Fonctions exponentielles — Terminale STI2D

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

Une suite géométrique ne donne la valeur d'une grandeur qu'aux instants entiers. Or une batterie se décharge en continu, une pièce refroidit en continu, un prix évolue tous les jours : il faut donc un modèle défini pour TOUT réel, et c'est la fonction $x \mapsto a^x$. Sa propriété centrale est qu'elle traduit un taux d'évolution CONSTANT : multiplier le temps par deux, c'est élever le coefficient au carré. Ces 20 exercices corrigés installent les propriétés algébriques ($a^{x+y} = a^x a^y$), le sens de variation selon que a dépasse 1 ou non, le passage du taux au modèle, le taux moyen, et la résolution de $a^x = b$ par balayage — le logarithme décimal, qui la rendra immédiate, arrive au chapitre suivant. La difficulté est croissante : l'énoncé puis la correction détaillée s'affichent d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-sti2d/fonctions-exponentielles

Exercice 1 – Premières images

On considère $f(x) = 1\,200 \times 1{,}04^x$, modélisant la valeur d'un stock (en euros) au bout de x années.

1. Calcule $f(0)$, $f(1)$ et $f(3)$, arrondis à l'euro.

2. Calcule $f(0{,}5)$ et interprète.

Exercice 2 – Propriétés algébriques

Simplifie les expressions suivantes, où $a > 0$:

$$A = a^3 \times a^5 \qquad B = \frac{a^7}{a^4} \qquad C = \left(a^2\right)^4 \qquad D = a^{-2}$$

1. Donne la forme la plus simple de chaque expression.

Exercice 3 – Sens de variation

On considère $f(x) = 3 \times 1{,}25^x$, $g(x) = 500 \times 0{,}85^x$ et $h(x) = 40 \times 1^x$.

1. Donne le sens de variation de chaque fonction sur $\mathbb{R}$.

2. Calcule trois images de chacune pour vérifier.

Exercice 4 – De la suite géométrique à la fonction

Une suite géométrique est définie par $u_n = 80 \times 1{,}15^{\,n}$, où n est un nombre entier de mois. On lui associe la fonction $f(x) = 80 \times 1{,}15^x$ définie pour tout réel $x \geq 0$.

1. Vérifie que $f(3) = u_3$.

2. Calcule $f(2{,}5)$ et dis ce que représente cette valeur.

3. Quelle différence essentielle y a-t-il entre u et f ?

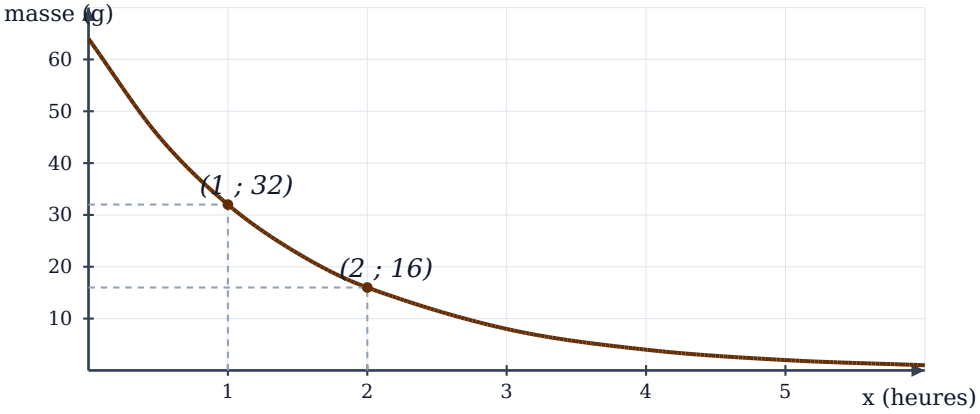
mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Lecture graphique

La courbe représente $f(x) = 64 \times 0{,}5^x$ sur $[0\,;6]$, où $f(x)$ est une masse en grammes et x une durée en heures.

1. Lis $f(0)$, $f(2)$ et $f(4)$.

2. Au bout de combien de temps la masse est-elle divisée par deux ? par quatre ?



Exercice 6 – Du taux au modèle exponentiel

La consommation électrique d'un site industriel était de 860 MWh en 2026 et augmente de 3,2% par an.

1. Exprime la consommation $C(x)$ après x années.

2. Estime la consommation en 2031, puis au milieu de l'année 2029.

Exercice 7 – Résoudre a^x = b par balayage

On cherche à résoudre $1{,}06^x = 2$, c'est-à-dire à déterminer en combien de temps une grandeur qui croît de 6% par an DOUBLE.

1. Encadre la solution entre deux entiers.

2. Affine la solution au dixième.

Exercice 8 – Comparer deux modèles

Deux capteurs se dégradent selon $f(x) = 100 \times 0{,}92^x$ et $g(x) = 120 \times 0{,}88^x$, où x est le nombre d'années et f, g des indices de performance.

1. Compare les performances à $x = 0$, $x = 3$ et $x = 8$.

2. Détermine par balayage l'année où les deux performances s'égalisent.

Exercice 9 – Demi-vie et temps de doublement

Une source radioactive a une activité modélisée par $A(t) = 4\,000 \times 0{,}5^{t/6}$ becquerels, où t est en jours.

1. Calcule $A(0)$, $A(6)$ et $A(12)$.

2. Quelle est la demi-vie de cette source ?

3. Réécris le modèle sous la forme $A(t) = 4\,000 \times a^t$ et donne la valeur de a.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 10 – Changer d'unité de temps

Une grandeur croît de 2% par mois. On note $f(x) = 1{,}02^x$ avec x en mois.

1. Quel est le coefficient d'évolution sur une année ?

2. Exprime le même modèle avec le temps t en années.

3. Quel est le taux annuel correspondant ?

Exercice 11 – Refroidissement d'une pièce

Une pièce sortie du four est à 180 °C dans un atelier à 20 °C. L'écart de température avec l'ambiante décroît de 9% par minute. On note $T(t)$ la température de la pièce après t minutes.

1. Exprime l'écart $E(t)$ puis $T(t)$.

2. Calcule la température après 10 minutes, puis après 30 minutes.

3. Au bout de combien de temps la pièce est-elle sous 50 °C ?

Exercice 12 – Ajuster un modèle sur deux mesures

Un capteur mesure une concentration : $C(0) = 250$ mg/L et $C(5) = 128$ mg/L. On suppose une décroissance à taux constant, donc $C(t) = 250 \times a^t$.

1. Détermine a au millième.

2. Donne le taux de baisse par unité de temps.

3. Estime $C(8)$.

Exercice 13 – Seuil de fiabilité

Un lot de 2 000 composants perd chaque année 7% de ses éléments encore en service. On note $N(t) = 2\,000 \times 0{,}93^t$ le nombre de composants en service après t années.

1. Calcule $N(5)$ et $N(10)$.

2. Au bout de combien d'années reste-t-il moins de la moitié du lot ?

3. Et moins de 200 composants ?

Exercice 14 – Exponentielle contre affine

Deux modèles décrivent l'évolution d'un nombre d'abonnés à un service de télémaintenance : $f(x) = 500 + 120x$ (modèle affine) et $g(x) = 500 \times 1{,}18^x$ (modèle exponentiel), x en années.

1. Compare les prévisions à 1, 3 et 6 ans.

2. Détermine par balayage l'année où l'exponentiel dépasse l'affine.

3. Que se passe-t-il à long terme ?

Exercice 15 – Demi-vie d'un modèle en base a

Une grandeur suit $f(t) = 900 \times 0{,}94^t$, t en jours.

1. Calcule $f(5)$ et $f(10)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

2. Détermine par balayage le temps de demi-vie.

3. Vérifie que ce temps est le même en partant de $f(5)$.

Exercice 16 – Type bac : consommation d'un site

La consommation d'eau d'un site industriel est de 12 400 m³ en 2026. Un plan d'économies vise une baisse de 6% par an. On modélise la consommation par $C(x) = 12\,400 \times 0{,}94^{x}$, x en années depuis 2026.

1. Calcule la consommation prévue en 2030, arrondie au m³.

2. Quel est le taux de baisse global entre 2026 et 2030 ?

3. L'objectif est de descendre sous 8 000 m³. En quelle année sera-t-il atteint ?

4. Quel taux annuel constant permettrait d'atteindre 8 000 m³ dès 2030 ?

Exercice 17 – Type bac : valeur d'un équipement au mois près

Un équipement acheté 36 000 € perd 20% de sa valeur par an. On modélise sa valeur par $V(t) = 36\,000 \times 0{,}8^{t}$, t en années.

1. Calcule $V(2)$ et $V(2{,}5)$.

2. Donne le coefficient de dépréciation MENSUEL.

3. Calcule la valeur après 18 mois de deux façons.

4. Au bout de combien de mois la valeur descend-elle sous 20 000 € ?

Exercice 18 – Type bac : deux placements

Deux placements sont proposés pour un capital de 10 000 €. Placement A : 4% par an. Placement B : 15 000 € de valeur de départ pour un autre investisseur, mais l'atelier ne peut y mettre que 8 000 € à 6% par an.

1. Exprime les capitaux $A(t)$ et $B(t)$.

2. Compare les deux capitaux à 5 ans et à 15 ans.

3. Détermine par balayage l'année où B rattrape A.

Exercice 19 – Type bac : décharge d'une batterie et algorithme

Une batterie de secours conserve 96% de sa charge par jour. Sa charge initiale est de 2 400 Wh. On note $f(t) = 2\,400 \times 0{,}96^{t}$.

1. Calcule la charge après une semaine.

2. Détermine la demi-vie de la charge par balayage.

3. Écris un programme Python renvoyant le nombre de jours au bout duquel la charge passe sous une valeur s donnée.

4. Applique-le pour $s = 1\,000$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 20 – Type bac : du discret au continu

Un atelier relève le nombre de pièces en attente à la fin de chaque semaine : $u_0 = 640$, $u_1 = 544$, $u_2 = 462{,}4$, $u_3 = 393{,}04$.

1. Montre que ces relevés suivent une suite géométrique et donne sa raison.

2. Donne la fonction f qui prolonge cette suite aux temps réels.

3. Estime le nombre de pièces en attente au milieu de la 2^{e} semaine.

4. Au bout de combien de semaines passe-t-on sous 100 pièces ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Premières images

$f(0) = 1\,200 \times 1{,}04^0 = 1\,200 \times 1 = 1\,200$ € : c'est la valeur initiale (tout nombre non nul élevé à la puissance 0 vaut 1).

$f(1) = 1\,200 \times 1{,}04 = 1\,248$ €.

$f(3) = 1\,200 \times 1{,}04^3$. Or $1{,}04^3 \approx 1{,}124\,864$, donc $f(3) \approx 1\,349{,}8$, soit environ 1 350 €.

$f(0{,}5) = 1\,200 \times 1{,}04^{0{,}5} = 1\,200\sqrt{1{,}04}$. Or $\sqrt{1{,}04} \approx 1{,}019\,804$, donc $f(0{,}5) \approx 1\,223{,}8$ €.

Interprétation : $f(0{,}5)$ donne la valeur au bout de SIX MOIS. C'est tout l'intérêt du modèle continu : il est défini pour des durées non entières, contrairement à une suite.

Contrôle : $1{,}019\,804^2 \approx 1{,}04$ ✔ — deux semestres de hausse à 1,98% donnent bien une année à 4%.

Réponse. $f(0) = 1\,200$ € · $f(1) = 1\,248$ € · $f(3) \approx 1\,350$ € · $f(0{,}5) \approx 1\,223{,}80$ €, valeur au bout de six mois.

Rappel de cours. $a^0 = 1$ et $a^{0{,}5} = \sqrt{a}$. Une fonction exponentielle est définie pour TOUT réel, y compris non entier.

Erreur fréquente. Confondre $1\,200 \times 1{,}04^3$ et $(1\,200 \times 1{,}04)^3$: l'exposant ne porte que sur la base 1,04.

Correction de l'exercice 2 – Propriétés algébriques

Produit de puissances de même base : les exposants s'AJOUTENT. $A = a^{3+5} = a^8$.

Quotient : les exposants se RETRANCHENT. $B = a^{7-4} = a^3$.

Puissance d'une puissance : les exposants se MULTIPLIENT. $C = a^{2\times 4} = a^8$.

Exposant négatif : $D = a^{-2} = \dfrac{1}{a^2}$.

Contrôle numérique avec $a = 2$: $A = 8 \times 32 = 256 = 2^8$ ✔ ; $B = \frac{128}{16} = 8 = 2^3$ ✔ ; $C = 4^4 = 256$ ✔ ; $D = \frac{1}{4}$ ✔.

Ces règles sont exactement celles des puissances entières, étendues à tous les exposants réels : c'est ce qui rend les fonctions exponentielles si commodes.

Réponse. $A = a^8$ · $B = a^3$ · $C = a^8$ · $D = \dfrac{1}{a^2}$.

Rappel de cours. $a^x \times a^y = a^{x+y}$ · $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ · $(a^x)^y = a^{xy}$ · $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$.

Erreur fréquente. Multiplier les exposants dans un produit : $a^3 \times a^5$ vaut a^8, pas a^{15}.

Correction de l'exercice 3 – Sens de variation

Pour $x \mapsto k\,a^x$ avec $k > 0$: la fonction est CROISSANTE si $a > 1$, DÉCROISSANTE si $0 < a < 1$, CONSTANTE si $a = 1$.

f : $a = 1{,}25 > 1$, donc f est croissante. Vérification : $f(0) = 3$, $f(1) = 3{,}75$, $f(2) = 4{,}687\,5$ ✔.

g : $a = 0{,}85 < 1$, donc g est décroissante. Vérification : $g(0) = 500$, $g(1) = 425$, $g(2) = 361{,}25$ ✔.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

h : $a = 1$, donc $h(x) = 40$ pour tout x : la fonction est constante.

Point commun aux trois : elles sont toutes STRICTEMENT POSITIVES. Une fonction exponentielle ne s'annule jamais et ne change jamais de signe.

Conséquence pour la modélisation : un modèle exponentiel ne peut jamais prévoir une valeur négative — à la différence d'un modèle affine, qui finit toujours par en donner.

Réponse. f croissante ($a = 1{,}25 > 1$) · g décroissante ($a = 0{,}85 < 1$) · h constante ($a = 1$) · les trois sont strictement positives.

Rappel de cours. $a > 1$: croissance · $0 < a < 1$: décroissance · et toujours $a^x > 0$.

Erreur fréquente. Juger le sens de variation sur le coefficient k : c'est la BASE a qui décide, comparée à 1.

Correction de l'exercice 4 – De la suite géométrique à la fonction

$u_3 = 80 \times 1{,}15^3$ et $f(3) = 80 \times 1{,}15^3$: les deux expressions sont identiques.

$1{,}15^3 \approx 1{,}520\,875$, donc $u_3 = f(3) \approx 121{,}67$.

$f(2{,}5) = 80 \times 1{,}15^{2{,}5}$. Or $1{,}15^{2{,}5} \approx 1{,}418\,865$, donc $f(2{,}5) \approx 113{,}5$.

Cette valeur correspond à 2 mois et demi, c'est-à-dire 2 mois et 15 jours — une date pour laquelle la suite ne dit RIEN.

Différence essentielle : la suite (u_n) n'est définie que pour des rangs ENTIERS (un point par mois), alors que f est définie pour tout réel et fournit une courbe continue.

Les points de la suite sont donc exactement les points de la courbe d'abscisses entières : f est le PROLONGEMENT CONTINU de la suite.

Réponse. $f(3) = u_3 \approx 121{,}67$ · $f(2{,}5) \approx 113{,}5$, valeur au bout de deux mois et demi · la suite ne donne que des rangs entiers, f prolonge à tous les réels.

Rappel de cours. $u_n = u_0 q^n$ (points isolés) et $f(x) = u_0 q^x$ (courbe continue) : même formule, domaine différent.

Erreur fréquente. Croire qu'on peut lire $u_{2,5}$: une suite n'a pas de terme de rang non entier. C'est pour cela qu'on passe à la fonction.

Correction de l'exercice 5 – Lecture graphique

Lecture graphique : $f(0) = 64$ g, $f(2) = 16$ g et $f(4) = 4$ g.

Contrôle par le calcul : $f(2) = 64 \times 0{,}25 = 16$ ✔ et $f(4) = 64 \times 0{,}0625 = 4$ ✔.

Masse divisée par deux : on cherche $f(x) = 32$. Or $f(1) = 64 \times 0{,}5 = 32$ ✔, donc au bout de 1 heure.

Masse divisée par quatre : $f(x) = 16$, atteint en $x = 2$ heures.

La base 0,5 se lit donc directement : chaque heure divise la masse par deux. C'est ce qu'on appelle une DEMI-VIE d'une heure.

Propriété remarquable : la durée de division par deux est TOUJOURS la même, quel que soit le point de départ. De 16 g, il faudra encore une heure pour atteindre 8 g.

Réponse. $f(0) = 64$ g, $f(2) = 16$ g, $f(4) = 4$ g · masse divisée par deux en 1 h, par quatre en 2 h.

Rappel de cours. Pour $f(x) = k\,a^x$, la durée de division par deux ne dépend pas de l'instant choisi : c'est la demi-vie.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 6 – Du taux au modèle exponentiel

Une hausse de 3,2% par an correspond à une multiplication par 1,032 chaque année : $C(x) = 860 \times 1{,}032^{x}$.

2031 correspond à $x = 5$: $C(5) = 860 \times 1{,}032^{5}$.

$1{,}032^{5} \approx 1{,}170\,617$, donc $C(5) \approx 1\,006{,}7$ MWh.

Milieu de 2029 : cela fait $2029{,}5 - 2026 = 3{,}5$ années, donc $x = 3{,}5$.

$1{,}032^{3{,}5} \approx 1{,}116\,548$, donc $C(3{,}5) \approx 960{,}2$ MWh.

Contrôle d’encadrement : $C(3) \approx 945{,}3$ et $C(4) \approx 975{,}6$ MWh. La valeur 960,2 est bien entre les deux ✔.

C’est précisément l’avantage du modèle continu : il interpole entre deux années, ce qu’une suite ne permet pas.

Réponse. $C(x) = 860 \times 1{,}032^{x}$ · $C(5) \approx 1\,007$ MWh en 2031 · $C(3{,}5) \approx 960$ MWh au milieu de 2029.

Rappel de cours. Hausse de t% par période : $f(x) = f(0)\left(1 + \frac{t}{100}\right)^{x}$, valable pour x réel.

Erreur fréquente. Écrire $C(x) = 860 \times 3{,}2^{x}$: la base est le COEFFICIENT 1,032, pas le taux.

Correction de l’exercice 7 – Résoudre a^x = b par balayage

La fonction $x \mapsto 1{,}06^{x}$ est croissante : on peut donc balayer sans risque de sauter la solution.

$1{,}06^{11} \approx 1{,}898\,3$: inférieur à 2.

$1{,}06^{12} \approx 2{,}012\,2$: supérieur à 2.

La solution est donc comprise entre 11 et 12 : il faut entre 11 et 12 ans pour doubler.

On affine au dixième : $1{,}06^{11{,}8} \approx 1{,}989\,1$ (insuffisant) et $1{,}06^{11{,}9} \approx 2{,}000\,6$ (dépassé).

La solution est donc $x \approx 11{,}9$ années, soit environ 11 ans et 11 mois.

Repère utile à connaître : à t% par an, le temps de doublement vaut approximativement $\frac{70}{t}$ années. Ici $\frac{70}{6} \approx 11{,}7$ ✔ proche des 11,9 trouvés.

Réponse. $11 < x < 12$ · plus précisément $x \approx 11{,}9$ ans (environ 11 ans et 11 mois).

Rappel de cours. La fonction $x \mapsto a^{x}$ étant monotone, un balayage encadre la solution de façon sûre. Le logarithme décimal (chapitre suivant) la donnera directement.

Erreur fréquente. Diviser 2 par 1,06 pour « isoler » x : l’inconnue est en exposant, elle ne s’isole pas par division.

Correction de l’exercice 8 – Comparer deux modèles

$x = 0$: $f(0) = 100$ et $g(0) = 120$. Le second capteur part avec un avantage de 20 points.

$x = 3$: $f(3) = 100 \times 0{,}92^{3} \approx 77{,}9$ et $g(3) = 120 \times 0{,}88^{3} \approx 81{,}8$. Le second est encore devant.

$x = 8$: $f(8) = 100 \times 0{,}92^{8} \approx 51{,}3$ et $g(8) = 120 \times 0{,}88^{8} \approx 43{,}2$. Cette fois, le PREMIER est devant.

Le classement s’est inversé entre 3 et 8 ans : le second capteur, qui se dégrade plus vite (-12% contre -8%), finit par passer derrière malgré son avance initiale.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Recherche du croisement par balayage : $x = 5$ donne $f \approx 65{,}9$ et $g \approx 63{,}3$ — déjà inversé.

$x = 4$: $f \approx 71{,}6$ et $g \approx 72{,}0$ — encore à l'avantage de g, de très peu.

Le croisement a donc lieu entre 4 et 5 ans. En affinant : $x = 4{,}1$ donne $f \approx 71{,}0$ et $g \approx 71{,}0$: les performances s'égalisent vers 4,1 ans.

Conclusion pour un acheteur : le capteur g est préférable pour un usage de moins de quatre ans, le capteur f au-delà.

Réponse. 120 contre 100 à $x = 0$, $\approx 81{,}8$ contre $\approx 77{,}9$ à 3 ans, puis $\approx 43{,}2$ contre $\approx 51{,}3$ à 8 ans · croisement vers $x \approx 4{,}1$ ans.

Rappel de cours. Deux modèles exponentiels se croisent au plus une fois : celui dont la base est la plus grande finit toujours par dominer.

Erreur fréquente. Conclure à partir des valeurs initiales : l'avance de 20 points de g est effacée en quatre ans par sa dégradation plus rapide.

Correction de l'exercice 9 – Demi-vie et temps de doublement

$A(0) = 4\,000 \times 0{,}5^{0} = 4\,000$ Bq.

$A(6) = 4\,000 \times 0{,}5^{6/6} = 4\,000 \times 0{,}5 = 2\,000$ Bq.

$A(12) = 4\,000 \times 0{,}5^{2} = 1\,000$ Bq.

L'activité est donc divisée par deux tous les 6 jours : la demi-vie vaut 6 jours. C'est ce que traduit l'exposant $\frac{t}{6}$.

Pour la forme a^t, on utilise $(a^x)^y = a^{xy}$: $0{,}5^{t/6} = \left(0{,}5^{1/6}\right)^{t}$.

Donc $a = 0{,}5^{1/6} = \sqrt[6]{0{,}5} \approx 0{,}890\,899$.

Interprétation de a : l'activité perd environ 10,9% par jour ($1 - 0{,}8909 = 0{,}1091$).

Contrôle : $0{,}890\,899^{6} \approx 0{,}5$ ✔ six jours de baisse à 10,9% divisent bien l'activité par deux.

Réponse. $A(0) = 4\,000$ Bq, $A(6) = 2\,000$ Bq, $A(12) = 1\,000$ Bq · demi-vie 6 jours · $a = 0{,}5^{1/6} \approx 0{,}8909$, soit $-10{,}9\%$ par jour.

Rappel de cours. $0{,}5^{t/T}$ décrit une grandeur de demi-vie T · et $a = 0{,}5^{1/T}$ donne le coefficient par unité de temps.

Erreur fréquente. Annoncer un taux journalier de $-\frac{50}{6} \approx -8{,}3\%$: les baisses se composent, le taux réel est de $-10{,}9\%$.

Correction de l'exercice 10 – Changer d'unité de temps

Une année compte 12 mois : le coefficient annuel est $1{,}02^{12}$.

$1{,}02^{12} \approx 1{,}268\,242$.

Modèle en années : si t est en années, alors $x = 12t$, donc $f = 1{,}02^{12t} = \left(1{,}02^{12}\right)^{t} \approx 1{,}268\,242^{\,t}$.

Taux annuel : $(1{,}268\,242 - 1) \times 100 \approx 26{,}8\%$.

Contrôle : $2\% \times 12 = 24\%$ donnerait une sous-estimation. L'écart de 2,8 points est l'effet du cumul des hausses mensuelles.

Méthode générale : pour changer d'unité de temps, on élève la base à la puissance correspondant au nombre d'anciennes unités contenues dans la nouvelle.

Réponse. Coefficient annuel $1{,}02^{12} \approx 1{,}2682$ · modèle $g(t) \approx 1{,}2682^{\,t}$ avec t en années ·

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

taux annuel ≈ +26,8%.

Rappel de cours. Changement d'unité : a^x avec x en mois devient $\left(a^{12}\right)^t$ avec t en années.

Erreur fréquente. Multiplier le taux par 12 : 24% au lieu de 26,8%, soit 2,8 points d'écart dès la première année.

Correction de l'exercice 11 – Refroidissement d'une pièce

Écart initial : $180 - 20 = 160$ °C. L'écart décroît de 9% par minute, donc $E(t) = 160 \times 0{,}91^t$.

La température est l'ambiante plus l'écart : $T(t) = 20 + 160 \times 0{,}91^t$.

Après 10 minutes : $0{,}91^{10} \approx 0{,}389\,416$, donc $T(10) \approx 20 + 62{,}3 = 82{,}3$ °C.

Après 30 minutes : $0{,}91^{30} \approx 0{,}059\,046$, donc $T(30) \approx 20 + 9{,}4 = 29{,}4$ °C.

Pour passer sous 50 °C, il faut $20 + 160 \times 0{,}91^t < 50$, soit $0{,}91^t < \dfrac{30}{160} = 0{,}1875$.

Balayage : $0{,}91^{17} \approx 0{,}201\,4$ (insuffisant) ; $0{,}91^{18} \approx 0{,}183\,3$ (suffisant).

La pièce passe donc sous 50 °C au bout de 18 minutes.

Contrôle : $T(18) \approx 20 + 160 \times 0{,}183\,3 \approx 49{,}3$ °C ✔ et $T(17) \approx 52{,}2$ °C ✔.

Remarque physique : la température ne tend pas vers 0 mais vers 20 °C, la température de l'atelier. C'est l'ÉCART qui décroît exponentiellement, jamais la température elle-même.

Réponse. $E(t) = 160 \times 0{,}91^t$ et $T(t) = 20 + 160 \times 0{,}91^t$ · $T(10) \approx 82{,}3$ °C, $T(30) \approx 29{,}4$ °C · sous 50 °C au bout de 18 minutes.

Rappel de cours. Loi de refroidissement : c'est l'ÉCART à la température ambiante qui suit un modèle exponentiel, d'où le « 20 + ».

Erreur fréquente. Modéliser $T(t) = 180 \times 0{,}91^t$: la pièce tendrait vers 0 °C, ce qui est impossible dans un atelier à 20 °C.

Correction de l'exercice 12 – Ajuster un modèle sur deux mesures

On écrit la condition en $t = 5$: $250 \times a^5 = 128$, donc $a^5 = \dfrac{128}{250} = 0{,}512$.

Donc $a = 0{,}512^{1/5} = \sqrt[5]{0{,}512}$.

Or $0{,}8^5 = 0{,}327\,68$ — trop petit ; essayons $0{,}87^5 \approx 0{,}498\,5$ et $0{,}875^5 \approx 0{,}512\,9$. La valeur cherchée est donc proche de 0,875.

Plus précisément, $0{,}512^{1/5} \approx 0{,}874\,7$, soit $a \approx 0{,}875$ au millième.

Taux de baisse : $(0{,}875 - 1) \times 100 = -12{,}5\%$ par unité de temps.

$C(8) = 250 \times 0{,}874\,7^8$. Or $0{,}874\,7^8 \approx 0{,}342\,7$, donc $C(8) \approx 85{,}7$ mg/L.

Contrôle de cohérence : $C(8)$ doit être inférieure à $C(5) = 128$ et l'on trouve 85,9 ✔ ; et sur les 3 unités écoulées, le coefficient $0{,}8747^3 \approx 0{,}669$ donne bien $128 \times 0{,}669 \approx 85{,}6$ ✔.

Réponse. $a = 0{,}512^{1/5} \approx 0{,}875$ · baisse d'environ 12,5% par unité de temps · $C(8) \approx 86$ mg/L.

Rappel de cours. Deux points suffisent à caler un modèle exponentiel : $a = \left(\dfrac{C(t_2)}{C(t_1)}\right)^{1/(t_2 - t_1)}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Erreur fréquente. Calculer le taux moyen par soustraction : $\frac{250-128}{5} \approx 24{,}4$ mg/L par unité, ce qui décrirait un modèle AFFINE et prévoirait une concentration nulle à $t \approx 10{,}2$.

Correction de l'exercice 13 – Seuil de fiabilité

$0{,}93^5 \approx 0{,}695\,688$, donc $N(5) \approx 1\,391{,}4$, soit environ 1 391 composants.

$0{,}93^{10} \approx 0{,}483\,982$, donc $N(10) \approx 968$ composants.

Moins de la moitié signifie $N(t) < 1\,000$, soit $0{,}93^t < 0{,}5$.

Or $0{,}93^9 \approx 0{,}520\,4$ (au-dessus) et $0{,}93^{10} \approx 0{,}484\,0$ (en dessous) : le seuil est franchi la 10e année.

Moins de 200 composants : $0{,}93^t < \frac{200}{2\,000} = 0{,}1$.

Balayage : $0{,}93^{31} \approx 0{,}105\,4$ (insuffisant) ; $0{,}93^{32} \approx 0{,}098\,1$ (suffisant).

Il reste donc moins de 200 composants à partir de la 32e année.

Observation : il faut 10 ans pour perdre la moitié du lot, mais 32 ans pour n'en garder qu'un dixième. Une décroissance exponentielle est de plus en plus lente en valeur absolue.

Réponse. $N(5) \approx 1\,391$ et $N(10) \approx 968$ composants · moins de la moitié dès la 10e année · moins de 200 composants à partir de la 32e année.

Rappel de cours. Un seuil sur $k\,a^t$ se ramène toujours à $a^t < \frac{\text{seuil}}{k}$, puis à un balayage (ou au logarithme, chapitre suivant).

Erreur fréquente. Multiplier par 10 le temps de demi-vie pour atteindre le dixième : il faudrait 3,3 demi-vies, pas 10.

Correction de l'exercice 14 – Exponentielle contre affine

$x = 1$: $f(1) = 620$ et $g(1) = 590$. L'affine est devant.

$x = 3$: $f(3) = 860$ et $g(3) = 500 \times 1{,}18^3 \approx 500 \times 1{,}643\,0 \approx 821{,}5$. L'affine est encore devant.

$x = 6$: $f(6) = 1\,220$ et $g(6) = 500 \times 1{,}18^6 \approx 500 \times 2{,}699\,6 \approx 1\,349{,}8$. L'exponentiel est passé devant.

Balayage entre 3 et 6 : $x = 4$ donne $f = 980$ et $g \approx 969{,}0$ (affine devant) ; $x = 5$ donne $f = 1\,100$ et $g \approx 1\,143{,}4$ (exponentiel devant).

Le dépassement a donc lieu entre la 4e et la 5e année, autour de $x \approx 4{,}2$.

À long terme, l'écart se creuse spectaculairement : $f(20) = 2\,900$ alors que $g(20) = 500 \times 1{,}18^{20} \approx 500 \times 27{,}39 \approx 13\,697$, soit près de cinq fois plus.

Règle générale : une croissance exponentielle (base > 1) finit TOUJOURS par dépasser n'importe quelle croissance affine, quels que soient les coefficients.

Conséquence pratique : sur une prévision d'abonnés, le choix du modèle change complètement le dimensionnement à 10 ans. Il faut donc justifier le modèle par les données observées, pas le choisir par commodité.

Réponse. Affine devant à 1 et 3 ans, exponentiel devant à 6 ans · dépassement vers $x \approx 4{,}2$ ans · à 20 ans, 2 900 contre ≈ 13 697 abonnés.

Rappel de cours. Croissance exponentielle contre affine : l'exponentielle gagne toujours à terme, même partie de plus bas et avec une base proche de 1.

Erreur fréquente. Choisir le modèle sur les premières années : les deux se ressemblent

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

au début, alors qu'ils divergent radicalement ensuite.

Correction de l'exercice 15 – Demi-vie d'un modèle en base a

$0{,}94^5 \approx 0{,}733\,904$, donc $f(5) \approx 660{,}5$.

$0{,}94^{10} \approx 0{,}538\,615$, donc $f(10) \approx 484{,}8$.

Demi-vie : on cherche t tel que $0{,}94^t = 0{,}5$.

Balayage : $0{,}94^{11} \approx 0{,}506\,3$ (encore au-dessus) ; $0{,}94^{12} \approx 0{,}475\,9$ (en dessous).

La demi-vie est donc comprise entre 11 et 12 jours. En affinant : $0{,}94^{11{,}2} \approx 0{,}500\,1$, soit environ 11,2 jours.

Vérification depuis $f(5)$: la moitié de 660,5 vaut 330,3. Or $f(16{,}2) = 900 \times 0{,}94^{16{,}2} \approx 900 \times 0{,}367\,0 \approx 330{,}3$ ✔.

Et $16{,}2 - 5 = 11{,}2$ jours : c'est bien la MÊME durée ✔.

Propriété générale : dans un modèle exponentiel, le temps de division par deux ne dépend pas de l'instant de départ. C'est ce qui distingue radicalement une décroissance exponentielle d'une décroissance affine.

Comparaison : un modèle affine perdant 54 unités par jour (la perte du premier jour) serait à zéro en 16,7 jours, alors que le modèle exponentiel y sera encore à 320 environ.

Réponse. $f(5) \approx 660{,}5$ et $f(10) \approx 484{,}8$ · demi-vie ≈ 11,2 jours · la même durée sépare $f(5)$ de sa moitié ✔.

Rappel de cours. Le temps de demi-vie d'un modèle $k\,a^t$ est CONSTANT : il ne dépend ni de k ni de l'instant choisi.

Erreur fréquente. Croire que la demi-vie double quand on part d'une valeur deux fois plus grande : elle est identique, c'est justement sa propriété caractéristique.

Correction de l'exercice 16 – Type bac : consommation d'un site

2030 correspond à $x = 4$: $C(4) = 12\,400 \times 0{,}94^4$.

$0{,}94^4 \approx 0{,}780\,749$, donc $C(4) \approx 9\,681{,}3$, soit environ 9 681 m³.

Taux global : le coefficient sur 4 ans vaut 0,780 749, donc $t = (0{,}780\,749 - 1) \times 100 \approx -21{,}9\%$.

Objectif : $12\,400 \times 0{,}94^x < 8\,000$, soit $0{,}94^x < \dfrac{8\,000}{12\,400} \approx 0{,}645\,2$.

Balayage : $0{,}94^7 \approx 0{,}648\,5$ (insuffisant) ; $0{,}94^8 \approx 0{,}609\,1$ (suffisant).

L'objectif est donc atteint pour $x = 8$, soit en 2034.

Dernière question : il faudrait un coefficient annuel a tel que $12\,400 \times a^4 = 8\,000$, donc $a^4 = 0{,}645\,2$.

$a = 0{,}645\,2^{1/4} \approx 0{,}896\,2$, soit un taux annuel d'environ −10,4%.

Conclusion à formuler : atteindre l'objectif quatre ans plus tôt exige de presque doubler l'effort annuel (−10,4% au lieu de −6%). C'est l'argument chiffré à présenter pour arbitrer entre délai et investissement.

Contrôle : $12\,400 \times 0{,}896\,2^4 \approx 12\,400 \times 0{,}645\,2 \approx 8\,000$ ✔.

Réponse. $C(4) \approx 9\,681$ m³ · baisse globale ≈ 21,9% sur 4 ans · objectif atteint en 2034 ($x = 8$) · il faudrait −10,4% par an pour y être dès 2030.

Rappel de cours. Pour trouver le taux qui atteint une cible en n périodes :

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$a = \left(\dfrac{\text{cible}}{\text{départ}}\right)^{1/n}$.

Erreur fréquente. Diviser les 21,9% de baisse globale par 4 pour retrouver le taux annuel : on obtiendrait 5,5% au lieu de 6%, car les baisses se composent.

Correction de l'exercice 17 – Type bac : valeur d'un équipement au mois près

$V(2) = 36\,000 \times 0{,}64 = 23\,040$ €.

$V(2{,}5) = 36\,000 \times 0{,}8^{2{,}5}$. Or $0{,}8^{2{,}5} \approx 0{,}572\,433$, donc $V(2{,}5) \approx 20\,607{,}6$ €.

Coefficient mensuel : il faut m tel que $m^{12} = 0{,}8$, donc $m = 0{,}8^{1/12} \approx 0{,}981\,6$.

Soit une dépréciation d'environ 1,85% par mois.

Valeur après 18 mois, première méthode (en années) : 18 mois = 1,5 an, donc $V(1{,}5) = 36\,000 \times 0{,}8^{1{,}5}$.

$0{,}8^{1{,}5} \approx 0{,}715\,542$, donc $V \approx 25\,759{,}5$ €.

Seconde méthode (en mois) : $36\,000 \times 0{,}981\,6^{18} \approx 36\,000 \times 0{,}715\,5 \approx 25\,759$ € ✔ Les deux coïncident, aux arrondis près.

Seuil de 20 000 € : $0{,}8^{t} < \dfrac{20\,000}{36\,000} \approx 0{,}555\,6$.

En années : $0{,}8^{2{,}5} \approx 0{,}572\,4$ (au-dessus) et $0{,}8^{2{,}75} \approx 0{,}537\,5$ (en dessous). Le seuil est franchi entre 2,5 et 2,75 ans.

En affinant : $0{,}8^{2{,}63} \approx 0{,}556\,1$ et $0{,}8^{2{,}64} \approx 0{,}554\,8$. La valeur passe sous 20 000 € vers $t \approx 2{,}64$ ans, soit environ 32 mois.

Contrôle : $36\,000 \times 0{,}981\,6^{32} \approx 19\,855$ € ✔ et à 31 mois, ≈ 20 228 € ✔.

Réponse. $V(2) = 23\,040$ € et $V(2{,}5) \approx 20\,608$ € · coefficient mensuel $0{,}8^{1/12} \approx 0{,}9816$ (soit −1,85%/mois) · $V(1{,}5) \approx 25\,759$ € par les deux méthodes · seuil des 20 000 € franchi vers 32 mois.

Rappel de cours. Passer d'un taux annuel à un taux mensuel : on prend la racine douzième du coefficient, jamais le taux divisé par 12.

Erreur fréquente. Annoncer $-\frac{20}{12} \approx -1{,}67\%$ par mois : douze baisses de 1,67% donneraient 0,817, pas 0,8.

Correction de l'exercice 18 – Type bac : deux placements

$A(t) = 10\,000 \times 1{,}04^{t}$ et $B(t) = 8\,000 \times 1{,}06^{t}$, avec t en années.

À 5 ans : $1{,}04^{5} \approx 1{,}216\,653$, donc $A(5) \approx 12\,166{,}5$ €.

$1{,}06^{5} \approx 1{,}338\,226$, donc $B(5) \approx 10\,705{,}8$ €. A est devant de 1 461 € environ.

À 15 ans : $1{,}04^{15} \approx 1{,}800\,944$, donc $A(15) \approx 18\,009{,}4$ €.

$1{,}06^{15} \approx 2{,}396\,558$, donc $B(15) \approx 19\,172{,}5$ €. Cette fois B est devant de 1 163 € environ.

Recherche du croisement : on cherche t tel que $8\,000 \times 1{,}06^{t} = 10\,000 \times 1{,}04^{t}$, c'est-à-dire $\left(\dfrac{1{,}06}{1{,}04}\right)^{t} = \dfrac{10\,000}{8\,000} = 1{,}25$.

Or $\dfrac{1{,}06}{1{,}04} \approx 1{,}019\,231$. On balaye : $1{,}019\,231^{11} \approx 1{,}233\,2$ (insuffisant) ; $1{,}019\,231^{12} \approx 1{,}256\,9$ (dépassé).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Le croisement a donc lieu entre 11 et 12 ans, plus précisément vers $t \approx 11{,}7$ ans.

Contrôle à 12 ans : $A(12) \approx 16\,010{,}3$ € et $B(12) \approx 16\,097{,}6$ € ✔ B vient de passer devant.

Conclusion : malgré 2 000 € de mise initiale en moins, le placement B rattrape A en un peu moins de 12 ans grâce à son taux supérieur. Le choix dépend donc de l'HORIZON de placement.

Réponse. $A(t) = 10\,000 \times 1{,}04^t$, $B(t) = 8\,000 \times 1{,}06^t$ · à 5 ans : ≈ 12 167 € contre ≈ 10 706 € · à 15 ans : ≈ 18 009 € contre ≈ 19 173 € · croisement vers 11,7 ans.

Rappel de cours. Pour comparer $k_1 a_1^t$ et $k_2 a_2^t$, on ramène à une seule exponentielle : $\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^t = \frac{k_1}{k_2}$.

Erreur fréquente. Comparer uniquement les taux (6% > 4%) : pendant presque douze ans, c'est le placement au taux le plus faible qui reste devant, grâce à sa mise initiale.

Correction de l'exercice 19 – Type bac : décharge d'une batterie et algorithme

Une semaine, c'est $t = 7$: $0{,}96^7 \approx 0{,}751\,447$, donc $f(7) \approx 1\,803{,}5$ Wh.

Demi-vie : on cherche t tel que $0{,}96^t = 0{,}5$.

Balayage : $0{,}96^{16} \approx 0{,}520\,4$ (au-dessus) ; $0{,}96^{17} \approx 0{,}499\,6$ (en dessous).

La demi-vie est donc d'environ 17 jours (et vaut 16,98 jours en valeur affinée).

Programme :

```
def jours(s):
    c = 2400
    t = 0
    while c >= s:
        c = 0.96 * c
        t = t + 1
    return t
```

La boucle `while` convient : on ne sait pas à l'avance combien de jours seront nécessaires.

Pour $s = 1\,000$: on cherche $0{,}96^t < \frac{1\,000}{2\,400} \approx 0{,}416\,7$.

$0{,}96^{21} \approx 0{,}424\,3$ (insuffisant) ; $0{,}96^{22} \approx 0{,}407\,3$ (suffisant).

Le programme renvoie donc 22 : la charge passe sous 1 000 Wh au bout de 22 jours.

Contrôle : $f(22) \approx 2\,400 \times 0{,}407\,3 \approx 978$ Wh ✔ et $f(21) \approx 1\,018{,}4$ Wh ✔.

Réponse. $f(7) \approx 1\,804$ Wh · demi-vie ≈ 17 jours · boucle `while c >= s` avec `c = 0.96*c` · pour $s = 1\,000$, le programme renvoie 22 jours.

Rappel de cours. Une décroissance exponentielle a une demi-vie CONSTANTE : de 2 400 à 1 200 Wh ou de 1 200 à 600 Wh, il faut la même durée.

Erreur fréquente. Croire que la charge s'annule : $0{,}96^t$ devient minuscule mais reste strictement positif. Le modèle ne prévoit jamais une batterie totalement vide.

Correction de l'exercice 20 – Type bac : du discret au continu

Quotients successifs : $\frac{544}{640} = 0{,}85$; $\frac{462{,}4}{544} = 0{,}85$; $\frac{393{,}04}{462{,}4} = 0{,}85$.

Les quotients sont constants : la suite est GÉOMÉTRIQUE de raison $q = 0{,}85$, soit une

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

baisse de 15% par semaine.

Prolongement continu : $f(x) = 640 \times 0{,}85^{x}$, défini pour tout réel $x \geq 0$.

Milieu de la 2e semaine : cela correspond à $x = 1{,}5$.

$0{,}85^{1{,}5} \approx 0{,}783\,64$, donc $f(1{,}5) \approx 501{,}5$ pièces.

Contrôle d'encadrement : $f(1) = 544$ et $f(2) = 462{,}4$, et 501,5 est bien entre les deux ✔.

Seuil de 100 pièces : $0{,}85^{x} < \dfrac{100}{640} = 0{,}156\,25$.

Balayage : $0{,}85^{11} \approx 0{,}167\,3$ (insuffisant) ; $0{,}85^{12} \approx 0{,}142\,2$ (suffisant).

Le seuil est donc franchi au cours de la 12e semaine. En affinant : $0{,}85^{11{,}4} \approx 0{,}156\,8$, donc vers $x \approx 11{,}4$ semaines.

Intérêt du modèle continu : il donne une date précise (au milieu de la 12e semaine), là où la suite ne permettait que de dire « entre la 11e et la 12e ».

Réponse. Suite géométrique de raison 0,85 · $f(x) = 640 \times 0{,}85^{x}$ · $f(1{,}5) \approx 501{,}5$ pièces · passage sous 100 pièces vers $x \approx 11{,}4$ semaines.

Rappel de cours. Une suite géométrique de raison $q > 0$ se prolonge par $f(x) = u_0 q^{x}$: les valeurs entières coïncident, et la fonction interpole entre elles.

Erreur fréquente. Interpoler linéairement entre $f(1) = 544$ et $f(2) = 462{,}4$: la moyenne 503,2 est proche de 501,5, mais l'écart grandit dès que la baisse est plus forte.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).