Fonction logarithme népérien — Terminale STI2D

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés

Présentation

Au chapitre précédent, on savait décrire une décharge par $u(t) = 12e^{-t/\tau}$, mais pas calculer exactement quand elle passerait sous un seuil : il fallait balayer. Le logarithme népérien règle la question, car c'est la fonction RÉCIPROQUE de l'exponentielle : $e^x = b \Leftrightarrow x = \ln b$. De là découlent le temps de demi-vie exact, la durée d'un refroidissement, le dimensionnement d'une constante de temps. Ces 20 exercices corrigés installent les propriétés algébriques ($\ln(ab) = \ln a + \ln b$), la dérivée $\frac{1}{x}$, les limites en 0^+ et $+\infty$, les croissances comparées, puis les mettent au service des modèles RC et thermiques du bac. La difficulté est croissante : l'énoncé puis la correction détaillée s'affichent d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables : mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-sti2d/fonction-logarithme-neperien

Exercice 1 – Valeurs de référence

Le logarithme népérien est la fonction réciproque de l'exponentielle : $\ln(e^x) = x$ pour tout réel x, et $e^{\ln x} = x$ pour tout $x > 0$.

1. Donne $\ln 1$, $\ln e$ et $\ln\left(e^5\right)$.

2. Calcule $e^{\ln 7}$ et $\ln\left(\frac{1}{e}\right)$.

Exercice 2 – Propriétés algébriques

On donne $\ln 2 \approx 0{,}693$ et $\ln 3 \approx 1{,}099$.

1. Calcule $\ln 6$, $\ln 1{,}5$ et $\ln 8$.

2. Calcule $\ln\sqrt{2}$ et $\ln\frac{1}{3}$.

Exercice 3 – Dérivée du logarithme

On rappelle que la dérivée de $\ln x$ sur $]0\,;+\infty[$ est $\frac{1}{x}$.

1. Calcule la dérivée de $f(x) = 3\ln x$, $g(x) = \ln x + 2x$ et $h(x) = 5\ln x - x^2$.

2. Que peut-on dire du signe de la dérivée de ln ?

Exercice 4 – Résoudre avec le logarithme

Résous les équations $e^x = 5$, $\ln x = 2$, $e^x = 0{,}1$ et $\ln x = -1$.

1. Donne les solutions exactes puis approchées.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Domaine, signe, variations

On étudie la fonction ln.

1. Donne son ensemble de définition.

2. Pour quelles valeurs de x a-t-on $\ln x > 0$? $\ln x < 0$?

3. Résous $\ln x \geq 3$.

Exercice 6 – Résoudre une exponentielle composée

Résous $e^{3x} = 20$, puis $4e^{-0{,}5t} = 1$, et enfin $e^{2x+1} = 7$.

1. Donne les solutions exactes puis approchées à 10^{-3}.

Exercice 7 – Résoudre une équation avec ln

Résous $\ln(2x-1) = 3$, puis $\ln x + \ln 4 = \ln 12$, et enfin $2\ln x = \ln 9$.

1. Précise à chaque fois le domaine, puis résous.

Exercice 8 – Dérivée de ln(ax + b)

Dérive $f(x) = \ln(3x)$, $g(x) = \ln(2x-5)$ sur $\left]\frac{5}{2}\,;+\infty\right[$ et $h(x) = \ln(x^2+1)$.

1. Donne les trois dérivées.

Exercice 9 – Combiner exponentielle et logarithme

Simplifie $A = \ln\left(e^4\right)$, $B = e^{2\ln 3}$, $C = \ln\left(\frac{e^5}{e^2}\right)$ et $D = e^{\ln 4 + \ln 2}$.

1. Donne la valeur exacte de chacune.

Exercice 10 – Limites du logarithme

On étudie le comportement de $\ln x$ aux bornes de son domaine.

1. Calcule $\ln 0{,}1$, $\ln 0{,}001$ et $\ln\left(10^{-6}\right)$. Que se passe-t-il en 0^+ ?

2. Calcule $\ln 100$, $\ln 10^6$ et $\ln 10^{12}$. Que se passe-t-il en $+\infty$?

3. Compare la croissance de $\ln x$ et celle de x.

Exercice 11 – Demi-vie exacte

L'activité d'une source suit $A(t) = A_0 e^{-0{,}035t}$, t en jours.

1. Calcule la demi-vie exacte.

2. Calcule le temps au bout duquel il ne reste que 10% de l'activité.

3. Vérifie la cohérence des deux résultats.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 12 – Dimensionner une constante de temps

Un condensateur se décharge selon $u(t) = 15e^{-t/\tau}$ volts. Le cahier des charges impose que la tension descende sous 1 V en moins de 50 ms.

1. Exprime la condition sur τ.

2. Détermine la valeur maximale de τ.

3. Si $R = 10$ kΩ, quelle capacité maximale peut-on choisir, sachant que $\tau = RC$?

Exercice 13 – Étude de x − ln x

Soit $f(x) = x - \ln x$ sur $]0\,;+\infty[$.

1. Calcule $f'(x)$ et mets-la sous la forme $\dfrac{x-1}{x}$.

2. Dresse le tableau de variations.

3. Donne le minimum de f et déduis-en une inégalité célèbre.

Exercice 14 – Croissances comparées

Soit $g(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ sur $]0\,;+\infty[$.

1. Calcule $g(1)$, $g(e)$, $g(10)$ et $g(100)$.

2. Calcule $g'(x)$ et détermine le maximum de g.

3. Donne la limite de g en $+\infty$.

Exercice 15 – Inéquation avec logarithme

Résous l'inéquation $\ln(x-2) \leq 1$.

1. Détermine le domaine.

2. Résous l'inéquation.

3. Résous ensuite $\ln(3x) > \ln(x+4)$.

Exercice 16 – Type bac : durée d'une décharge

Un condensateur se décharge selon $u(t) = 24e^{-t/0{,}04}$ volts, t en secondes.

1. Calcule la tension après 0,04 s, puis après 0,12 s.

2. Détermine l'instant exact où la tension vaut 6 V.

3. Détermine l'instant où elle passe sous 0,24 V (soit 1%).

4. Combien de constantes de temps cela représente-t-il ?

Exercice 17 – Type bac : étude d'une fonction avec ln

Soit $f(x) = x^2 - 8\ln x$ sur $]0\,;+\infty[$.

1. Calcule $f'(x)$ et factorise-la.

2. Dresse le tableau de variations.

3. Calcule le minimum, en valeur exacte puis approchée.

4. Détermine la tangente au point d'abscisse 1.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 18 – Type bac : datation par décroissance

Un échantillon contient un isotope dont l'activité décroît selon $A(t) = A_0 e^{-kt}$, avec une demi-vie de 5 730 ans (datation au carbone 14).

1. Détermine k, en an^{-1}.

2. Un échantillon a une activité égale à 72% de celle d'un échantillon actuel. Détermine son âge.

3. Quel serait l'âge d'un échantillon à 25% d'activité ?

4. Vérifie ce dernier résultat autrement.

Exercice 19 – Type bac : dimensionner un procédé

Un bain de rinçage voit sa concentration en polluant décroître selon $c(t) = 80e^{-0{,}25t}$ mg/L (t en heures). La norme de rejet est de 0,8 mg/L.

1. Calcule la durée exacte du traitement nécessaire.

2. Calcule la concentration après 12 heures.

3. Un accélérateur porte le coefficient à 0,4. Quelle durée alors ?

4. Quel gain de temps l'accélérateur apporte-t-il, en pourcentage ?

Exercice 20 – Type bac : ln et logarithme décimal

L'enseignement commun utilise le logarithme décimal log, la spécialité le logarithme népérien ln. On veut relier les deux.

1. Montre que $\log x = \dfrac{\ln x}{\ln 10}$.

2. Calcule $\ln 10$ et le coefficient de conversion.

3. Vérifie la relation sur $x = 100$ et $x = 2$.

4. Un niveau sonore vaut $L = 10 \log \dfrac{I}{I_0}$. Réécris-le avec ln.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).