Fonction logarithme népérien — Terminale STI2D

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

Au chapitre précédent, on savait décrire une décharge par $u(t) = 12e^{-t/\tau}$, mais pas calculer exactement quand elle passerait sous un seuil : il fallait balayer. Le logarithme népérien règle la question, car c'est la fonction RÉCIPROQUE de l'exponentielle : $e^x = b \Leftrightarrow x = \ln b$. De là découlent le temps de demi-vie exact, la durée d'un refroidissement, le dimensionnement d'une constante de temps. Ces 20 exercices corrigés installent les propriétés algébriques ($\ln(ab) = \ln a + \ln b$), la dérivée $\frac{1}{x}$, les limites en 0^+ et $+\infty$, les croissances comparées, puis les mettent au service des modèles RC et thermiques du bac. La difficulté est croissante : l'énoncé puis la correction détaillée s'affichent d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables : mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-sti2d/fonction-logarithme-neperien

Exercice 1 – Valeurs de référence

Le logarithme népérien est la fonction réciproque de l'exponentielle : $\ln(e^x) = x$ pour tout réel x, et $e^{\ln x} = x$ pour tout $x > 0$.

1. Donne $\ln 1$, $\ln e$ et $\ln\left(e^5\right)$.

2. Calcule $e^{\ln 7}$ et $\ln\left(\frac{1}{e}\right)$.

Exercice 2 – Propriétés algébriques

On donne $\ln 2 \approx 0{,}693$ et $\ln 3 \approx 1{,}099$.

1. Calcule $\ln 6$, $\ln 1{,}5$ et $\ln 8$.

2. Calcule $\ln\sqrt{2}$ et $\ln\frac{1}{3}$.

Exercice 3 – Dérivée du logarithme

On rappelle que la dérivée de $\ln x$ sur $]0\,;+\infty[$ est $\frac{1}{x}$.

1. Calcule la dérivée de $f(x) = 3\ln x$, $g(x) = \ln x + 2x$ et $h(x) = 5\ln x - x^2$.

2. Que peut-on dire du signe de la dérivée de ln ?

Exercice 4 – Résoudre avec le logarithme

Résous les équations $e^x = 5$, $\ln x = 2$, $e^x = 0{,}1$ et $\ln x = -1$.

1. Donne les solutions exactes puis approchées.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Domaine, signe, variations

On étudie la fonction ln.

1. Donne son ensemble de définition.

2. Pour quelles valeurs de x a-t-on $\ln x > 0$? $\ln x < 0$?

3. Résous $\ln x \geq 3$.

Exercice 6 – Résoudre une exponentielle composée

Résous $e^{3x} = 20$, puis $4e^{-0{,}5t} = 1$, et enfin $e^{2x+1} = 7$.

1. Donne les solutions exactes puis approchées à 10^{-3}.

Exercice 7 – Résoudre une équation avec ln

Résous $\ln(2x-1) = 3$, puis $\ln x + \ln 4 = \ln 12$, et enfin $2\ln x = \ln 9$.

1. Précise à chaque fois le domaine, puis résous.

Exercice 8 – Dérivée de ln(ax + b)

Dérive $f(x) = \ln(3x)$, $g(x) = \ln(2x-5)$ sur $\left]\frac{5}{2}\,;+\infty\right[$ et $h(x) = \ln(x^2+1)$.

1. Donne les trois dérivées.

Exercice 9 – Combiner exponentielle et logarithme

Simplifie $A = \ln\left(e^4\right)$, $B = e^{2\ln 3}$, $C = \ln\left(\frac{e^5}{e^2}\right)$ et $D = e^{\ln 4 + \ln 2}$.

1. Donne la valeur exacte de chacune.

Exercice 10 – Limites du logarithme

On étudie le comportement de $\ln x$ aux bornes de son domaine.

1. Calcule $\ln 0{,}1$, $\ln 0{,}001$ et $\ln\left(10^{-6}\right)$. Que se passe-t-il en 0^+ ?

2. Calcule $\ln 100$, $\ln 10^6$ et $\ln 10^{12}$. Que se passe-t-il en $+\infty$?

3. Compare la croissance de $\ln x$ et celle de x.

Exercice 11 – Demi-vie exacte

L'activité d'une source suit $A(t) = A_0 e^{-0{,}035t}$, t en jours.

1. Calcule la demi-vie exacte.

2. Calcule le temps au bout duquel il ne reste que 10% de l'activité.

3. Vérifie la cohérence des deux résultats.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 12 – Dimensionner une constante de temps

Un condensateur se décharge selon $u(t) = 15e^{-t/\tau}$ volts. Le cahier des charges impose que la tension descende sous 1 V en moins de 50 ms.

1. Exprime la condition sur τ.

2. Détermine la valeur maximale de τ.

3. Si $R = 10$ kΩ, quelle capacité maximale peut-on choisir, sachant que $\tau = RC$?

Exercice 13 – Étude de x − ln x

Soit $f(x) = x - \ln x$ sur $]0\,;+\infty[$.

1. Calcule $f'(x)$ et mets-la sous la forme $\dfrac{x-1}{x}$.

2. Dresse le tableau de variations.

3. Donne le minimum de f et déduis-en une inégalité célèbre.

Exercice 14 – Croissances comparées

Soit $g(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.

1. Calcule $g(1)$, $g(e)$, $g(10)$ et $g(100)$.

2. Calcule $g'(x)$ et détermine le maximum de g.

3. Donne la limite de g en $+\infty$.

Exercice 15 – Inéquation avec logarithme

Résous l'inéquation $\ln(x-2) \leq 1$.

1. Détermine le domaine.

2. Résous l'inéquation.

3. Résous ensuite $\ln(3x) > \ln(x+4)$.

Exercice 16 – Type bac : durée d'une décharge

Un condensateur se décharge selon $u(t) = 24e^{-t/0{,}04}$ volts, t en secondes.

1. Calcule la tension après 0,04 s, puis après 0,12 s.

2. Détermine l'instant exact où la tension vaut 6 V.

3. Détermine l'instant où elle passe sous 0,24 V (soit 1%).

4. Combien de constantes de temps cela représente-t-il ?

Exercice 17 – Type bac : étude d'une fonction avec ln

Soit $f(x) = x^2 - 8\ln x$ sur $]0\,;+\infty[$.

1. Calcule $f'(x)$ et factorise-la.

2. Dresse le tableau de variations.

3. Calcule le minimum, en valeur exacte puis approchée.

4. Détermine la tangente au point d'abscisse 1.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 18 – Type bac : datation par décroissance

Un échantillon contient un isotope dont l'activité décroît selon $A(t) = A_0 e^{-kt}$, avec une demi-vie de 5 730 ans (datation au carbone 14).

1. Détermine k, en an^{-1}.

2. Un échantillon a une activité égale à 72% de celle d'un échantillon actuel. Détermine son âge.

3. Quel serait l'âge d'un échantillon à 25% d'activité ?

4. Vérifie ce dernier résultat autrement.

Exercice 19 – Type bac : dimensionner un procédé

Un bain de rinçage voit sa concentration en polluant décroître selon $c(t) = 80e^{-0{,}25t}$ mg/L (t en heures). La norme de rejet est de 0,8 mg/L.

1. Calcule la durée exacte du traitement nécessaire.

2. Calcule la concentration après 12 heures.

3. Un accélérateur porte le coefficient à 0,4. Quelle durée alors ?

4. Quel gain de temps l'accélérateur apporte-t-il, en pourcentage ?

Exercice 20 – Type bac : ln et logarithme décimal

L'enseignement commun utilise le logarithme décimal log, la spécialité le logarithme népérien ln. On veut relier les deux.

1. Montre que $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$.

2. Calcule $\ln 10$ et le coefficient de conversion.

3. Vérifie la relation sur $x = 100$ et $x = 2$.

4. Un niveau sonore vaut $L = 10 \log \dfrac{I}{I_0}$. Réécris-le avec ln.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Valeurs de référence

$\ln 1 = 0$: en effet $e^0 = 1$.

$\ln e = 1$: en effet $e^1 = e$.

$\ln\left(e^5\right) = 5$, par réciprocité directe.

$e^{\ln 7} = 7$, par l'autre relation de réciprocité (valable car $7 > 0$).

$\ln\left(\frac{1}{e}\right) = \ln\left(e^{-1}\right) = -1$.

À retenir : ln « lit l'exposant » de e. Les deux fonctions se défont l'une l'autre.

Réponse. $\ln 1 = 0 \cdot \ln e = 1 \cdot \ln(e^5) = 5 \cdot e^{\ln 7} = 7 \cdot \ln\frac{1}{e} = -1$.

Rappel de cours. $\ln(e^x) = x$ pour tout réel $x \cdot e^{\ln x} = x$ pour $x > 0$ seulement.

Erreur fréquente. Écrire $\ln 0 = 0$: le logarithme n'est défini que pour les nombres STRICTEMENT positifs. $\ln 0$ n'existe pas.

Correction de l'exercice 2 – Propriétés algébriques

$\ln 6 = \ln(2 \times 3) = \ln 2 + \ln 3 \approx 0{,}693 + 1{,}099 = 1{,}792$.

$\ln 1{,}5 = \ln\frac{3}{2} = \ln 3 - \ln 2 \approx 1{,}099 - 0{,}693 = 0{,}406$.

$\ln 8 = \ln\left(2^3\right) = 3\ln 2 \approx 2{,}079$.

$\ln\sqrt{2} = \ln\left(2^{1/2}\right) = \frac{1}{2}\ln 2 \approx 0{,}347$.

$\ln\frac{1}{3} = -\ln 3 \approx -1{,}099$.

Contrôle de cohérence : $1{,}5 > 1$ donc son logarithme est positif ✔ ; $\frac{1}{3} < 1$ donc le sien est négatif ✔.

Réponse. $\ln 6 \approx 1{,}792 \cdot \ln 1{,}5 \approx 0{,}406 \cdot \ln 8 \approx 2{,}079 \cdot \ln\sqrt{2} \approx 0{,}347 \cdot \ln\frac{1}{3} \approx -1{,}099$.

Rappel de cours. $\ln(ab) = \ln a + \ln b \cdot \ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b \cdot \ln(a^n) = n\ln a \cdot \ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$.

Erreur fréquente. Écrire $\ln(2 + 3) = \ln 2 + \ln 3$: la propriété concerne le PRODUIT, pas la somme. $\ln 5 \approx 1{,}609 \neq 1{,}792$.

Correction de l'exercice 3 – Dérivée du logarithme

$f'(x) = 3 \times \frac{1}{x} = \frac{3}{x}$.

$g'(x) = \frac{1}{x} + 2$.

$h'(x) = \frac{5}{x} - 2x$.

Signe : sur $]0\,;+\infty[$, $\frac{1}{x}$ est toujours STRICTEMENT POSITIF.

La fonction ln est donc strictement CROISSANTE sur tout son domaine.

Remarque : sa pente diminue quand x grandit ($\frac{1}{100} = 0{,}01$ en $x = 100$) : la courbe de ln monte de plus en plus lentement, sans jamais cesser de monter.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $f'(x) = \frac{3}{x} \cdot g'(x) = \frac{1}{x} + 2 \cdot h'(x) = \frac{5}{x} - 2x \cdot \ln' = \frac{1}{x} > 0$: ln est croissante.

Rappel de cours. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$: toujours positive, donc ln est croissante.

Erreur fréquente. Dériver $3\ln x$ en $\frac{1}{3x}$: le coefficient 3 reste au NUMÉRATEUR.

Correction de l'exercice 4 – Résoudre avec le logarithme

$e^x = 5 \Leftrightarrow x = \ln 5 \approx 1{,}609$.

$\ln x = 2 \Leftrightarrow x = e^2 \approx 7{,}389$.

$e^x = 0{,}1 \Leftrightarrow x = \ln 0{,}1 \approx -2{,}303$.

$\ln x = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} \approx 0{,}368$.

Contrôles : $e^{1{,}609} \approx 5$ ✔ et $\ln(7{,}389) \approx 2$ ✔.

Méthode à retenir : pour « descendre » une inconnue d'un exposant, on applique ln ; pour la « sortir » d'un logarithme, on applique exp.

Réponse. $x = \ln 5 \approx 1{,}609 \cdot x = e^2 \approx 7{,}389 \cdot x = \ln 0{,}1 \approx -2{,}303 \cdot x = e^{-1} \approx 0{,}368$.

Rappel de cours. $e^x = b \Leftrightarrow x = \ln b$ (pour $b > 0$) $\cdot \ln x = a \Leftrightarrow x = e^a$.

Erreur fréquente. Écrire $e^x = 0{,}1 \Rightarrow x = 0{,}1$: la solution est $\ln 0{,}1$, un nombre NÉGATIF.

Correction de l'exercice 5 – Domaine, signe, variations

Le logarithme n'est défini que pour les nombres strictement positifs : son ensemble de définition est $]0\,;+\infty[$.

ln est croissante et s'annule en $x = 1$ (car $\ln 1 = 0$).

Donc $\ln x > 0$ pour $x > 1$, et $\ln x < 0$ pour $0 < x < 1$.

$\ln x \geq 3$: la fonction étant croissante, on applique l'exponentielle sans changer le sens.

$x \geq e^3 \approx 20{,}086$.

Il faut aussi respecter le domaine, mais $e^3 > 0$ donc la condition $x > 0$ est automatiquement vérifiée.

Ensemble des solutions : $\left[e^3\,;+\infty\right[$.

Réponse. Domaine $]0\,;+\infty[\cdot \ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$ et $\ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1 \cdot$ $\ln x \geq 3 \Leftrightarrow x \geq e^3 \approx 20{,}09$.

Rappel de cours. ln est croissante : $\ln x \geq a \Leftrightarrow x \geq e^a$. Et toujours vérifier que $x > 0$.

Erreur fréquente. Oublier la condition $x > 0$ dans les inéquations : sur un exercice du type $\ln(x-2) \geq 1$, elle devient $x > 2$ et elle est décisive.

Correction de l'exercice 6 – Résoudre une exponentielle composée

$e^{3x} = 20$: on applique ln, donc $3x = \ln 20$.

$x = \frac{\ln 20}{3} \approx \frac{2{,}996}{3} \approx 0{,}999$.

$4e^{-0{,}5t} = 1$: on isole d'abord l'exponentielle, $e^{-0{,}5t} = 0{,}25$.

Puis $-0{,}5t = \ln 0{,}25 \approx -1{,}386$, donc $t \approx \frac{-1{,}386}{-0{,}5} \approx 2{,}773$.

$e^{2x+1} = 7$: $2x + 1 = \ln 7 \approx 1{,}946$, donc $2x \approx 0{,}946$ et $x \approx 0{,}473$.

Contrôle : $e^{2 \times 0{,}473 + 1} = e^{1{,}946} \approx 7{,}0$ ✔.

Méthode générale en trois temps : isoler l'exponentielle, appliquer ln, puis résoudre

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

l'équation du premier degré obtenue.

Réponse. $x = \dfrac{\ln 20}{3} \approx 0{,}999 \cdot t = \dfrac{\ln 0{,}25}{-0{,}5} = 2\ln 4 \approx 2{,}773 \cdot x = \dfrac{\ln 7 - 1}{2} \approx 0{,}473$.

Rappel de cours. On ISOLE l'exponentielle avant d'appliquer ln : $4e^{u} = 1$ donne $e^{u} = 0{,}25$, pas $u = \ln 1 - \ln 4$ directement.

Erreur fréquente. Écrire $\ln\left(4e^{-0{,}5t}\right) = 4 \times (-0{,}5t)$: le ln d'un produit se décompose en SOMME, $\ln 4 - 0{,}5t$.

Correction de l'exercice 7 – Résoudre une équation avec ln

Première équation : il faut $2x - 1 > 0$, soit $x > 0{,}5$.

$\ln(2x - 1) = 3$ donne $2x - 1 = e^{3}$, donc $x = \dfrac{e^{3} + 1}{2} \approx \dfrac{21{,}086}{2} \approx 10{,}543$.

Cette valeur vérifie $x > 0{,}5$ ✔.

Deuxième équation : domaine $x > 0$. On regroupe : $\ln(4x) = \ln 12$, donc $4x = 12$ et $x = 3$ ✔ (compatible avec le domaine).

Troisième équation : domaine $x > 0$. $2\ln x = \ln\left(x^{2}\right)$, donc $x^{2} = 9$, soit $x = 3$ ou $x = -3$.

Mais -3 est exclu par le domaine : la seule solution est $x = 3$.

Leçon de méthode : on détermine TOUJOURS le domaine avant de résoudre, car il élimine des solutions apparentes.

Réponse. $x = \dfrac{e^{3} + 1}{2} \approx 10{,}543 \cdot x = 3 \cdot x = 3$ seulement (la solution -3 est hors domaine).

Rappel de cours. $\ln u = \ln v \Leftrightarrow u = v$, à condition que $u > 0$ et $v > 0$. Le domaine fait partie de la résolution.

Erreur fréquente. Garder $x = -3$ dans la troisième équation : $\ln(-3)$ n'existe pas.

Correction de l'exercice 8 – Dérivée de ln(ax + b)

Règle : la dérivée de $\ln(u)$ est $\dfrac{u'}{u}$.

$f(x) = \ln(3x)$: $u = 3x$, $u' = 3$, donc $f'(x) = \dfrac{3}{3x} = \dfrac{1}{x}$.

Résultat remarquable : $\ln(3x) = \ln 3 + \ln x$ diffère de $\ln x$ d'une constante, donc les deux ont la même dérivée ✔.

$g(x) = \ln(2x - 5)$: $u' = 2$, donc $g'(x) = \dfrac{2}{2x - 5}$.

$h(x) = \ln(x^{2} + 1)$: $u = x^{2} + 1$, $u' = 2x$, donc $h'(x) = \dfrac{2x}{x^{2} + 1}$.

Signe de h' : le dénominateur est toujours positif, donc h' a le signe de x — la fonction h décroît sur les négatifs et croît sur les positifs, avec un minimum en 0.

Réponse. $f'(x) = \dfrac{1}{x} \cdot g'(x) = \dfrac{2}{2x - 5} \cdot h'(x) = \dfrac{2x}{x^{2} + 1}$.

Rappel de cours. $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$: la dérivée de l'intérieur passe au numérateur.

Erreur fréquente. Écrire $(\ln(2x - 5))' = \dfrac{1}{2x - 5}$: il manque le facteur $u' = 2$.

Correction de l'exercice 9 – Combiner exponentielle et logarithme

$A = \ln\left(e^{4}\right) = 4$, par réciprocité.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$B = e^{2\ln 3} = e^{\ln\left(3^2\right)} = e^{\ln 9} = 9$.

$C = \ln\left(e^{5-2}\right) = \ln\left(e^3\right) = 3$.

$D = e^{\ln(4\times 2)} = e^{\ln 8} = 8$.

Contrôle numérique de B : $2\ln 3 \approx 2{,}197$ et $e^{2{,}197} \approx 9{,}0$ ✔.

Méthode : on regroupe toujours l'exposant en UN SEUL logarithme (ou l'argument du ln en une seule exponentielle) avant d'appliquer la réciprocité.

Réponse. $A = 4 \cdot B = 9 \cdot C = 3 \cdot D = 8$.

Rappel de cours. $e^{n\ln a} = a^n$: c'est la formule qui permet d'écrire n'importe quelle puissance à l'aide de e.

Erreur fréquente. Écrire $e^{2\ln 3} = 2\times 3 = 6$: le coefficient 2 est un EXPOSANT de 3, d'où 9.

Correction de l'exercice 10 – Limites du logarithme

$\ln 0{,}1 \approx -2{,}303$; $\ln 0{,}001 \approx -6{,}908$; $\ln\left(10^{-6}\right) \approx -13{,}816$.

Les valeurs descendent sans limite : $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$. L'axe des ordonnées est une asymptote VERTICALE.

$\ln 100 \approx 4{,}605$; $\ln 10^6 \approx 13{,}816$; $\ln 10^{12} \approx 27{,}631$.

Les valeurs croissent sans limite : $\lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$.

Mais très LENTEMENT : pour que $\ln x$ atteigne 27,6, il faut $x = 10^{12}$, soit mille milliards.

Croissances comparées : $\dfrac{\ln x}{x}$ vaut 0,046 en $x = 100$, puis $1{,}4\times 10^{-5}$ en $x = 10^6$. Donc $\lim_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

Conclusion : ln croît vers $+\infty$ mais MOINS VITE que n'importe quelle puissance de x — c'est l'exact symétrique de l'exponentielle.

Réponse. $\ln x \to -\infty$ en 0^+ (asymptote verticale) et $\to +\infty$ en $+\infty$, très lentement · $\dfrac{\ln x}{x} \to 0$.

Rappel de cours. $\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty \cdot \lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty \cdot \lim_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

Erreur fréquente. Croire que ln est bornée parce qu'elle croît lentement : elle dépasse toute valeur, mais il faut aller très loin.

Correction de l'exercice 11 – Demi-vie exacte

Demi-vie : on résout $e^{-0{,}035t} = 0{,}5$.

En appliquant ln : $-0{,}035t = \ln 0{,}5 \approx -0{,}693\,15$.

$t = \dfrac{\ln 0{,}5}{-0{,}035} = \dfrac{\ln 2}{0{,}035} \approx \dfrac{0{,}693\,15}{0{,}035} \approx 19{,}8$ jours.

Pour 10% : $e^{-0{,}035t} = 0{,}1$, donc $t = \dfrac{\ln 10}{0{,}035} \approx \dfrac{2{,}302\,6}{0{,}035} \approx 65{,}8$ jours.

Cohérence : le rapport $\dfrac{65{,}8}{19{,}8} \approx 3{,}32$.

Or passer à 10% demande toujours $\dfrac{\ln 10}{\ln 2} \approx 3{,}32$ demi-vies ✔ — un repère universel, indépendant de la substance.

Formule générale à retenir : pour $A_0 e^{-kt}$, la demi-vie vaut $\dfrac{\ln 2}{k}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. Demi-vie $= \dfrac{\ln 2}{0{,}035} \approx 19{,}8$ jours · 10% restants au bout de $\dfrac{\ln 10}{0{,}035} \approx 65{,}8$ jours · soit 3,32 demi-vies ✔.

Rappel de cours. Demi-vie d'un modèle e^{-kt} : $T = \dfrac{\ln 2}{k}$. Elle ne dépend pas de la valeur initiale.

Erreur fréquente. Multiplier la demi-vie par 10 pour atteindre 10% : il faut 3,32 demi-vies, pas 10.

Correction de l'exercice 12 – Dimensionner une constante de temps

Condition : $15e^{-0{,}05\,/\,\tau} \leq 1$, soit $e^{-0{,}05\,/\,\tau} \leq \dfrac{1}{15}$.

On applique ln : $-\dfrac{0{,}05}{\tau} \leq \ln\dfrac{1}{15} = -\ln 15$.

Or $\ln 15 \approx 2{,}708$. En multipliant par -1 (ce qui inverse l'inégalité) : $\dfrac{0{,}05}{\tau} \geq 2{,}708$.

Comme $\tau > 0$, on obtient $\tau \leq \dfrac{0{,}05}{2{,}708} \approx 0{,}018\,5$ s, soit 18,5 ms.

Capacité maximale : $\tau = RC$ donne $C = \dfrac{\tau}{R} \leq \dfrac{0{,}018\,5}{10\,000} = 1{,}85 \times 10^{-6}$ F.

Soit $C \leq 1{,}85$ µF. On choisirait donc une capacité normalisée de 1,5 µF (et non 2,2 µF, qui serait trop grande).

Contrôle avec $C = 1{,}5$ µF : $\tau = 0{,}015$ s, et
$u(0{,}05) = 15e^{-0{,}05\,/\,0{,}015} = 15e^{-3{,}333} \approx 15 \times 0{,}035\,7 \approx 0{,}54$ V ≤ 1 V ✔.

Réponse. Condition $e^{-0{,}05\,/\,\tau} \leq \dfrac{1}{15} \cdot \tau \leq \dfrac{0{,}05}{\ln 15} \approx 18{,}5$ ms · avec $R = 10$ kΩ, $C \leq 1{,}85$ µF, donc une capacité normalisée de 1,5 µF.

Rappel de cours. Un cahier des charges du type « sous s volts en T secondes » se traduit par $\tau \leq \dfrac{T}{\ln\left(\frac{U_0}{s}\right)}$.

Erreur fréquente. Oublier d'inverser l'inégalité en multipliant par -1 : on conclurait $\tau \geq 18{,}5$ ms, soit exactement l'inverse de la contrainte.

Correction de l'exercice 13 – Étude de x − ln x

$f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$.

Mise au même dénominateur : $f'(x) = \dfrac{x}{x} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$.

Signe : sur $]0\,;+\infty[$ le dénominateur est positif, donc f' a le signe de $(x-1)$.

$f'(x) < 0$ sur $]0\,;1[$ et $f'(x) > 0$ sur $]1\,;+\infty[$: f décroît puis croît.

Minimum : $f(1) = 1 - \ln 1 = 1 - 0 = 1$.

Conclusion : $f(x) \geq 1$ pour tout $x > 0$, c'est-à-dire $x - \ln x \geq 1$.

Autrement dit : $\ln x \leq x - 1$ pour tout $x > 0$.

Cette inégalité est le symétrique de $e^x \geq x + 1$ vue au chapitre précédent : la courbe de ln est toujours SOUS sa tangente au point $(1\,;0)$, d'équation $y = x - 1$.

Contrôle : en $x = 2$, $\ln 2 \approx 0{,}693 \leq 1$ ✔ ; en $x = 0{,}5$, $\ln 0{,}5 \approx -0{,}693 \leq -0{,}5$ ✔.

Réponse. $f'(x) = \dfrac{x-1}{x}$ · décroissante sur $]0\,;1]$, croissante ensuite · minimum $f(1) = 1$, d'où $\ln x \leq x - 1$ pour tout $x > 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Rappel de cours. $\ln x \leq x - 1$: la courbe du logarithme est toujours sous sa tangente en $(1\,;0)$.

Erreur fréquente. Conclure que f décroît partout parce qu'elle contient $-\ln x$: le terme x l'emporte dès $x > 1$.

Correction de l'exercice 14 – Croissances comparées

$g(1) = \dfrac{0}{1} = 0$.

$g(e) = \dfrac{1}{e} \approx 0{,}368$.

$g(10) = \dfrac{\ln 10}{10} \approx \dfrac{2{,}303}{10} \approx 0{,}230$.

$g(100) = \dfrac{4{,}605}{100} \approx 0{,}046$.

Dérivée (quotient) : $u = \ln x$ ($u' = \frac{1}{x}$) et $v = x$ ($v' = 1$).

$g'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$.

Signe : le dénominateur est positif, donc g' a le signe de $(1 - \ln x)$.

$g'(x) = 0$ quand $\ln x = 1$, soit $x = e$. Avant, $\ln x < 1$ donc $g' > 0$; après, $g' < 0$.

Le maximum est donc $g(e) = \dfrac{1}{e} \approx 0{,}368$, atteint en $x = e \approx 2{,}718$.

Limite en $+\infty$: par croissances comparées, $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ — ce que confirment les valeurs calculées (0,046 en $x = 100$).

Interprétation : le logarithme finit toujours par être « écrasé » par x. C'est le symétrique exact de la domination de l'exponentielle sur les puissances.

Réponse. $g(1) = 0$, $g(e) = \frac{1}{e} \approx 0{,}368$, $g(10) \approx 0{,}230$, $g(100) \approx 0{,}046$ · $g'(x) = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$, maximum en $x = e$ · limite 0 en $+\infty$.

Rappel de cours. $\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$: le logarithme croît moins vite que toute puissance de x.

Erreur fréquente. Croire que g est croissante parce que ln l'est : le dénominateur x croît plus vite dès que $x > e$.

Correction de l'exercice 15 – Inéquation avec logarithme

Domaine : il faut $x - 2 > 0$, soit $x > 2$.

$\ln(x - 2) \leq 1$: on applique l'exponentielle, qui est croissante, donc le sens est conservé.

$x - 2 \leq e^1 = e$, soit $x \leq 2 + e \approx 4{,}718$.

En croisant avec le domaine : $2 < x \leq 2 + e$.

Ensemble des solutions : $]2\,;2 + e]$.

Seconde inéquation : domaine $3x > 0$ ET $x + 4 > 0$, donc $x > 0$.

ln étant croissante : $\ln(3x) > \ln(x + 4) \Leftrightarrow 3x > x + 4$, soit $2x > 4$ et $x > 2$.

En croisant avec le domaine $x > 0$, l'ensemble des solutions est $]2\,;+\infty[$.

Contrôle : $x = 3$ donne $\ln 9 \approx 2{,}197 > \ln 7 \approx 1{,}946$ ✔ ; $x = 1$ donne $\ln 3 \approx 1{,}099 < \ln 5 \approx 1{,}609$ ✘ (non solution).

Réponse. Domaine $x > 2$ · solutions $]2\,;2 + e]$ · pour la seconde, $]2\,;+\infty[$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Rappel de cours. Le domaine se détermine AVANT de résoudre, et l'ensemble final est l'intersection du domaine et des solutions de l'inéquation.

Erreur fréquente. Annoncer $x \leq 2 + e$ sans la borne inférieure : les valeurs $x \leq 2$ sont exclues, le logarithme n'y étant pas défini.

Correction de l'exercice 16 – Type bac : durée d'une décharge

$u(0{,}04) = 24e^{-1} \approx 24 \times 0{,}367\,9 \approx 8{,}83$ V.

$u(0{,}12) = 24e^{-3} \approx 24 \times 0{,}049\,8 \approx 1{,}20$ V.

Pour 6 V : $24e^{-t/0{,}04} = 6$, donc $e^{-t/0{,}04} = 0{,}25$.

$-\dfrac{t}{0{,}04} = \ln 0{,}25 = -\ln 4 \approx -1{,}386\,3$.

$t = 0{,}04 \times 1{,}386\,3 \approx 0{,}055\,5$ s, soit environ 55,5 ms.

Pour 1% : $e^{-t/0{,}04} = 0{,}01$, donc $t = 0{,}04 \times \ln 100 \approx 0{,}04 \times 4{,}605 \approx 0{,}184\,2$ s.

Soit environ 184 ms.

En constantes de temps : $\dfrac{0{,}184\,2}{0{,}04} = 4{,}605$, c'est-à-dire $\ln 100 \approx 4{,}6\,\tau$.

On retrouve le repère du technicien : une décharge est « terminée » à 1% après environ 4,6 constantes de temps, et l'on arrondit usuellement à 5τ.

Contrôle : $u(0{,}2) = 24e^{-5} \approx 24 \times 0{,}006\,7 \approx 0{,}16$ V, bien en dessous de 0,24 V ✔.

Réponse. $u(\tau) \approx 8{,}83$ V et $u(3\tau) \approx 1{,}20$ V · 6 V à $t = 0{,}04 \ln 4 \approx 55{,}5$ ms · 1% à $t = 0{,}04 \ln 100 \approx 184$ ms, soit $4{,}6\,\tau$.

Rappel de cours. $u_0 e^{-t/\tau} = s \Leftrightarrow t = \tau \ln \dfrac{u_0}{s}$: c'est LA formule de durée d'une décharge.

Erreur fréquente. Écrire $t = \tau \ln \frac{s}{u_0}$: on obtiendrait un temps négatif. Le rapport est « valeur de départ sur valeur cible ».

Correction de l'exercice 17 – Type bac : étude d'une fonction avec ln

$f'(x) = 2x - \dfrac{8}{x}$.

Mise au même dénominateur : $f'(x) = \dfrac{2x^2 - 8}{x} = \dfrac{2\left(x^2 - 4\right)}{x} = \dfrac{2(x-2)(x+2)}{x}$.

Sur $]0\,;+\infty[$, les facteurs x et $(x+2)$ sont positifs : le signe de f' est celui de $(x-2)$.

$f'(x) < 0$ sur $]0\,;2[$ et $f'(x) > 0$ sur $]2\,;+\infty[$: f décroît puis croît.

Minimum : $f(2) = 4 - 8\ln 2$.

Valeur approchée : $8\ln 2 \approx 8 \times 0{,}693\,1 \approx 5{,}545$, donc $f(2) \approx 4 - 5{,}545 = -1{,}545$.

Tangente en 1 : $f(1) = 1 - 8\ln 1 = 1$ et $f'(1) = 2 - 8 = -6$.

$T : y = -6(x-1) + 1 = -6x + 7$.

Contrôle de cohérence : $f(1) = 1 > f(2) \approx -1{,}55$ ✔ la fonction décroît bien entre 1 et 2, ce que confirme la pente négative de la tangente.

Réponse. $f'(x) = \dfrac{2(x-2)(x+2)}{x}$ · décroissante sur $]0\,;2]$, croissante ensuite · minimum $f(2) = 4 - 8\ln 2 \approx -1{,}55$ · tangente en 1 : $y = -6x + 7$.

Rappel de cours. On met la dérivée sur un dénominateur commun puis on FACTORISE : le signe se lit alors immédiatement sur le domaine.

Erreur fréquente. Conserver la solution $x = -2$ de $x^2 = 4$: elle est hors du domaine $]0\,;+\infty[$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 18 – Type bac : datation par décroissance

Demi-vie : $e^{-k\times 5\,730}=0{,}5$, donc $-5\,730k=\ln 0{,}5=-\ln 2$.

$k=\dfrac{\ln 2}{5\,730}\approx\dfrac{0{,}693\,15}{5\,730}\approx 1{,}21\times10^{-4}$ an^{-1}.

Pour 72% : $e^{-kt}=0{,}72$, donc $t=\dfrac{-\ln 0{,}72}{k}=\dfrac{0{,}328\,5}{1{,}21\times10^{-4}}$.

$t\approx 2\,715$ ans. L’échantillon a donc environ 2 700 ans.

Pour 25% : $t=\dfrac{-\ln 0{,}25}{k}=\dfrac{1{,}386\,3}{1{,}21\times10^{-4}}\approx 11\,460$ ans.

Vérification directe : $25\%=\left(\dfrac{1}{2}\right)^2$, donc il s’est écoulé exactement DEUX demi-vies, soit $2\times5\,730=11\,460$ ans ✔.

C’est le contrôle le plus rapide : quand l’activité restante est une puissance de $\frac{1}{2}$, l’âge est un multiple entier de la demi-vie.

Remarque de méthode : on peut aussi écrire le modèle sous la forme $A(t)=A_0\left(\frac{1}{2}\right)^{t/5\,730}$, équivalente et souvent plus parlante pour un contrôle mental.

Réponse. $k=\dfrac{\ln 2}{5\,730}\approx 1{,}21\times10^{-4}$ an^{-1} · 72% → environ 2 715 ans · 25% → 11 460 ans, soit exactement deux demi-vies ✔.

Rappel de cours. $k=\dfrac{\ln 2}{T}$ où T est la demi-vie · et $t=\dfrac{-\ln(A/A_0)}{k}$ donne l’âge.

Erreur fréquente. Oublier le signe : $\ln 0{,}72$ est NÉGATIF, et l’âge doit être positif. C’est $-\ln 0{,}72$ qu’on divise par k.

Correction de l’exercice 19 – Type bac : dimensionner un procédé

Condition : $80e^{-0{,}25t}\le 0{,}8$, soit $e^{-0{,}25t}\le 0{,}01$.

On applique ln : $-0{,}25t\le\ln 0{,}01=-\ln 100\approx -4{,}605$.

En divisant par $-0{,}25$ (inversion du sens) : $t\ge\dfrac{4{,}605}{0{,}25}=18{,}42$ heures.

Le traitement doit durer au moins 18,42 h, soit environ 18 h 25 min.

Après 12 h : $c(12)=80e^{-3}\approx 80\times0{,}049\,8\approx 3{,}98$ mg/L — encore cinq fois au-dessus de la norme.

Avec le coefficient 0,4 : $t\ge\dfrac{4{,}605}{0{,}4}\approx 11{,}51$ heures, soit environ 11 h 31 min.

Gain de temps : $18{,}42-11{,}51=6{,}91$ heures.

En pourcentage : $\dfrac{6{,}91}{18{,}42}\approx 0{,}375$, soit 37,5% de temps gagné.

Remarque : ce gain relatif ne dépend PAS du seuil visé. En passant de $k=0{,}25$ à $k=0{,}4$, toute durée est divisée par $\frac{0{,}4}{0{,}25}=1{,}6$, soit $-37{,}5\%$ ✔.

Réponse. $t\ge\dfrac{\ln 100}{0{,}25}\approx 18{,}42$ h · $c(12)\approx 3{,}98$ mg/L (non conforme) · avec $k=0{,}4$, $t\approx 11{,}51$ h · gain de 37,5%, indépendant du seuil.

Rappel de cours. Dans $c_0e^{-kt}\le s$, la durée vaut $\dfrac{1}{k}\ln\dfrac{c_0}{s}$: elle est inversement proportionnelle à k.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Erreur fréquente. Conclure qu'un coefficient 0,4 au lieu de 0,25 divise la durée par $0{,}4 / 0{,}25 = 1{,}6$… ce qui est juste, mais annoncer 60% de gain serait faux : le gain est $1 - \frac{1}{1{,}6} = 37{,}5\%$.

Correction de l'exercice 20 – Type bac : ln et logarithme décimal

Posons $y = \log x$. Par définition du logarithme décimal, $10^y = x$.

On applique ln aux deux membres : $\ln\left(10^y\right) = \ln x$, soit $y \ln 10 = \ln x$.

Donc $y = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$, c'est-à-dire $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$ ✔.

$\ln 10 \approx 2{,}302\,6$, donc $\log x \approx 0{,}434\,3 \times \ln x$ (car $\frac{1}{2{,}302\,6} \approx 0{,}434\,3$).

Vérification pour $x = 100$: $\ln 100 \approx 4{,}605$, et $\dfrac{4{,}605}{2{,}302\,6} = 2 = \log 100$ ✔.

Pour $x = 2$: $\dfrac{\ln 2}{\ln 10} \approx \dfrac{0{,}693\,1}{2{,}302\,6} \approx 0{,}301\,0 = \log 2$ ✔.

Niveau sonore : $L = 10 \log \dfrac{I}{I_0} = \dfrac{10}{\ln 10} \ln \dfrac{I}{I_0} \approx 4{,}343 \ln \dfrac{I}{I_0}$.

Les deux écritures sont équivalentes. La convention décimale est retenue en acoustique parce qu'un facteur 10 sur l'intensité y ajoute exactement 10 dB, ce qui est plus lisible.

À retenir : ln et log sont PROPORTIONNELS. Toutes leurs propriétés algébriques sont les mêmes, seul le coefficient change.

Réponse. $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10} \cdot \ln 10 \approx 2{,}3026$ et $\log x \approx 0{,}4343 \ln x$ · vérifié sur 100 et 2 · $L \approx 4{,}343 \ln \dfrac{I}{I_0}$.

Rappel de cours. $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$: les deux logarithmes ne diffèrent que d'un facteur constant $\approx 0{,}4343$.

Erreur fréquente. Confondre les deux dans une formule physique : un pH calculé avec ln au lieu de log serait 2,3 fois trop grand.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).