Nombres complexes : forme exponentielle — Terminale STI2D

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

La forme trigonométrique $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ devient, en terminale, $re^{i\theta}$ — et tout se simplifie. Multiplier deux complexes, c'est multiplier les modules et ADDITIONNER les arguments : avec l'écriture exponentielle, cela se lit directement sur les règles de calcul des exposants. De là découlent les puissances, les formules d'addition et de duplication, la LINÉARISATION de $\cos^2$ (indispensable pour la valeur efficace d'un signal) et l'interprétation géométrique : multiplier par $e^{i\theta}$, c'est faire tourner le plan. Ces 20 exercices corrigés parcourent tout cela, du calcul direct aux problèmes type bac d'impédance, de triphasé et de transformation du plan. La difficulté est croissante : l'énoncé puis la correction détaillée s'affichent d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-sti2d/nombres-complexes-forme-exponentielle

Exercice 1 – De la forme trigonométrique à l'exponentielle

On donne $z_1 = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ et $z_2 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

1. Écris z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

2. Donne le module et un argument de chacun.

Exercice 2 – Valeurs remarquables de e^{iθ}

On s'intéresse aux valeurs de $e^{i\theta}$ pour les angles remarquables.

1. Calcule $e^{i\times 0}$, $e^{i\pi/2}$, $e^{i\pi}$ et $e^{3i\pi/2}$ sous forme algébrique.

2. Que vaut $\left|e^{i\theta}\right|$ pour tout θ ?

Exercice 3 – Produit et quotient

On donne $z_1 = 6e^{i\pi/4}$ et $z_2 = 3e^{i\pi/6}$.

1. Calcule $z_1 z_2$ sous forme exponentielle.

2. Calcule $\frac{z_1}{z_2}$.

Exercice 4 – Conjugué et opposé

Soit $z = 5e^{2i\pi/3}$.

1. Donne $\overline{z}$ sous forme exponentielle.

2. Donne $-z$ sous forme exponentielle.

3. Calcule $z\overline{z}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 5 – Puissances

Soit $z = 2e^{i\pi/6}$.

1. Calcule z^2, z^3 et z^6 sous forme exponentielle.

2. Écris z^6 sous forme algébrique.

Exercice 6 – De l'algébrique à l'exponentielle

Écris sous forme exponentielle $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_3 = -2$.

1. Donne les trois formes exponentielles.

Exercice 7 – De l'exponentielle à l'algébrique

Écris sous forme algébrique $z_1 = 3e^{i\pi/2}$, $z_2 = 4e^{-i\pi/3}$ et $z_3 = \sqrt{2}\,e^{5i\pi/4}$.

1. Donne les trois formes algébriques.

Exercice 8 – Formules d'addition

On part de l'égalité $e^{i(a+b)} = e^{ia} \times e^{ib}$.

1. Développe les deux membres sous forme algébrique.

2. Déduis les formules de $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$.

Exercice 9 – Formules de duplication

On applique les formules d'addition au cas particulier $b = a$.

1. Déduis $\cos 2a$ et $\sin 2a$.

2. Calcule $\cos\dfrac{\pi}{3}$ à partir de $\cos\dfrac{\pi}{6}$ et $\sin\dfrac{\pi}{6}$.

Exercice 10 – Linéarisation

On part de $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$.

1. Exprime $\cos^2 a$ en fonction de $\cos 2a$.

2. Exprime de même $\sin^2 a$.

3. Calcule $\cos^2\dfrac{\pi}{8}$ en valeur exacte.

Exercice 11 – Impédance sous forme exponentielle

Une impédance vaut $Z = 40 + 30j$ ohms (les électriciens notent j l'unité imaginaire).

1. Calcule le module et l'argument de Z.

2. Écris Z sous forme exponentielle.

3. Le courant a une amplitude de 3 A. Donne l'amplitude et le déphasage de la tension.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 12 – Somme de deux signaux

Deux tensions de même pulsation sont représentées par $Z_1 = 20e^{0j}$ et $Z_2 = 20e^{i\pi/2}$ (amplitudes en volts).

1. Écris Z_1 et Z_2 sous forme algébrique.

2. Calcule $Z = Z_1 + Z_2$ et donne sa forme exponentielle.

3. Donne l'amplitude et la phase de la tension résultante.

Exercice 13 – Multiplier, c'est faire tourner

Dans le plan complexe, on considère le point A d'affixe $z_A = 3 + 0i$ et l'on multiplie son affixe par $e^{i\pi/2}$, puis par $2e^{i\pi/2}$.

1. Calcule les deux nouvelles affixes.

2. Interprète géométriquement chaque multiplication.

3. Par quoi multiplier pour faire tourner de $-60°$ sans changer la distance à l'origine ?

Exercice 14 – Puissances et racines de l'unité

On considère $z = e^{2i\pi/3}$.

1. Calcule z^2 et z^3.

2. Calcule $1 + z + z^2$.

3. Interprète géométriquement les points d'affixes 1, z et z^2.

Exercice 15 – Transformation z ↦ az + b

On considère la transformation qui, au point d'affixe z, associe le point d'affixe $z' = 2e^{i\pi/2}z + 1$.

1. Détermine l'image du point d'affixe $z = 1$.

2. Détermine l'image du point d'affixe $z = i$.

3. Décris la transformation en termes géométriques.

Exercice 16 – Type bac : impédance d'un circuit RLC

Un circuit RLC série comporte $R = 60\ \Omega$, une bobine de réactance $L\omega = 100\ \Omega$ et un condensateur de réactance $\dfrac{1}{C\omega} = 20\ \Omega$. L'impédance vaut $Z = R + j\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)$.

1. Calcule Z sous forme algébrique.

2. Calcule son module et son argument.

3. Écris Z sous forme exponentielle.

4. Pour une tension d'amplitude 200 V, donne l'amplitude du courant et le déphasage.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 17 – Type bac : valeur efficace par linéarisation

La puissance instantanée dans une résistance R traversée par $i(t) = I\cos(\omega t)$ vaut $p(t) = R\,i^2(t) = R\,I^2\cos^2(\omega t)$. On note $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ la période.

1. Linéarise $\cos^2(\omega t)$.

2. Calcule la valeur moyenne de p sur une période.

3. Déduis la relation entre I et l'intensité efficace I_{eff}, définie par $P_{\text{moy}} = R\,I_{\text{eff}}^2$.

4. Application : pour $I = 4$ A, calcule I_{eff}.

Exercice 18 – Type bac : système triphasé

Un système triphasé équilibré est représenté par les trois complexes $Z_1 = 230e^{0j}$, $Z_2 = 230e^{-2i\pi/3}$ et $Z_3 = 230e^{-4i\pi/3}$ (tensions efficaces en volts).

1. Donne la forme algébrique des trois tensions.

2. Calcule $Z_1 + Z_2 + Z_3$.

3. Interprète le résultat.

4. Calcule $|Z_1 - Z_2|$ et interprète.

Exercice 19 – Type bac : rotation et géométrie

Dans le plan complexe, A a pour affixe $z_A = 2 + i$ et B pour affixe $z_B = 5 + 2i$. On fait tourner B de 90° autour de A.

1. Calcule l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

2. Calcule l'affixe z_C de l'image C de B par cette rotation.

3. Vérifie que $AC = AB$ et que l'angle est droit.

Exercice 20 – Type bac : déphasage et formules d'addition

Un signal vaut $s(t) = 5\cos(\omega t) + 5\sqrt{3}\sin(\omega t)$. On veut l'écrire sous la forme $A\cos(\omega t - \varphi)$.

1. Développe $A\cos(\omega t - \varphi)$ avec la formule d'addition.

2. Identifie $A\cos\varphi$ et $A\sin\varphi$.

3. Détermine A et φ.

4. Vérifie le résultat en $t = 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – De la forme trigonométrique à l'exponentielle

Par définition, $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$.

Donc $z_1 = 4e^{i\pi/3}$ et $z_2 = 2e^{3i\pi/4}$.

Lecture directe : $|z_1| = 4$ et $\arg z_1 = \dfrac{\pi}{3}$.

$|z_2| = 2$ et $\arg z_2 = \dfrac{3\pi}{4}$.

La forme exponentielle est donc simplement une écriture plus courte de la forme trigonométrique : le module devant, l'argument en exposant de i.

Attention : le module doit être POSITIF. Une écriture $-3e^{i\pi/5}$ n'est pas une forme exponentielle correcte ; on l'écrirait $3e^{i(\pi/5+\pi)}$.

Réponse. $z_1 = 4e^{i\pi/3}$, de module 4 et d'argument $\frac{\pi}{3}$ · $z_2 = 2e^{3i\pi/4}$, de module 2 et d'argument $\frac{3\pi}{4}$.

Rappel de cours. $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$: c'est la définition de l'exponentielle complexe.

Erreur fréquente. Laisser un module négatif : r doit être positif, quitte à ajouter π à l'argument.

Correction de l'exercice 2 – Valeurs remarquables de e^{iθ}

$e^{i\times 0} = \cos 0 + i\sin 0 = 1$.

$e^{i\pi/2} = \cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2} = 0 + i = i$.

$e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1 + 0 = -1$. C'est la célèbre identité $e^{i\pi} = -1$.

$e^{3i\pi/2} = \cos\dfrac{3\pi}{2} + i\sin\dfrac{3\pi}{2} = 0 - i = -i$.

Module : $\left|e^{i\theta}\right| = \sqrt{\cos^2\theta + \sin^2\theta} = \sqrt{1} = 1$ pour tout θ.

Interprétation géométrique essentielle : les points d'affixe $e^{i\theta}$ décrivent exactement le CERCLE de centre O et de rayon 1, le cercle trigonométrique.

Réponse. $e^0 = 1$ · $e^{i\pi/2} = i$ · $e^{i\pi} = -1$ · $e^{3i\pi/2} = -i$ · et $\left|e^{i\theta}\right| = 1$ toujours.

Rappel de cours. $\left|e^{i\theta}\right| = 1$: l'exponentielle complexe de module 1 parcourt le cercle trigonométrique.

Erreur fréquente. Croire que $e^{i\pi}$ est un « grand » nombre par analogie avec $e^{\pi} \approx 23$: l'exposant imaginaire donne toujours un module 1.

Correction de l'exercice 3 – Produit et quotient

Produit : les modules se MULTIPLIENT et les arguments s'AJOUTENT, exactement comme les exposants d'une exponentielle.

$z_1 z_2 = 6 \times 3\, e^{i(\pi/4 + \pi/6)} = 18\, e^{i(3\pi/12 + 2\pi/12)} = 18\, e^{5i\pi/12}$.

Quotient : les modules se divisent et les arguments se RETRANCHENT.

$\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{6}{3} e^{i(\pi/4 - \pi/6)} = 2\, e^{i\pi/12}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Contrôle : $\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} = \frac{3\pi - 2\pi}{12} = \frac{\pi}{12}$ ✔.

Tout l'intérêt de la forme exponentielle est là : les calculs de produits et de quotients deviennent aussi simples que sur des exponentielles réelles.

Réponse. $z_1 z_2 = 18e^{5i\pi/12} \cdot \frac{z_1}{z_2} = 2e^{i\pi/12}$.

Rappel de cours. $r_1 e^{i\theta_1} \times r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2\, e^{i(\theta_1 + \theta_2)}$ · le quotient divise les modules et soustrait les arguments.

Erreur fréquente. Multiplier les arguments : ils s'AJOUTENT, comme des exposants.

Correction de l'exercice 4 – Conjugué et opposé

Conjuguer, c'est changer le signe de l'argument : $\overline{z} = 5e^{-2i\pi/3}$.

Géométriquement, cela correspond à la symétrie par rapport à l'axe des réels.

Opposé : $-1 = e^{i\pi}$, donc $-z = 5e^{i(2\pi/3 + \pi)} = 5e^{5i\pi/3}$.

On peut aussi l'écrire $5e^{-i\pi/3}$, puisque $\frac{5\pi}{3} - 2\pi = -\frac{\pi}{3}$.

Produit : $z\overline{z} = 5 \times 5\, e^{i(2\pi/3 - 2\pi/3)} = 25e^{0} = 25$.

On retrouve la propriété générale $z\overline{z} = |z|^2$ ✔ — un réel positif.

Réponse. $\overline{z} = 5e^{-2i\pi/3} \cdot -z = 5e^{5i\pi/3} = 5e^{-i\pi/3} \cdot z\overline{z} = 25 = |z|^2$.

Rappel de cours. $\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta} \cdot -re^{i\theta} = re^{i(\theta + \pi)} \cdot z\overline{z} = |z|^2$.

Erreur fréquente. Conjuguer en changeant le signe du MODULE : c'est l'argument qui change de signe, le module reste positif.

Correction de l'exercice 5 – Puissances

Règle : $\left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta}$ — le module est élevé à la puissance n, l'argument est multiplié par n.

$z^2 = 4e^{i\pi/3}$.

$z^3 = 8e^{i\pi/2}$.

$z^6 = 64e^{i\pi}$.

Forme algébrique : $e^{i\pi} = -1$, donc $z^6 = -64$.

Vérification partielle : $z^3 = 8e^{i\pi/2} = 8i$, et $(8i)^2 = 64i^2 = -64$ ✔.

C'est la grande économie de la forme exponentielle : calculer z^6 par la forme algébrique demanderait six développements successifs.

Réponse. $z^2 = 4e^{i\pi/3} \cdot z^3 = 8e^{i\pi/2} = 8i \cdot z^6 = 64e^{i\pi} = -64$.

Rappel de cours. $\left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta}$: module à la puissance n, argument multiplié par n.

Erreur fréquente. Multiplier le module par n : z^6 a pour module $2^6 = 64$, et non 12.

Correction de l'exercice 6 – De l'algébrique à l'exponentielle

Pour $z_1 = 1 + i$: $|z_1| = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$.

$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc $\theta = \frac{\pi}{4}$.

$z_1 = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Pour $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$: $|z_2| = \sqrt{1+3} = 2$.

$\cos\theta = \frac{1}{2}$ et $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, donc $\theta = \frac{\pi}{3}$.

$z_2 = 2e^{i\pi/3}$.

Pour $z_3 = -2$: $|z_3| = 2$, et le point est sur l'axe des réels négatifs, donc $\theta = \pi$.

$z_3 = 2e^{i\pi}$.

Méthode en deux temps, toujours la même : d'abord le module, puis l'argument à l'aide des DEUX valeurs $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Réponse. $z_1 = \sqrt{2}\,e^{i\pi/4}$ · $z_2 = 2e^{i\pi/3}$ · $z_3 = 2e^{i\pi}$.

Rappel de cours. $r = |z|$, puis $\cos\theta = \frac{a}{r}$ et $\sin\theta = \frac{b}{r}$: il faut les deux pour lever l'ambiguïté.

Erreur fréquente. Déterminer θ avec le seul cosinus : $\cos\theta = \frac{1}{2}$ admet $\frac{\pi}{3}$ ET $-\frac{\pi}{3}$. Le signe du sinus tranche.

Correction de l'exercice 7 – De l'exponentielle à l'algébrique

$z_1 = 3\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 3(0+i) = 3i$.

$z_2 = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 4\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 - 2i\sqrt{3}$.

z_3 : $\frac{5\pi}{4} = 225°$, donc $\cos\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

$z_3 = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -1 - i$.

Contrôle des modules : $|3i| = 3$ ✔ ; $|2 - 2i\sqrt{3}| = \sqrt{4+12} = 4$ ✔ ; $|-1-i| = \sqrt{2}$ ✔.

Ces contrôles sont indispensables : ils détectent immédiatement une erreur de signe ou de valeur remarquable.

Réponse. $z_1 = 3i$ · $z_2 = 2 - 2i\sqrt{3}$ · $z_3 = -1 - i$.

Rappel de cours. $re^{i\theta} = r\cos\theta + i\,r\sin\theta$: on distribue le module sur les deux termes.

Erreur fréquente. Oublier que cos est paire et sin impaire : $\cos(-\frac{\pi}{3}) = +\frac{1}{2}$ mais $\sin(-\frac{\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Correction de l'exercice 8 – Formules d'addition

Membre de gauche : $e^{i(a+b)} = \cos(a+b) + i\sin(a+b)$.

Membre de droite : $(\cos a + i\sin a)(\cos b + i\sin b)$.

On développe : $\cos a\cos b + i\cos a\sin b + i\sin a\cos b + i^2\sin a\sin b$.

Comme $i^2 = -1$: $= (\cos a\cos b - \sin a\sin b) + i(\cos a\sin b + \sin a\cos b)$.

En identifiant parties réelles et imaginaires des deux membres :

$\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b$.

$\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b$.

Contrôle sur $a = b = \frac{\pi}{4}$: la première formule donne $\cos\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$ ✔.

Cette démonstration est le meilleur argument en faveur de la forme exponentielle : deux formules trigonométriques difficiles à mémoriser se déduisent d'une simple règle sur les

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

exposants.

Réponse. $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$ · $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b$.

Rappel de cours. $e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$: en identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient les formules d'addition.

Erreur fréquente. Oublier le signe moins dans $\cos(a+b)$: il vient de $i^2 = -1$, c'est-à-dire du terme $\sin a \sin b$.

Correction de l'exercice 9 – Formules de duplication

Avec $b = a$ dans $\cos(a+b)$: $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$.

Avec $b = a$ dans $\sin(a+b)$: $\sin 2a = 2\sin a \cos a$.

On peut aussi utiliser $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$ pour écrire $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$.

Application : $\cos\frac{\pi}{3} = \cos\left(2 \times \frac{\pi}{6}\right) = \cos^2\frac{\pi}{6} - \sin^2\frac{\pi}{6}$.

$= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ ✔ conforme à la valeur connue.

Contrôle de la seconde formule : $\sin\frac{\pi}{3} = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ✔.

Réponse. $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1$ · $\sin 2a = 2\sin a \cos a$ · et $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ ✔.

Rappel de cours. $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$ et $\sin 2a = 2\sin a \cos a$: ce sont les formules d'addition avec $b = a$.

Erreur fréquente. Écrire $\cos 2a = 2\cos a$: la duplication d'angle n'est PAS une multiplication de la valeur. $\cos\frac{\pi}{3} = 0{,}5$ alors que $2\cos\frac{\pi}{6} \approx 1{,}73$.

Correction de l'exercice 10 – Linéarisation

De $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$, on tire $2\cos^2 a = 1 + \cos 2a$.

Donc $\cos^2 a = \dfrac{1 + \cos 2a}{2}$.

De même, $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$ donne $\sin^2 a = \dfrac{1 - \cos 2a}{2}$.

Ces deux égalités s'appellent formules de LINÉARISATION : elles remplacent un carré par une expression du premier degré en cosinus.

Application : $\cos^2\frac{\pi}{8} = \dfrac{1 + \cos\frac{\pi}{4}}{2} = \dfrac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \dfrac{2 + \sqrt{2}}{4}$.

Valeur approchée : $\dfrac{2 + 1{,}414}{4} \approx 0{,}853\,6$.

Contrôle : $\cos\frac{\pi}{8} \approx 0{,}923\,9$ et $0{,}923\,9^2 \approx 0{,}853\,6$ ✔.

Utilité : sans cette formule, on ne saurait pas intégrer $\cos^2$ — et donc pas calculer la valeur efficace d'un signal, ce que fait l'exercice type bac plus loin.

Réponse. $\cos^2 a = \dfrac{1 + \cos 2a}{2}$ · $\sin^2 a = \dfrac{1 - \cos 2a}{2}$ · $\cos^2\frac{\pi}{8} = \dfrac{2 + \sqrt{2}}{4} \approx 0{,}854$.

Rappel de cours. Linéarisation : $\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$ et $\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$. Indispensable pour intégrer un carré.

Erreur fréquente. Confondre les deux formules : celle du sinus porte le signe MOINS.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Un contrôle en $a = 0$ tranche ($\sin^2 0 = 0$).

Correction de l'exercice 11 – Impédance sous forme exponentielle

Module : $|Z| = \sqrt{40^2 + 30^2} = \sqrt{1\,600 + 900} = \sqrt{2\,500} = 50\ \Omega$.

Argument : $\cos\varphi = \dfrac{40}{50} = 0{,}8$ et $\sin\varphi = \dfrac{30}{50} = 0{,}6$, tous deux positifs.

$\varphi = \arccos(0{,}8) \approx 0{,}643\,5$ rad, soit environ 36,87°.

Forme exponentielle : $Z \approx 50e^{0{,}6435j}$, ou $50e^{36{,}87°j}$ en degrés.

Amplitude de la tension : $U = |Z| \times I = 50 \times 3 = 150$ V.

Déphasage : l'argument de Z est le déphasage de la tension par rapport au courant, soit +36,87° — la tension est en avance, comportement inductif.

Intérêt de la forme exponentielle : $U = ZI$ se lit d'un coup, le module donnant l'amplitude et l'argument le déphasage. C'est toute la méthode des impédances complexes.

Réponse. $|Z| = 50\ \Omega$ et $\arg Z \approx 36{,}87°$ (soit 0,6435 rad) · $Z \approx 50e^{0{,}6435j}$ · $U = 150$ V avec 36,87° d'avance.

Rappel de cours. $Z = |Z|e^{j\varphi}$: le module donne le rapport des amplitudes, l'argument le déphasage tension/courant.

Erreur fréquente. Additionner $40 + 30 = 70\ \Omega$: résistance et réactance se composent « en quadrature », d'où $\sqrt{40^2 + 30^2} = 50$.

Correction de l'exercice 12 – Somme de deux signaux

$Z_1 = 20e^0 = 20$ (tension de référence, phase nulle).

$Z_2 = 20e^{i\pi/2} = 20i$ (tension déphasée de 90°).

Somme : $Z = 20 + 20i$.

Module : $|Z| = \sqrt{400 + 400} = \sqrt{800} = 20\sqrt{2} \approx 28{,}28$.

Argument : $\cos\theta = \dfrac{20}{20\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, donc $\theta = \dfrac{\pi}{4}$.

Forme exponentielle : $Z = 20\sqrt{2}\,e^{i\pi/4}$.

Résultat physique : la tension résultante a une amplitude de 28,28 V et un déphasage de 45° par rapport à la référence.

Point essentiel : les amplitudes ne s'additionnent PAS (20 + 20 = 40 V serait faux). En quadrature, la somme vaut $20\sqrt{2}$.

Contrôle par la trigonométrie : $20\cos(\omega t) + 20\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = 20\cos(\omega t) + 20\sin(\omega t)$, d'amplitude $\sqrt{20^2 + 20^2} = 20\sqrt{2}$ ✔.

Réponse. $Z_1 = 20$ et $Z_2 = 20i$ · $Z = 20 + 20i = 20\sqrt{2}\,e^{i\pi/4}$ · amplitude $20\sqrt{2} \approx 28{,}28$ V, phase 45°.

Rappel de cours. Pour ADDITIONNER des signaux, on passe par la forme algébrique ; pour MULTIPLIER, par la forme exponentielle.

Erreur fréquente. Additionner les formes exponentielles en ajoutant modules et arguments : cela ne vaut que pour le PRODUIT.

Correction de l'exercice 13 – Multiplier, c'est faire tourner

$3 \times e^{i\pi/2} = 3e^{i\pi/2} = 3i$: le point passe de (3 ; 0) à (0 ; 3).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Interprétation : multiplier par $e^{i\pi/2}$ fait TOURNER le point d'un quart de tour autour de l'origine, sans changer sa distance à O (le module reste 3).

$3 \times 2e^{i\pi/2} = 6e^{i\pi/2} = 6i$: le point tourne d'un quart de tour ET s'éloigne, sa distance à l'origine passant de 3 à 6.

Interprétation : multiplier par $2e^{i\pi/2}$ combine une rotation de 90° et une homothétie de rapport 2. C'est une SIMILITUDE.

Pour tourner de $-60°$ sans changer la distance, il faut multiplier par un complexe de module 1 et d'argument $-\frac{\pi}{3}$, c'est-à-dire par $e^{-i\pi/3}$.

Sous forme algébrique : $e^{-i\pi/3} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Règle générale : multiplier par $re^{i\theta}$ revient à tourner de θ et à multiplier les distances par r.

Réponse. $3i$ puis $6i$ · multiplier par $e^{i\pi/2}$ est une rotation de 90°, par $2e^{i\pi/2}$ une rotation suivie d'une homothétie de rapport 2 · pour $-60°$: multiplier par $e^{-i\pi/3}$.

Rappel de cours. Multiplier par $re^{i\theta}$: ROTATION d'angle θ autour de O et HOMOTHÉTIE de rapport r.

Erreur fréquente. Croire qu'une multiplication par un complexe de module 1 change la distance : elle ne fait que tourner.

Correction de l'exercice 14 – Puissances et racines de l'unité

$z^2 = e^{4i\pi/3}$ et $z^3 = e^{6i\pi/3} = e^{2i\pi} = 1$.

z est donc une RACINE CUBIQUE de l'unité : son cube vaut 1.

Formes algébriques : $z = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$z^2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Somme : $1 + z + z^2 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 0$.

La somme des trois racines cubiques de l'unité est donc NULLE.

Géométriquement : les trois points sont sur le cercle de rayon 1, espacés de $\frac{2\pi}{3}$ (soit 120°) : ils forment un TRIANGLE ÉQUILATÉRAL de centre O.

C'est exactement la configuration d'un système TRIPHASÉ en électricité : trois tensions de même amplitude, déphasées de 120°, dont la somme est nulle.

Réponse. $z^2 = e^{4i\pi/3}$ et $z^3 = 1$ · $1 + z + z^2 = 0$ · les trois points forment un triangle équilatéral sur le cercle unité (configuration du triphasé).

Rappel de cours. $e^{2i\pi} = 1$: les racines n-ièmes de l'unité sont régulièrement réparties sur le cercle unité, et leur somme est nulle.

Erreur fréquente. Calculer $z^3 = e^{2i\pi} \neq 1$: un tour complet ramène exactement au point de départ, donc $e^{2i\pi} = 1$.

Correction de l'exercice 15 – Transformation z ↦ az + b

$2e^{i\pi/2} = 2i$, donc la transformation s'écrit $z' = 2iz + 1$.

Pour $z = 1$: $z' = 2i + 1 = 1 + 2i$.

Pour $z = i$: $z' = 2i \times i + 1 = 2i^2 + 1 = -2 + 1 = -1$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Décomposition : la multiplication par $2i = 2e^{i\pi/2}$ est une rotation de 90° autour de O suivie d'une homothétie de rapport 2.

L'addition de 1 est ensuite une TRANSLATION de vecteur d'affixe 1, c'est-à-dire d'une unité vers la droite.

La transformation complète est donc : rotation de 90°, agrandissement d'un facteur 2, puis translation d'une unité vers la droite.

Contrôle sur les distances : les points 1 et i sont distants de $|i - 1| = \sqrt{2}$. Leurs images $1 + 2i$ et -1 sont distantes de $|(1 + 2i) - (-1)| = |2 + 2i| = 2\sqrt{2}$ ✔ exactement le double, conformément au rapport 2.

Réponse. Image de 1 : $1 + 2i$ · image de i : -1 · la transformation est une rotation de 90° et une homothétie de rapport 2, suivies d'une translation de 1.

Rappel de cours. $z' = az + b$ avec $a = re^{i\theta}$: rotation d'angle θ, homothétie de rapport r, puis translation de b. Les distances sont multipliées par $|a|$.

Erreur fréquente. Traiter $2i \times i$ comme $2i^2 = 2$: $i^2 = -1$, donc le résultat est -2.

Correction de l'exercice 16 – Type bac : impédance d'un circuit RLC

Réactance totale : $100 - 20 = 80\ \Omega$, donc $Z = 60 + 80j$ ohms.

Module : $|Z| = \sqrt{60^2 + 80^2} = \sqrt{3\,600 + 6\,400} = \sqrt{10\,000} = 100\ \Omega$.

Argument : $\cos\varphi = \dfrac{60}{100} = 0{,}6$ et $\sin\varphi = \dfrac{80}{100} = 0{,}8$.

$\varphi = \arccos(0{,}6) \approx 0{,}927\,3$ rad, soit environ 53,13°.

Forme exponentielle : $Z = 100e^{0{,}9273j}$, ou $100e^{53{,}13°j}$.

Amplitude du courant : $I = \dfrac{U}{|Z|} = \dfrac{200}{100} = 2$ A.

Déphasage : l'argument de Z étant positif, la tension est en AVANCE de 53,13° sur le courant. Le circuit est globalement inductif, la bobine l'emportant sur le condensateur.

Remarque : à la résonance, $L\omega = \frac{1}{C\omega}$, la réactance s'annule et $Z = R = 60\ \Omega$. Le courant atteindrait alors $\frac{200}{60} \approx 3{,}33$ A, avec un déphasage nul.

Contrôle : $|Z| = 100\ \Omega$ est supérieur à $R = 60\ \Omega$ ✔ toute réactance non compensée augmente l'impédance.

Réponse. $Z = 60 + 80j$ · $|Z| = 100\ \Omega$ et $\varphi \approx 53{,}13°$ · $Z = 100e^{0{,}9273j}$ · $I = 2$ A, tension en avance de 53,13°.

Rappel de cours. $Z = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$: la réactance est la DIFFÉRENCE des deux, et elle s'annule à la résonance.

Erreur fréquente. Additionner les deux réactances ($100 + 20 = 120$) : celle du condensateur est NÉGATIVE, elle se retranche.

Correction de l'exercice 17 – Type bac : valeur efficace par linéarisation

Linéarisation : $\cos^2(\omega t) = \dfrac{1 + \cos(2\omega t)}{2}$.

Donc $p(t) = \dfrac{RI^2}{2}(1 + \cos(2\omega t))$.

Valeur moyenne sur une période : celle du terme constant est $\dfrac{RI^2}{2}$, et celle de $\cos(2\omega t)$ est NULLE (il effectue exactement deux périodes sur l'intervalle $[0\,;T]$).

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Donc $P_{\text{moy}} = \dfrac{R I^2}{2}$.

Par définition de l'intensité efficace : $R I_{\text{eff}}^2 = \dfrac{R I^2}{2}$, donc $I_{\text{eff}}^2 = \dfrac{I^2}{2}$.

D'où $I_{\text{eff}} = \dfrac{I}{\sqrt{2}} \approx 0{,}707\, I$.

C'est LA relation fondamentale du régime sinusoïdal : la valeur efficace vaut l'amplitude divisée par $\sqrt{2}$.

Application : pour $I = 4$ A, $I_{\text{eff}} = \dfrac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83$ A.

Contrôle de cohérence avec le secteur : 230 V efficaces correspondent à une amplitude de $230\sqrt{2} \approx 325$ V ✔ — la relation réciproque.

Et c'est bien la linéarisation qui a permis ce résultat : sans elle, la valeur moyenne de $\cos^2$ serait incalculable au niveau du programme.

Réponse. $\cos^2(\omega t) = \dfrac{1 + \cos(2\omega t)}{2}$ · $P_{\text{moy}} = \dfrac{RI^2}{2}$ · donc $I_{\text{eff}} = \dfrac{I}{\sqrt{2}}$ · pour $I = 4$ A, $I_{\text{eff}} = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83$ A.

Rappel de cours. $I_{\text{eff}} = \dfrac{I}{\sqrt{2}}$ et $U_{\text{eff}} = \dfrac{U}{\sqrt{2}}$: la valeur moyenne de $\cos^2$ vaut $\frac{1}{2}$, d'où le $\sqrt{2}$.

Erreur fréquente. Croire que la valeur moyenne de $\cos^2$ est nulle : celle de cos l'est, mais un CARRÉ est toujours positif — sa moyenne vaut $\frac{1}{2}$.

Correction de l'exercice 18 – Type bac : système triphasé

$Z_1 = 230$.

$Z_2 = 230\left(\cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)\right) = 230\left(-\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -115 - 115i\sqrt{3}$.

$Z_3 = 230\left(-\dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -115 + 115i\sqrt{3}$ (car $-\frac{4\pi}{3}$ équivaut à $+\frac{2\pi}{3}$).

Somme : partie réelle $230 - 115 - 115 = 0$; partie imaginaire $-115\sqrt{3} + 115\sqrt{3} = 0$.

Donc $Z_1 + Z_2 + Z_3 = 0$.

Interprétation : dans un système triphasé ÉQUILIBRÉ, la somme des trois tensions est nulle à chaque instant. C'est pourquoi le conducteur de neutre ne transporte aucun courant — et peut même être omis sur certaines installations.

Tension entre deux phases : $Z_1 - Z_2 = 230 - (-115 - 115i\sqrt{3}) = 345 + 115i\sqrt{3}$.

Module : $|Z_1 - Z_2| = \sqrt{345^2 + \left(115\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{119\,025 + 39\,675} = \sqrt{158\,700} \approx 398{,}4$ V.

Interprétation : c'est la tension COMPOSÉE, environ 400 V — la valeur bien connue du triphasé industriel ✔.

Contrôle théorique : la tension composée vaut $\sqrt{3}$ fois la tension simple, soit $230\sqrt{3} \approx 398{,}4$ V ✔ exactement la valeur trouvée.

Réponse. $Z_1 = 230$, $Z_2 = -115 - 115i\sqrt{3}$, $Z_3 = -115 + 115i\sqrt{3}$ · somme nulle (neutre sans courant) · $|Z_1 - Z_2| = 230\sqrt{3} \approx 398{,}4$ V, la tension composée du 400 V triphasé.

Rappel de cours. Triphasé équilibré : trois tensions déphasées de $\frac{2\pi}{3}$, de somme nulle, et tension composée $= \sqrt{3} \times$ tension simple.

Erreur fréquente. Additionner les modules ($3 \times 230 = 690$ V) : les trois tensions se

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

compensent exactement, leur somme est NULLE.

Correction de l'exercice 19 – Type bac : rotation et géométrie

$z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A = (5 + 2i) - (2 + i) = 3 + i$.

Une rotation de 90° autour de A se traduit par : $z_C - z_A = e^{i\pi/2}(z_B - z_A) = i(3 + i)$.

$i(3 + i) = 3i + i^2 = -1 + 3i$.

Donc $z_C = z_A + (-1 + 3i) = (2 - 1) + (1 + 3)i = 1 + 4i$.

Vérification des longueurs : $AB = |3 + i| = \sqrt{9 + 1} = \sqrt{10}$.

$AC = |z_C - z_A| = |-1 + 3i| = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$ ✔ Les deux longueurs sont égales, comme l'exige une rotation.

Angle droit : on calcule le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}(3\,;1)$ et $\overrightarrow{AC}(-1\,;3)$.

$3 \times (-1) + 1 \times 3 = -3 + 3 = 0$ ✔ Les vecteurs sont orthogonaux, l'angle est bien droit.

À retenir : multiplier l'affixe d'un vecteur par i fait tourner ce vecteur de 90° dans le sens direct. C'est l'outil le plus rapide pour construire un carré ou un triangle rectangle isocèle.

Réponse. $z_{\overrightarrow{AB}} = 3 + i \cdot z_C = 1 + 4i \cdot AB = AC = \sqrt{10}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ ✔.

Rappel de cours. Rotation de centre A et d'angle θ : $z' - z_A = e^{i\theta}(z - z_A)$. Pour 90°, on multiplie par i.

Erreur fréquente. Multiplier z_B par i directement : cela ferait tourner autour de l'ORIGINE, pas autour de A. Il faut d'abord se ramener au vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Correction de l'exercice 20 – Type bac : déphasage et formules d'addition

Formule d'addition : $\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$.

Donc $A\cos(\omega t - \varphi) = A\cos\varphi\cos(\omega t) + A\sin\varphi\sin(\omega t)$.

Identification avec $s(t)$: $A\cos\varphi = 5$ et $A\sin\varphi = 5\sqrt{3}$.

Pour trouver A, on élève au carré et l'on additionne :
$A^2\cos^2\varphi + A^2\sin^2\varphi = 25 + 75 = 100$.

Comme $\cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$, il reste $A^2 = 100$, donc $A = 10$ (on prend $A > 0$).

Pour φ : $\cos\varphi = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$ et $\sin\varphi = \dfrac{5\sqrt{3}}{10} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, donc $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$.

Conclusion : $s(t) = 10\cos\left(\omega t - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

Vérification en $t = 0$: la forme initiale donne $s(0) = 5\cos 0 + 5\sqrt{3}\sin 0 = 5$.

La forme obtenue donne $10\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right) = 10 \times \dfrac{1}{2} = 5$ ✔.

Interprétation physique : deux signaux en quadrature d'amplitudes 5 et $5\sqrt{3}$ se composent en UN signal d'amplitude 10, déphasé de 60°. C'est exactement le calcul que fait la méthode des complexes, ici mené par la trigonométrie.

Contrôle par les complexes : $5 + 5\sqrt{3}\,i$ a pour module $\sqrt{25 + 75} = 10$ et pour argument $\dfrac{\pi}{3}$ ✔ mêmes résultats, en deux lignes.

Réponse. $A\cos\varphi = 5$ et $A\sin\varphi = 5\sqrt{3}$ · $A = 10$ et $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$ · donc $s(t) = 10\cos\left(\omega t - \dfrac{\pi}{3}\right)$, vérifié en $t = 0$ ($s(0) = 5$).

Rappel de cours. $a\cos(\omega t) + b\sin(\omega t) = A\cos(\omega t - \varphi)$ avec $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $\tan\varphi = \dfrac{b}{a}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Erreur fréquente. Additionner les amplitudes $5 + 5\sqrt{3} \approx 13{,}66$: les deux signaux étant en quadrature, l'amplitude résultante est 10.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).