Variables aléatoires et loi binomiale — Terminale STI2D

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

Prélever 20 pièces et compter les défectueuses, tester 50 soudures, interroger 100 capteurs : chaque fois qu'on répète n fois la même épreuve à deux issues, de façon indépendante, le nombre de succès suit une LOI BINOMIALE $B(n\,;p)$. En première, on comptait les chemins de l'arbre à la main ; la terminale fournit l'outil général, les COEFFICIENTS BINOMIAUX $\binom{n}{k}$, lisibles sur le triangle de Pascal. À partir de là, tout se calcule : la probabilité d'obtenir exactement k défauts, celle d'en avoir au moins un, et le nombre moyen attendu, $E(X) = np$. Ces 20 exercices corrigés vont du triangle de Pascal aux plans de contrôle type bac. La difficulté est croissante : l'énoncé puis la correction détaillée s'affichent d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables : mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-sti2d/loi-binomiale

Exercice 1 – Loi et espérance d'une variable aléatoire

Le nombre X d'interventions par semaine sur une ligne suit la loi : $P(X = 0) = 0{,}4$; $P(X = 1) = 0{,}35$; $P(X = 2) = 0{,}2$; $P(X = 3) = 0{,}05$.

1. Vérifie qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.

2. Calcule $E(X)$ et interprète.

Exercice 2 – Le triangle de Pascal

On construit le triangle de Pascal, dont chaque terme est la somme des deux termes situés au-dessus de lui.

1. Écris les lignes $n = 0$ à $n = 5$.

2. Donne $\binom{5}{2}$, $\binom{5}{3}$ et $\binom{4}{2}$.

Exercice 3 – Reconnaître une loi binomiale

Quatre situations sont proposées : ① on prélève 15 pièces AVEC remise dans un lot à 6% de défauts, on compte les défectueuses ; ② on prélève 15 pièces sans remise dans un lot de 30 pièces ; ③ on teste 8 soudures indépendantes tenant chacune avec une probabilité 0,95, on compte celles qui tiennent ; ④ on mesure la longueur de 15 pièces.

1. Lesquelles relèvent d'une loi binomiale ? Précise n et p.

Exercice 4 – Calculer P(X = k)

Soit X suivant la loi binomiale $B(5\,;0{,}2)$.

1. Rappelle la formule de $P(X = k)$.

2. Calcule $P(X = 0)$, $P(X = 1)$ et $P(X = 2)$, arrondis à 10^{-4}.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Espérance d'une loi binomiale

Une production comporte 3% de pièces non conformes. On prélève 50 pièces (avec remise, ou dans un lot très grand). On note X le nombre de pièces non conformes.

1. Donne la loi suivie par X.

2. Calcule $E(X)$ et interprète.

Exercice 6 – Propriétés des coefficients binomiaux

On s'intéresse aux coefficients $\binom{n}{k}$.

1. Calcule $\binom{6}{0}$, $\binom{6}{1}$, $\binom{6}{2}$ et $\binom{6}{3}$.

2. Justifie que $\binom{6}{4} = \binom{6}{2}$.

3. Quelle est la somme de tous les coefficients de la ligne $n = 6$?

Exercice 7 – Au moins un défaut

Une machine produit 5% de pièces défectueuses. On prélève 10 pièces. On note X le nombre de pièces défectueuses, qui suit $B(10\,;0{,}05)$.

1. Calcule $P(X = 0)$.

2. Calcule la probabilité qu'au moins une pièce soit défectueuse.

3. Calcule $P(X \leq 1)$.

Exercice 8 – Loi complète et valeur la plus probable

Soit X suivant $B(12\,;0{,}15)$, comptant les pièces à retoucher dans un échantillon de 12.

1. Calcule $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, $P(X = 2)$ et $P(X = 3)$ à 10^{-4} près.

2. Quelle est la valeur la plus probable ? Compare avec $E(X)$.

Exercice 9 – Probabilités cumulées

Soit X suivant $B(20\,;0{,}08)$, comptant les pièces hors tolérance dans un prélèvement de 20.

1. Calcule $P(X = 0)$, $P(X = 1)$ et $P(X = 2)$ à 10^{-4} près.

2. Calcule $P(X \leq 2)$ puis $P(X \geq 3)$.

3. Calcule $E(X)$.

Exercice 10 – Fiabilité d'un système redondant

Un dispositif comporte 5 modules identiques et indépendants, chacun fonctionnant avec une probabilité 0,9. On note X le nombre de modules en fonctionnement.

1. Donne la loi de X.

2. Le dispositif fonctionne s'il reste au moins 4 modules actifs. Calcule sa fiabilité.

3. Compare avec l'exigence « les 5 modules actifs ».

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 11 – Combien d'essais pour être sûr ?

Un défaut affecte 10% des pièces d'un lot très grand. On veut détecter au moins une pièce défectueuse avec une probabilité d'au moins 0,95.

1. Exprime la probabilité de détecter au moins un défaut sur n prélèvements.

2. Détermine le nombre minimal de pièces à prélever.

Exercice 12 – Plan de contrôle d'un lot

Un fournisseur livre des lots très grands. Le plan de contrôle prévoit de prélever 20 pièces et de refuser le lot dès qu'on trouve au moins 3 pièces défectueuses.

1. Si le lot contient 8% de pièces défectueuses, quelle est la probabilité de le refuser ?

2. Si le lot contient 2% de pièces défectueuses, quelle est la probabilité de le refuser à tort ?

3. Ce plan est-il satisfaisant ?

Exercice 13 – Espérance et prévision de rebuts

Une ligne produit 4 000 pièces par jour, avec 2,5% de rebuts. Chaque rebut coûte 18 €.

1. Quelle loi suit le nombre X de rebuts quotidiens ?

2. Calcule $E(X)$ et le coût quotidien moyen des rebuts.

3. Un plan d'action ramène le taux à 1,6%. Quelle économie annuelle (sur 220 jours) peut-on espérer ?

Exercice 14 – Deux tailles d'échantillon

Un procédé produit 5% de pièces non conformes. On compare deux prélèvements : $n = 10$ et $n = 40$ pièces.

1. Calcule $E(X)$ dans chaque cas.

2. Calcule $P(X = 0)$ dans chaque cas.

3. Que peut-on dire de la fréquence observée de non-conformes selon la taille ?

Exercice 15 – Redondance deux parmi quatre

Un système comporte 4 pompes identiques et indépendantes, chacune disponible avec une probabilité 0,85. Le débit requis est assuré dès que 2 pompes au moins fonctionnent.

1. Donne la loi du nombre X de pompes disponibles et calcule $E(X)$.

2. Calcule $P(X = 0)$ et $P(X = 1)$.

3. Calcule la fiabilité du système.

4. Que deviendrait-elle avec l'exigence « 3 pompes au moins » ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 16 – Type bac : contrôle à la réception

Un atelier reçoit des vérins par lots très grands contenant 6% de pièces non conformes. On prélève 8 vérins. On note X le nombre de vérins non conformes.

1. Justifie que X suit une loi binomiale et donne ses paramètres.

2. Calcule $P(X = 0)$ et $P(X = 1)$ à 10^{-4} près.

3. Calcule la probabilité qu'au moins deux vérins soient non conformes.

4. Calcule $E(X)$ et interprète.

Exercice 17 – Type bac : coût d'un lot avec garantie

Un fabricant vend des lots de 10 capteurs. Chaque capteur est défectueux avec une probabilité 0,04, indépendamment des autres. Il remplace gratuitement chaque capteur défectueux, ce qui lui coûte 35 €. Le lot est vendu 600 €, pour un coût de production de 420 €.

1. Donne la loi du nombre X de capteurs défectueux d'un lot et calcule $E(X)$.

2. Calcule le coût moyen des remplacements par lot.

3. Calcule le bénéfice moyen par lot.

4. Calcule la probabilité qu'un lot ne nécessite aucun remplacement.

Exercice 18 – Type bac : vote majoritaire sur trois capteurs

Un système de sécurité utilise trois capteurs identiques et indépendants. Chacun donne la bonne information avec une probabilité p. Le système retient la valeur majoritaire (au moins 2 capteurs d'accord).

1. Exprime la probabilité que le système donne la bonne information, en fonction de p.

2. Calcule cette probabilité pour $p = 0{,}9$ puis $p = 0{,}95$.

3. Le système triple est-il toujours meilleur qu'un capteur seul ?

Exercice 19 – Type bac : échantillon et décision

Un fournisseur affirme que ses pièces sont conformes à 97%. Un atelier prélève 30 pièces et en trouve 3 non conformes. On note X le nombre de pièces non conformes, en supposant l'affirmation vraie.

1. Quelle loi suit X ? Calcule $E(X)$.

2. Calcule $P(X \geq 3)$ sachant que $P(X = 0) \approx 0{,}401\,0$, $P(X = 1) \approx 0{,}372\,1$ et $P(X = 2) \approx 0{,}166\,7$.

3. Le résultat observé remet-il en cause l'affirmation du fournisseur ?

Exercice 20 – Type bac : loi binomiale et algorithme

On étudie X suivant $B(n\,;0{,}1)$. On veut connaître la plus petite valeur de n telle que $P(X \geq 1) \geq 0{,}99$.

1. Exprime $P(X \geq 1)$ en fonction de n.

2. Résous l'inéquation avec le logarithme décimal.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

3. Écris un programme Python qui renvoie ce n minimal pour un seuil s donné.

4. Applique-le mentalement pour $s = 0{,}99$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Loi et espérance d'une variable aléatoire

Une loi de probabilité doit avoir des valeurs positives dont la somme vaut 1.

$0{,}4 + 0{,}35 + 0{,}2 + 0{,}05 = 1$ ✔ C'est bien une loi de probabilité.

Espérance : $E(X) = 0 \times 0{,}4 + 1 \times 0{,}35 + 2 \times 0{,}2 + 3 \times 0{,}05$.

$E(X) = 0 + 0{,}35 + 0{,}40 + 0{,}15 = 0{,}9$.

Interprétation : sur un grand nombre de semaines, on compte en moyenne 0,9 intervention par semaine, soit environ 47 interventions par an ($0{,}9 \times 52$).

Attention : 0,9 n'est pas une valeur possible de X — c'est une moyenne à long terme, pas un résultat observable.

Réponse. Somme des probabilités = 1 ✔ · $E(X) = 0{,}9$ intervention par semaine (environ 47 par an).

Rappel de cours. $E(X) = \sum x_i P(X = x_i)$: moyenne des valeurs PONDÉRÉE par leurs probabilités.

Erreur fréquente. Calculer la moyenne des valeurs $\frac{0+1+2+3}{4} = 1{,}5$: il faut pondérer par les probabilités, qui ne sont pas égales.

Correction de l'exercice 2 – Le triangle de Pascal

Ligne $n = 0$: 1.

Ligne $n = 1$: 1 1.

Ligne $n = 2$: 1 2 1 (car $1 + 1 = 2$).

Ligne $n = 3$: 1 3 3 1.

Ligne $n = 4$: 1 4 6 4 1 (car $1 + 3 = 4$ et $3 + 3 = 6$).

Ligne $n = 5$: 1 5 10 10 5 1.

Lecture : $\binom{5}{2} = 10$ (troisième terme de la ligne 5, en comptant à partir de $k = 0$), $\binom{5}{3} = 10$ et $\binom{4}{2} = 6$.

On retrouve les nombres de chemins dénombrés en première : la ligne $n = 4$ donne bien 1 -4-6-4-1 ✔.

Réponse. Lignes 1 / 1 1 / 1 2 1 / 1 3 3 1 / 1 4 6 4 1 / 1 5 10 10 5 1 · $\binom{5}{2} = \binom{5}{3} = 10$ et $\binom{4}{2} = 6$.

Rappel de cours. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$: chaque terme est la somme des deux au-dessus. Et la ligne n commence à $k = 0$.

Erreur fréquente. Compter les colonnes à partir de 1 : le premier terme de chaque ligne est $\binom{n}{0} = 1$, pas $\binom{n}{1}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 3 – Reconnaître une loi binomiale

Trois conditions : épreuves à DEUX issues, IDENTIQUES, et INDÉPENDANTES ; la variable compte le nombre de succès.

① Avec remise, la composition du lot ne change pas : les 15 prélèvements sont identiques et indépendants. Loi binomiale $B(15\,;0{,}06)$ ✔

② Sans remise dans un lot de 30, les prélèvements ne sont NI identiques NI indépendants (la composition change à chaque tirage). Ce n’est pas une loi binomiale ✘

③ Huit épreuves à deux issues, indépendantes, même probabilité : loi binomiale $B(8\,;0{,}95)$ ✔

④ Une longueur prend une infinité de valeurs : ce n’est pas une épreuve de Bernoulli, donc pas de loi binomiale ✘ (elle le deviendrait en comptant les pièces hors tolérance).

Cas limite utile : un prélèvement sans remise dans un lot TRÈS GRAND devant l’échantillon s’assimile à un tirage avec remise. On applique alors la loi binomiale par approximation.

Réponse. ① $B(15\,;0{,}06)$ · ② non (sans remise, petit lot) · ③ $B(8\,;0{,}95)$ · ④ non (pas deux issues).

Rappel de cours. Loi binomiale : n épreuves identiques et indépendantes à deux issues, X comptant les succès. n et p sont les paramètres.

Erreur fréquente. Appliquer la loi binomiale à un tirage sans remise dans un petit lot : les probabilités changent à chaque tirage.

Correction de l’exercice 4 – Calculer P(X = k)

Formule : $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

$P(X=0)=\binom{5}{0}\times 0{,}2^0\times 0{,}8^5=1\times 1\times 0{,}327\,68\approx 0{,}327\,7.$

$P(X=1)=\binom{5}{1}\times 0{,}2\times 0{,}8^4=5\times 0{,}2\times 0{,}409\,6=0{,}409\,6.$

$P(X=2)=\binom{5}{2}\times 0{,}2^2\times 0{,}8^3=10\times 0{,}04\times 0{,}512=0{,}204\,8.$

Contrôle de vraisemblance : la valeur la plus probable est 1, ce qui est cohérent avec $E(X)=5\times 0{,}2=1$.

Pour information, la loi complète est 0,327 7 ; 0,409 6 ; 0,204 8 ; 0,051 2 ; 0,006 4 ; 0,000 32, de somme 1 ✔.

Réponse. $P(X=k)=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$ · $P(X{=}0)\approx 0{,}327\,7$ · $P(X{=}1)\approx 0{,}409\,6$ · $P(X{=}2)\approx 0{,}204\,8$.

Rappel de cours. Trois facteurs : le NOMBRE de chemins $\binom{n}{k}$, les k succès p^k, les $n-k$ échecs $(1-p)^{n-k}$.

Erreur fréquente. Oublier le coefficient binomial : sans le 10, $P(X=2)$ tomberait à 0,0205, soit dix fois trop peu.

Correction de l’exercice 5 – Espérance d’une loi binomiale

Les 50 prélèvements sont identiques, indépendants, à deux issues : X suit la loi binomiale $B(50\,;0{,}03)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Espérance d'une loi binomiale : $E(X) = n\,p$.

$E(X) = 50 \times 0{,}03 = 1{,}5$.

Interprétation : sur un grand nombre d'échantillons de 50 pièces, on trouve en moyenne 1,5 pièce non conforme par échantillon.

Concrètement, cela signifie qu'un échantillon contient le plus souvent 1 ou 2 pièces non conformes — jamais 1,5, qui est une moyenne.

Contrôle de cohérence : 1,5 pièce sur 50, cela fait bien 3% ✔ L'espérance retrouve toujours la proportion de départ.

Réponse. X suit $B(50\,;0{,}03)$ · $E(X) = 50 \times 0{,}03 = 1{,}5$ pièce non conforme en moyenne.

Rappel de cours. Pour une loi binomiale, $E(X) = np$ — inutile de passer par la loi complète.

Erreur fréquente. Calculer l'espérance par la somme $\sum k\,P(X = k)$: c'est juste, mais 51 termes à calculer là où np suffit.

Correction de l'exercice 6 – Propriétés des coefficients binomiaux

Ligne $n = 6$ du triangle de Pascal, construite depuis la ligne 5 (1 5 10 10 5 1) :
1 6 15 20 15 6 1.

Donc $\binom{6}{0} = 1$, $\binom{6}{1} = 6$, $\binom{6}{2} = 15$ et $\binom{6}{3} = 20$.

Symétrie : $\binom{6}{4} = 15 = \binom{6}{2}$ ✔.

Justification : choisir 4 éléments parmi 6, c'est exactement choisir les 2 qu'on laisse de côté. D'où $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

Somme de la ligne : $1 + 6 + 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 64$.

Or $64 = 2^6$: la somme des coefficients de la ligne n vaut toujours 2^n.

Interprétation : c'est le nombre total de chemins de l'arbre à 6 répétitions, chaque chemin étant compté une fois selon son nombre de succès.

Réponse. Ligne 6 : $1\,;6\,;15\,;20\,;15\,;6\,;1$ · $\binom{6}{4} = \binom{6}{2} = 15$ par symétrie · somme $= 64 = 2^6$.

Rappel de cours. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (symétrie) et $\sum_k \binom{n}{k} = 2^n$ (nombre total de chemins).

Erreur fréquente. Croire que $\binom{6}{3}$ est le plus grand par hasard : le maximum est toujours au MILIEU de la ligne.

Correction de l'exercice 7 – Au moins un défaut

$P(X = 0) = \binom{10}{0} \times 0{,}05^0 \times 0{,}95^{10} = 0{,}95^{10}$.

$0{,}95^{10} \approx 0{,}598\,7$.

Au moins une défectueuse : c'est l'évènement contraire de « aucune ».

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) \approx 1 - 0{,}598\,7 = 0{,}401\,3$.

$P(X = 1) = \binom{10}{1} \times 0{,}05 \times 0{,}95^9 = 10 \times 0{,}05 \times 0{,}630\,25 \approx 0{,}315\,1$.

$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) \approx 0{,}598\,7 + 0{,}315\,1 = 0{,}913\,8$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Lecture : dans 91,4% des échantillons de 10 pièces, on trouve au plus une pièce défectueuse. Un échantillon avec deux défauts ou plus est donc plutôt rare (8,6%).

Réponse. $P(X{=}0) = 0{,}95^{10} \approx 0{,}599$ · $P(X \geq 1) \approx 0{,}401$ · $P(X \leq 1) \approx 0{,}914$.

Rappel de cours. $P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$: un seul calcul au lieu de dix.

Erreur fréquente. Calculer $P(X \geq 1)$ en additionnant $P(X = 1)$ à $P(X = 10)$: dix termes, dix risques d'erreur, alors que le contraire suffit.

Correction de l'exercice 8 – Loi complète et valeur la plus probable

$P(X = 0) = 0{,}85^{12} \approx 0{,}142\,2$.

$P(X = 1) = \binom{12}{1} \times 0{,}15 \times 0{,}85^{11} = 12 \times 0{,}15 \times 0{,}167\,3 \approx 0{,}301\,2$.

$P(X = 2) = \binom{12}{2} \times 0{,}15^{2} \times 0{,}85^{10} = 66 \times 0{,}0225 \times 0{,}196\,9 \approx 0{,}292\,4$.

$P(X = 3) = \binom{12}{3} \times 0{,}15^{3} \times 0{,}85^{9} = 220 \times 0{,}003\,375 \times 0{,}231\,6 \approx 0{,}172\,0$.

La valeur la plus probable est 1 (avec 0,301 2), suivie de très près par 2 (0,292 4).

Espérance : $E(X) = 12 \times 0{,}15 = 1{,}8$.

L'espérance 1,8 se situe entre les deux valeurs les plus probables (1 et 2) — ce qui est le cas général : le maximum de la loi est atteint au voisinage de np.

Contrôle : 0,142 2 + 0,301 2 + 0,292 4 + 0,172 0 = 0,907 8, et il reste 9,2% pour les valeurs de 4 à 12 ✔ cohérent avec une loi centrée sur 1,8.

Réponse. $P(X{=}0) \approx 0{,}142\,2$; $P(X{=}1) \approx 0{,}301\,2$; $P(X{=}2) \approx 0{,}292\,4$; $P(X{=}3) \approx 0{,}172\,0$ · valeur la plus probable 1, avec $E(X) = 1{,}8$.

Rappel de cours. Le maximum de la loi binomiale est atteint autour de np : c'est un contrôle immédiat de vraisemblance.

Erreur fréquente. Confondre « valeur la plus probable » (un entier, ici 1) et « espérance » (un décimal, ici 1,8).

Correction de l'exercice 9 – Probabilités cumulées

$P(X = 0) = 0{,}92^{20} \approx 0{,}188\,7$.

$P(X = 1) = 20 \times 0{,}08 \times 0{,}92^{19} \approx 20 \times 0{,}08 \times 0{,}205\,1 \approx 0{,}328\,2$.

$P(X = 2) = \binom{20}{2} \times 0{,}08^{2} \times 0{,}92^{18} = 190 \times 0{,}0064 \times 0{,}222\,9 \approx 0{,}271\,1$.

$P(X \leq 2) \approx 0{,}188\,7 + 0{,}328\,2 + 0{,}271\,1 = 0{,}788\,0$.

$P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) \approx 1 - 0{,}788\,0 = 0{,}212\,0$.

$E(X) = 20 \times 0{,}08 = 1{,}6$ pièce hors tolérance par prélèvement.

Lecture pour le contrôle : si l'on décidait d'arrêter la production dès 3 pièces hors tolérance dans un prélèvement, on l'arrêterait dans 21,2% des cas alors que la production est « normale ». C'est le taux de fausses alertes du plan de contrôle.

Réponse. $P(X{=}0) \approx 0{,}188\,7$; $P(X{=}1) \approx 0{,}328\,2$; $P(X{=}2) \approx 0{,}271\,1$ · $P(X \leq 2) \approx 0{,}788$ et $P(X \geq 3) \approx 0{,}212$ · $E(X) = 1{,}6$.

Rappel de cours. $P(X \geq k) = 1 - P(X \leq k - 1)$: on passe toujours par le cumul le plus court à calculer.

Erreur fréquente. Écrire $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 3)$: on oublierait $P(X = 3)$, qui appartient

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

à l'évènement cherché.

Correction de l'exercice 10 – Fiabilité d'un système redondant

X suit $B(5\,;0{,}9)$.

$P(X=5) = 0{,}9^5 = 0{,}590\,49$.

$P(X=4) = \binom{5}{4} \times 0{,}9^4 \times 0{,}1 = 5 \times 0{,}656\,1 \times 0{,}1 = 0{,}328\,05$.

Fiabilité avec le critère « au moins 4 » : $P(X \geq 4) = 0{,}590\,49 + 0{,}328\,05 = 0{,}918\,54$, soit environ 91,9%.

Avec l'exigence des 5 modules : la fiabilité tombe à 59,0%.

La tolérance d'une seule panne fait donc gagner près de 33 points de fiabilité — c'est tout l'intérêt de la redondance.

Contrôle : $E(X) = 5 \times 0{,}9 = 4{,}5$ modules actifs en moyenne, ce qui rend le critère « au moins 4 » très souvent satisfait ✔.

Réponse. $X \sim B(5\,;0{,}9)$ · $P(X \geq 4) \approx 0{,}919$ · contre $P(X=5) \approx 0{,}590$ si l'on exige les cinq modules.

Rappel de cours. Tolérer une panne, c'est passer de $P(X=n)$ à $P(X \geq n-1)$: le gain de fiabilité est souvent considérable.

Erreur fréquente. Prendre $p = 0{,}1$ (la panne) comme paramètre tout en comptant les modules qui FONCTIONNENT : il faut choisir le succès et s'y tenir.

Correction de l'exercice 11 – Combien d'essais pour être sûr ?

Le nombre de défauts suit $B(n\,;0{,}1)$, et « au moins un » est le contraire de « aucun ».

$P(X \geq 1) = 1 - 0{,}9^n$.

Condition : $1 - 0{,}9^n \geq 0{,}95$, soit $0{,}9^n \leq 0{,}05$.

On applique le logarithme décimal : $n \log 0{,}9 \leq \log 0{,}05$.

$\log 0{,}9 \approx -0{,}045\,757$ et $\log 0{,}05 \approx -1{,}301\,03$. En divisant par $\log 0{,}9$, négatif, l'inégalité s'inverse.

$$n \geq \frac{-1{,}301\,03}{-0{,}045\,757} \approx 28{,}43.$$

Il faut donc prélever au moins 29 pièces.

Contrôle : $0{,}9^{28} \approx 0{,}0523$ (insuffisant) et $0{,}9^{29} \approx 0{,}0471 \leq 0{,}05$ ✔.

Remarque de contrôle qualité : détecter un défaut à 10% exige déjà 29 pièces. Pour un défaut à 1%, il en faudrait 299 : plus le défaut est rare, plus l'échantillon doit être grand.

Réponse. $P(X \geq 1) = 1 - 0{,}9^n$ · condition $0{,}9^n \leq 0{,}05$, soit $n \geq 28{,}43$: il faut prélever 29 pièces.

Rappel de cours. Un seuil sur « au moins un succès » se résout par le contraire, puis par le logarithme (avec inversion du sens de l'inégalité).

Erreur fréquente. Répondre 28 : $0{,}9^{28} \approx 0{,}052 > 0{,}05$, le seuil n'est pas atteint. Un nombre d'essais s'arrondit vers le HAUT.

Correction de l'exercice 12 – Plan de contrôle d'un lot

Avec $p = 0{,}08$: $X \sim B(20\,;0{,}08)$ et l'on a calculé $P(X \leq 2) \approx 0{,}788$.

Probabilité de refus : $P(X \geq 3) \approx 0{,}212$, soit 21,2%.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Avec $p = 0{,}02$: $P(X = 0) = 0{,}98^{20} \approx 0{,}667\,6$; $P(X = 1) = 20 \times 0{,}02 \times 0{,}98^{19} \approx 0{,}272\,5$; $P(X = 2) = 190 \times 0{,}0004 \times 0{,}98^{18} \approx 0{,}052\,8$.

$P(X \leq 2) \approx 0{,}992\,9$, donc $P(X \geq 3) \approx 0{,}007\,1$, soit 0,71% de refus injustifiés.

Analyse : le plan refuse à tort moins de 1% des bons lots — c'est excellent pour le fournisseur.

Mais il ne refuse que 21,2% des lots à 8% de défauts : près de quatre lots médiocres sur cinq sont ACCEPTÉS. C'est très insuffisant pour le client.

Conclusion : le plan protège le fournisseur, pas l'acheteur. Pour améliorer la détection, il faudrait augmenter la taille de l'échantillon (par exemple 50 pièces) ou abaisser le critère de refus (dès 2 défauts).

Ordre de grandeur du gain : avec le critère « dès 2 défauts » sur 20 pièces, un lot à 8% serait refusé dans $1 - 0{,}188\,7 - 0{,}328\,2 \approx 48{,}3\%$ des cas.

Réponse. Lot à 8% : refusé dans ≈ 21,2% des cas · lot à 2% : refusé à tort dans ≈ 0,71% des cas · plan trop peu sévère pour le client.

Rappel de cours. Un plan de contrôle se juge sur DEUX risques : refuser un bon lot, et accepter un mauvais lot.

Erreur fréquente. Ne calculer qu'un seul des deux risques : un plan qui ne refuse presque jamais à tort peut être inefficace à détecter les mauvais lots.

Correction de l'exercice 13 – Espérance et prévision de rebuts

Chaque pièce est un rebut avec une probabilité 0,025, indépendamment des autres : X suit $B(4\,000\,;\,0{,}025)$.

$E(X) = 4\,000 \times 0{,}025 = 100$ rebuts par jour.

Coût quotidien moyen : $100 \times 18 = 1\,800$ €.

Avec le nouveau taux : $E(X') = 4\,000 \times 0{,}016 = 64$ rebuts, soit $64 \times 18 = 1\,152$ € par jour.

Économie quotidienne : $1\,800 - 1\,152 = 648$ €.

Économie annuelle : $648 \times 220 = 142\,560$ €.

Remarque de méthode : pour un coût moyen, l'espérance suffit — inutile de calculer la loi complète, ce qui serait d'ailleurs impraticable avec $n = 4\,000$.

Contrôle : la baisse de taux est de 0,9 point, soit 36 rebuts par jour à 18 € — on retrouve bien 648 € ✔.

Réponse. $X \sim B(4\,000\,;\,0{,}025)$ · $E(X) = 100$ rebuts, soit 1 800 € par jour · avec 1,6%, économie de 648 € par jour, soit 142 560 € par an.

Rappel de cours. Coût moyen = $E(X)$ × coût unitaire. L'espérance se calcule par np, quelle que soit la taille de n.

Erreur fréquente. Vouloir calculer $P(X = 100)$: la question ne porte que sur une MOYENNE, l'espérance y répond directement.

Correction de l'exercice 14 – Deux tailles d'échantillon

$n = 10$: $E(X) = 10 \times 0{,}05 = 0{,}5$ pièce non conforme.

$n = 40$: $E(X) = 40 \times 0{,}05 = 2$ pièces non conformes.

$P(X = 0)$ pour $n = 10$: $0{,}95^{10} \approx 0{,}598\,7$, soit près de 60% d'échantillons sans aucun défaut.

$P(X = 0)$ pour $n = 40$: $0{,}95^{40} \approx 0{,}128\,5$, soit seulement 13%.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Sur 10 pièces, la fréquence observée ne peut valoir que 0, 0,1, 0,2… : elle est très « grossière » et s'écarte facilement de 0,05.

Sur 40 pièces, les valeurs possibles sont 0, 0,025, 0,05, 0,075… : la fréquence peut s'approcher beaucoup plus finement de 0,05.

Conclusion : plus l'échantillon est grand, plus la fréquence observée se concentre autour de p. C'est la fluctuation d'échantillonnage, déjà rencontrée en première, ici expliquée par la loi binomiale.

Contre-intuition à noter : un petit échantillon donne PLUS souvent « zéro défaut », ce qui peut faussement rassurer sur la qualité du procédé.

Réponse. $E(X) = 0{,}5$ pour $n = 10$ et 2 pour $n = 40$ · $P(X{=}0) \approx 0{,}599$ contre $\approx 0{,}129$ · la fréquence observée se resserre autour de 0,05 quand n grandit.

Rappel de cours. $E(X) = np$ croît avec n, mais la FRÉQUENCE $\frac{X}{n}$ se concentre autour de p : c'est elle qu'on compare à la proportion annoncée.

Erreur fréquente. Conclure qu'un petit échantillon est rassurant parce qu'il ne contient aucun défaut : avec 10 pièces, cela arrive six fois sur dix même à 5% de défauts.

Correction de l'exercice 15 – Redondance deux parmi quatre

X suit $B(4\,;0{,}85)$, et $E(X) = 4 \times 0{,}85 = 3{,}4$ pompes disponibles en moyenne.

$P(X = 0) = 0{,}15^4 = 0{,}000\,506\,25$.

$P(X = 1) = \binom{4}{1} \times 0{,}85 \times 0{,}15^3 = 4 \times 0{,}85 \times 0{,}003\,375 = 0{,}011\,475$.

Fiabilité (au moins 2) : $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1)$.

$= 1 - 0{,}000\,506 - 0{,}011\,475 = 0{,}988\,019$, soit environ 98,80%.

Avec l'exigence « au moins 3 » : il faut retirer aussi $P(X = 2)$.

$P(X = 2) = \binom{4}{2} \times 0{,}85^2 \times 0{,}15^2 = 6 \times 0{,}7225 \times 0{,}0225 = 0{,}097\,537\,5$.

$P(X \geq 3) = 0{,}988\,019 - 0{,}097\,538 \approx 0{,}890\,481$, soit environ 89,05%.

Comparaison : exiger une pompe de plus fait perdre près de 10 points de fiabilité (98,8% contre 89,0%).

Lecture d'ingénieur : chaque exigence supplémentaire coûte cher en disponibilité. On dimensionne donc le nombre de pompes selon le débit réellement nécessaire, pas « par sécurité ».

Contrôle : $P(X = 3) = 4 \times 0{,}85^3 \times 0{,}15 = 0{,}368\,475$ et $P(X = 4) = 0{,}85^4 \approx 0{,}522\,006$, dont la somme vaut bien $0{,}890\,481$ ✔.

Réponse. $X \sim B(4\,;0{,}85)$ et $E(X) = 3{,}4$ · $P(X{=}0) \approx 0{,}000\,51$ et $P(X{=}1) \approx 0{,}011\,48$ · fiabilité $\approx 98{,}80\%$ · seulement $\approx 89{,}05\%$ avec « au moins 3 ».

Rappel de cours. « Au moins k » se calcule en retirant les cas 0, 1, …, $k - 1$: c'est presque toujours plus court que la somme directe.

Erreur fréquente. Calculer $P(X \geq 2)$ comme $1 - P(X = 2)$: le contraire de « au moins 2 » est « au plus 1 », donc DEUX termes à retirer.

Correction de l'exercice 16 – Type bac : contrôle à la réception

Les lots étant très grands, prélever 8 vérins revient à répéter 8 fois la même épreuve à deux issues (conforme / non conforme), de façon indépendante, avec $p = 0{,}06$.

Donc X suit la loi binomiale $B(8\,;0{,}06)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$P(X = 0) = 0{,}94^8$. Or $0{,}94^8 \approx 0{,}609\,6$, donc $P(X = 0) \approx 0{,}609\,6$.

$P(X = 1) = \binom{8}{1} \times 0{,}06 \times 0{,}94^7 = 8 \times 0{,}06 \times 0{,}648\,5 \approx 0{,}311\,3$.

Au moins deux : $P(X \geq 2) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) \approx 1 - 0{,}609\,6 - 0{,}311\,3 = 0{,}079\,1$.

Soit environ 7,9% des prélèvements.

$E(X) = 8 \times 0{,}06 = 0{,}48$ vérin non conforme par prélèvement.

Interprétation : sur un grand nombre de prélèvements de 8 vérins, on trouve en moyenne un peu moins d'un vérin non conforme. Le cas le plus fréquent est d'ailleurs « aucun » (61%).

Contrôle de cohérence : $E(X) = 0{,}48$ est bien compatible avec une loi où $P(X = 0)$ domine, et où $P(X \geq 2)$ reste faible ✔.

Réponse. $X \sim B(8\,;0{,}06)$ · $P(X{=}0) \approx 0{,}609\,6$ et $P(X{=}1) \approx 0{,}311\,3$ · $P(X \geq 2) \approx 0{,}079$ · $E(X) = 0{,}48$.

Rappel de cours. Justifier la loi binomiale demande TROIS points : deux issues, épreuves identiques et indépendantes. Le « lot très grand » justifie l'indépendance.

Erreur fréquente. Prendre $p = 0{,}94$ tout en comptant les NON conformes : le paramètre p est la probabilité de l'évènement compté.

Correction de l'exercice 17 – Type bac : coût d'un lot avec garantie

X suit $B(10\,;0{,}04)$, et $E(X) = 10 \times 0{,}04 = 0{,}4$ capteur défectueux par lot.

Coût moyen des remplacements : $E(35X) = 35\,E(X) = 35 \times 0{,}4 = 14$ € par lot.

On utilise ici la linéarité de l'espérance : $E(aX) = a\,E(X)$, inutile de passer par la loi complète.

Bénéfice moyen : $600 - 420 - 14 = 166$ € par lot.

Aucun remplacement : $P(X = 0) = 0{,}96^{10}$. Or $0{,}96^{10} \approx 0{,}664\,8$, donc environ 66,5% des lots.

Contrôle de cohérence : si 66,5% des lots ne coûtent rien en garantie, et que le coût moyen est de 14 €, les lots avec remplacement coûtent en moyenne $\dfrac{14}{0{,}335} \approx 41{,}8$ €, soit un peu plus d'un capteur ✔.

Marge de sécurité : le pire cas raisonnable (trois remplacements, de probabilité $P(X = 3) = 120 \times 0{,}04^3 \times 0{,}96^7 \approx 0{,}005\,8$) coûterait 105 €, ce qui laisse encore un bénéfice de 75 € ✔ Le modèle économique tient.

Réponse. $X \sim B(10\,;0{,}04)$ et $E(X) = 0{,}4$ · coût moyen de garantie 14 € · bénéfice moyen 166 € par lot · $P(X{=}0) \approx 0{,}665$.

Rappel de cours. $E(aX + b) = a\,E(X) + b$: un coût proportionnel au nombre de défauts se calcule directement à partir de np.

Erreur fréquente. Calculer le coût de garantie sur les seuls lots concernés : le coût MOYEN de 14 € se répartit sur tous les lots, y compris ceux sans défaut.

Correction de l'exercice 18 – Type bac : vote majoritaire sur trois capteurs

Le nombre X de capteurs corrects suit $B(3\,;p)$. Le système est correct si $X \geq 2$.

$P(X \geq 2) = P(X = 2) + P(X = 3) = 3p^2(1 - p) + p^3$.

Pour $p = 0{,}9$: $3 \times 0{,}81 \times 0{,}1 + 0{,}729 = 0{,}243 + 0{,}729 = 0{,}972$.

Le système triple atteint 97,2% contre 90% pour un capteur seul : la probabilité d'erreur

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

passe de 10% à 2,8%.

Pour $p = 0{,}95$: $3 \times 0{,}9025 \times 0{,}05 + 0{,}857\,375 = 0{,}135\,375 + 0{,}857\,375 = 0{,}992\,75$.

L'erreur passe de 5% à 0,725%, soit une division par près de 7.

Dernière question : testons $p = 0{,}4$ (capteur médiocre).
$P(X \geq 2) = 3 \times 0{,}16 \times 0{,}6 + 0{,}064 = 0{,}288 + 0{,}064 = 0{,}352$.

$0{,}352 < 0{,}4$: le système triple est PIRE que le capteur seul !

Explication : le vote majoritaire amplifie la tendance dominante. Si un capteur se trompe plus souvent qu'il n'a raison ($p < 0{,}5$), la majorité se trompe encore plus souvent.

Conclusion : la redondance par vote majoritaire n'améliore la fiabilité que si chaque capteur est déjà meilleur que le hasard ($p > 0{,}5$). Et à $p = 0{,}5$ exactement, les deux valent 0,5.

Réponse. $P(X \geq 2) = 3p^2(1-p) + p^3 \cdot 0{,}972$ pour $p = 0{,}9$ et $0{,}992\,75$ pour $p = 0{,}95$ · mais pour $p = 0{,}4$, le vote donne $0{,}352 < 0{,}4$: la redondance n'aide que si $p > 0{,}5$.

Rappel de cours. Vote majoritaire sur 3 : $P = 3p^2(1-p) + p^3$. Il améliore la fiabilité si et seulement si $p > 0{,}5$.

Erreur fréquente. Croire que tripler un composant améliore toujours la fiabilité : avec des capteurs peu fiables, le vote majoritaire dégrade le résultat.

Correction de l'exercice 19 – Type bac : échantillon et décision

Sous l'hypothèse du fournisseur, chaque pièce est non conforme avec une probabilité 0,03 : X suit $B(30\,;\,0{,}03)$.

$E(X) = 30 \times 0{,}03 = 0{,}9$ pièce non conforme attendue.

$P(X \geq 3) = 1 - P(X = 0) - P(X = 1) - P(X = 2)$.

$P(X \geq 3) \approx 1 - 0{,}401\,0 - 0{,}372\,1 - 0{,}166\,7 = 0{,}060\,2$.

Soit environ 6% : observer 3 pièces non conformes ou plus sur 30 arrive donc dans 6% des prélèvements, même si le fournisseur dit vrai.

Interprétation : le résultat est un peu défavorable (on attendait 0,9 non conforme, on en trouve 3), mais il n'est pas EXCEPTIONNEL. Un évènement à 6% se produit environ une fois sur seize.

Conclusion à formuler : ce prélèvement ne suffit pas à remettre en cause l'affirmation du fournisseur. Il justifie en revanche un second prélèvement, plus grand, pour trancher.

Repère usuel : on considère qu'un résultat est incompatible avec l'hypothèse quand sa probabilité descend sous 5%. Ici, 6,0% est juste au-dessus de ce seuil — d'où la prudence de la conclusion.

Contrôle : si l'on avait trouvé 4 non conformes, la probabilité $P(X \geq 4)$ tomberait à environ 1,2%, et l'on rejetterait alors l'affirmation.

Réponse. $X \sim B(30\,;\,0{,}03)$ et $E(X) = 0{,}9$ · $P(X \geq 3) \approx 0{,}060$ · le résultat est défavorable mais pas décisif : il ne permet pas de rejeter l'affirmation, il appelle un contrôle plus large.

Rappel de cours. Pour juger une affirmation, on calcule la probabilité d'observer un résultat AU MOINS aussi défavorable sous l'hypothèse. Une probabilité faible (< 5%) la rend douteuse.

Erreur fréquente. Conclure « 3 sur 30 fait 10%, donc le fournisseur mentait » : sur un petit échantillon, une fréquence de 10% est compatible avec une proportion réelle de 3%.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 20 – Type bac : loi binomiale et algorithme

$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0{,}9^{\,n}$.

Condition : $1 - 0{,}9^{\,n} \geq 0{,}99$, soit $0{,}9^{\,n} \leq 0{,}01$.

Logarithme : $n \log 0{,}9 \leq \log 0{,}01 = -2$, et en divisant par $\log 0{,}9 \approx -0{,}045\,757$ (négatif, donc inversion) :

$$n \geq \frac{-2}{-0{,}045\,757} \approx 43{,}71.$$

La plus petite valeur entière est donc $n = 44$.

Programme, par accumulation du produit :

```
def taille(s):
    q = 1
    n = 0
while 1 - q < s:
    q = 0.9 * q
    n = n + 1
    return n
```

La variable `q` contient $0{,}9^{\,n}$ à chaque tour : on évite ainsi de recalculer une puissance entière.

Pour $s = 0{,}99$, la boucle s’arrête dès que $0{,}9^{\,n} \leq 0{,}01$, donc elle renvoie 44 ✔ conforme au calcul par logarithme.

Contrôle : $0{,}9^{43} \approx 0{,}010\,8$ (insuffisant) et $0{,}9^{44} \approx 0{,}009\,5 \leq 0{,}01$ ✔.

Lecture pratique : pour être quasi certain (99%) de détecter un défaut présent à 10%, il faut contrôler 44 pièces. La certitude coûte cher en contrôle.

Réponse. $P(X \geq 1) = 1 - 0{,}9^{\,n} \cdot n \geq \dfrac{\log 0{,}01}{\log 0{,}9} \approx 43{,}71$, donc $n = 44$ · boucle `while 1 - q < s` avec `q = 0.9*q`.

Rappel de cours. Dans un programme de seuil, on met à jour la puissance par MULTIPLICATION successive plutôt que de la recalculer.

Erreur fréquente. Écrire `while 1 - q <= s` ou inverser la condition : le programme renverrait 43 ou tournerait indéfiniment. La condition de boucle doit traduire exactement « le seuil n’est pas encore atteint ».

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).