Un bain de rinçage contient 45 mg/L de métal dissous. Un traitement en réduit la concentration de 18% par heure. La norme de rejet impose au plus 0,5 mg/L.

1. Exprime la concentration $C(t)$ après t heures.

2. Détermine par le calcul la durée minimale de traitement.

3. Combien de temps faut-il pour diviser la concentration par 10 ?

4. Le traitement dure 24 heures. Quelle concentration atteint-on ?

Exercice 20 – Type bac : linéariser par le logarithme

On relève la population N de bactéries dans un bain, en milliers par mL : $N(0) = 5$, $N(2) = 20$, $N(4) = 80$, $N(6) = 320$.

1. Calcule $\log N$ pour chaque relevé.

2. Montre que les points $(t\,;\log N)$ sont alignés et donne l'équation de la droite.

3. Déduis-en un modèle de la forme $N(t) = k\,a^t$.

4. Estime la population à $t = 5$ et le temps de doublement.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).