Variables aléatoires et loi binomiale — Terminale STI2D

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés

Présentation

Prélever 20 pièces et compter les défectueuses, tester 50 soudures, interroger 100 capteurs : chaque fois qu'on répète n fois la même épreuve à deux issues, de façon indépendante, le nombre de succès suit une LOI BINOMIALE $B(n\,;p)$. En première, on comptait les chemins de l'arbre à la main ; la terminale fournit l'outil général, les COEFFICIENTS BINOMIAUX $\binom{n}{k}$, lisibles sur le triangle de Pascal. À partir de là, tout se calcule : la probabilité d'obtenir exactement k défauts, celle d'en avoir au moins un, et le nombre moyen attendu, $E(X) = np$. Ces 20 exercices corrigés vont du triangle de Pascal aux plans de contrôle type bac. La difficulté est croissante : l'énoncé puis la correction détaillée s'affichent d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables : mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-sti2d/loi-binomiale

Exercice 1 – Loi et espérance d'une variable aléatoire

Le nombre X d'interventions par semaine sur une ligne suit la loi : $P(X = 0) = 0{,}4$; $P(X = 1) = 0{,}35$; $P(X = 2) = 0{,}2$; $P(X = 3) = 0{,}05$.

1. Vérifie qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.

2. Calcule $E(X)$ et interprète.

Exercice 2 – Le triangle de Pascal

On construit le triangle de Pascal, dont chaque terme est la somme des deux termes situés au-dessus de lui.

1. Écris les lignes $n = 0$ à $n = 5$.

2. Donne $\binom{5}{2}$, $\binom{5}{3}$ et $\binom{4}{2}$.

Exercice 3 – Reconnaître une loi binomiale

Quatre situations sont proposées : ① on prélève 15 pièces AVEC remise dans un lot à 6% de défauts, on compte les défectueuses ; ② on prélève 15 pièces sans remise dans un lot de 30 pièces ; ③ on teste 8 soudures indépendantes tenant chacune avec une probabilité 0,95, on compte celles qui tiennent ; ④ on mesure la longueur de 15 pièces.

1. Lesquelles relèvent d'une loi binomiale ? Précise n et p.

Exercice 4 – Calculer P(X = k)

Soit X suivant la loi binomiale $B(5\,;0{,}2)$.

1. Rappelle la formule de $P(X = k)$.

2. Calcule $P(X = 0)$, $P(X = 1)$ et $P(X = 2)$, arrondis à 10^{-4}.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Espérance d'une loi binomiale

Une production comporte 3% de pièces non conformes. On prélève 50 pièces (avec remise, ou dans un lot très grand). On note X le nombre de pièces non conformes.

1. Donne la loi suivie par X.

2. Calcule $E(X)$ et interprète.

Exercice 6 – Propriétés des coefficients binomiaux

On s'intéresse aux coefficients $\binom{n}{k}$.

1. Calcule $\binom{6}{0}$, $\binom{6}{1}$, $\binom{6}{2}$ et $\binom{6}{3}$.

2. Justifie que $\binom{6}{4} = \binom{6}{2}$.

3. Quelle est la somme de tous les coefficients de la ligne $n = 6$?

Exercice 7 – Au moins un défaut

Une machine produit 5% de pièces défectueuses. On prélève 10 pièces. On note X le nombre de pièces défectueuses, qui suit $B(10\,;0{,}05)$.

1. Calcule $P(X = 0)$.

2. Calcule la probabilité qu'au moins une pièce soit défectueuse.

3. Calcule $P(X \leq 1)$.

Exercice 8 – Loi complète et valeur la plus probable

Soit X suivant $B(12\,;0{,}15)$, comptant les pièces à retoucher dans un échantillon de 12.

1. Calcule $P(X = 0)$, $P(X = 1)$, $P(X = 2)$ et $P(X = 3)$ à 10^{-4} près.

2. Quelle est la valeur la plus probable ? Compare avec $E(X)$.

Exercice 9 – Probabilités cumulées

Soit X suivant $B(20\,;0{,}08)$, comptant les pièces hors tolérance dans un prélèvement de 20.

1. Calcule $P(X = 0)$, $P(X = 1)$ et $P(X = 2)$ à 10^{-4} près.

2. Calcule $P(X \leq 2)$ puis $P(X \geq 3)$.

3. Calcule $E(X)$.

Exercice 10 – Fiabilité d'un système redondant

Un dispositif comporte 5 modules identiques et indépendants, chacun fonctionnant avec une probabilité 0,9. On note X le nombre de modules en fonctionnement.

1. Donne la loi de X.

2. Le dispositif fonctionne s'il reste au moins 4 modules actifs. Calcule sa fiabilité.

3. Compare avec l'exigence « les 5 modules actifs ».

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 11 – Combien d'essais pour être sûr ?

Un défaut affecte 10% des pièces d'un lot très grand. On veut détecter au moins une pièce défectueuse avec une probabilité d'au moins 0,95.

1. Exprime la probabilité de détecter au moins un défaut sur n prélèvements.

2. Détermine le nombre minimal de pièces à prélever.

Exercice 12 – Plan de contrôle d'un lot

Un fournisseur livre des lots très grands. Le plan de contrôle prévoit de prélever 20 pièces et de refuser le lot dès qu'on trouve au moins 3 pièces défectueuses.

1. Si le lot contient 8% de pièces défectueuses, quelle est la probabilité de le refuser ?

2. Si le lot contient 2% de pièces défectueuses, quelle est la probabilité de le refuser à tort ?

3. Ce plan est-il satisfaisant ?

Exercice 13 – Espérance et prévision de rebuts

Une ligne produit 4 000 pièces par jour, avec 2,5% de rebuts. Chaque rebut coûte 18 €.

1. Quelle loi suit le nombre X de rebuts quotidiens ?

2. Calcule $E(X)$ et le coût quotidien moyen des rebuts.

3. Un plan d'action ramène le taux à 1,6%. Quelle économie annuelle (sur 220 jours) peut-on espérer ?

Exercice 14 – Deux tailles d'échantillon

Un procédé produit 5% de pièces non conformes. On compare deux prélèvements : $n = 10$ et $n = 40$ pièces.

1. Calcule $E(X)$ dans chaque cas.

2. Calcule $P(X = 0)$ dans chaque cas.

3. Que peut-on dire de la fréquence observée de non-conformes selon la taille ?

Exercice 15 – Redondance deux parmi quatre

Un système comporte 4 pompes identiques et indépendantes, chacune disponible avec une probabilité 0,85. Le débit requis est assuré dès que 2 pompes au moins fonctionnent.

1. Donne la loi du nombre X de pompes disponibles et calcule $E(X)$.

2. Calcule $P(X = 0)$ et $P(X = 1)$.

3. Calcule la fiabilité du système.

4. Que deviendrait-elle avec l'exigence « 3 pompes au moins » ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 16 – Type bac : contrôle à la réception

Un atelier reçoit des vérins par lots très grands contenant 6% de pièces non conformes. On prélève 8 vérins. On note X le nombre de vérins non conformes.

1. Justifie que X suit une loi binomiale et donne ses paramètres.

2. Calcule $P(X = 0)$ et $P(X = 1)$ à 10^{-4} près.

3. Calcule la probabilité qu'au moins deux vérins soient non conformes.

4. Calcule $E(X)$ et interprète.

Exercice 17 – Type bac : coût d'un lot avec garantie

Un fabricant vend des lots de 10 capteurs. Chaque capteur est défectueux avec une probabilité 0,04, indépendamment des autres. Il remplace gratuitement chaque capteur défectueux, ce qui lui coûte 35 €. Le lot est vendu 600 €, pour un coût de production de 420 €.

1. Donne la loi du nombre X de capteurs défectueux d'un lot et calcule $E(X)$.

2. Calcule le coût moyen des remplacements par lot.

3. Calcule le bénéfice moyen par lot.

4. Calcule la probabilité qu'un lot ne nécessite aucun remplacement.

Exercice 18 – Type bac : vote majoritaire sur trois capteurs

Un système de sécurité utilise trois capteurs identiques et indépendants. Chacun donne la bonne information avec une probabilité p. Le système retient la valeur majoritaire (au moins 2 capteurs d'accord).

1. Exprime la probabilité que le système donne la bonne information, en fonction de p.

2. Calcule cette probabilité pour $p = 0{,}9$ puis $p = 0{,}95$.

3. Le système triple est-il toujours meilleur qu'un capteur seul ?

Exercice 19 – Type bac : échantillon et décision

Un fournisseur affirme que ses pièces sont conformes à 97%. Un atelier prélève 30 pièces et en trouve 3 non conformes. On note X le nombre de pièces non conformes, en supposant l'affirmation vraie.

1. Quelle loi suit X ? Calcule $E(X)$.

2. Calcule $P(X \geq 3)$ sachant que $P(X = 0) \approx 0{,}401\,0$, $P(X = 1) \approx 0{,}372\,1$ et $P(X = 2) \approx 0{,}166\,7$.

3. Le résultat observé remet-il en cause l'affirmation du fournisseur ?

Exercice 20 – Type bac : loi binomiale et algorithme

On étudie X suivant $B(n\,;0{,}1)$. On veut connaître la plus petite valeur de n telle que $P(X \geq 1) \geq 0{,}99$.

1. Exprime $P(X \geq 1)$ en fonction de n.

2. Résous l'inéquation avec le logarithme décimal.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

3. Écris un programme Python qui renvoie ce n minimal pour un seuil s donné.

4. Applique-le mentalement pour $s = 0{,}99$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).