# Nombres complexes : forme exponentielle — Terminale STI2D

## 20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés

### Présentation

La forme trigonométrique $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ devient, en terminale, $re^{i\theta}$ — et tout se simplifie. Multiplier deux complexes, c'est multiplier les modules et ADDITIONNER les arguments : avec l'écriture exponentielle, cela se lit directement sur les règles de calcul des exposants. De là découlent les puissances, les formules d'addition et de duplication, la LINÉARISATION de $\cos^2$ (indispensable pour la valeur efficace d'un signal) et l'interprétation géométrique : multiplier par $e^{i\theta}$, c'est faire tourner le plan. Ces 20 exercices corrigés parcourent tout cela, du calcul direct aux problèmes type bac d'impédance, de triphasé et de transformation du plan. La difficulté est croissante : l'énoncé puis la correction détaillée s'affichent d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-sti2d/nombres-complexes-forme-exponentielle

### Exercice 1 – De la forme trigonométrique à l'exponentielle

On donne $z_1 = 4\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ et $z_2 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

**1.** Écris $z_1$ et $z_2$ sous forme exponentielle.

**2.** Donne le module et un argument de chacun.

### Exercice 2 – Valeurs remarquables de e^{iθ}

On s'intéresse aux valeurs de $e^{i\theta}$ pour les angles remarquables.

**1.** Calcule $e^{i\times 0}$, $e^{i\pi/2}$, $e^{i\pi}$ et $e^{3i\pi/2}$ sous forme algébrique.

**2.** Que vaut $\left|e^{i\theta}\right|$ pour tout $\theta$ ?

### Exercice 3 – Produit et quotient

On donne $z_1 = 6e^{i\pi/4}$ et $z_2 = 3e^{i\pi/6}$.

**1.** Calcule $z_1 z_2$ sous forme exponentielle.

**2.** Calcule $\frac{z_1}{z_2}$.

### Exercice 4 – Conjugué et opposé

Soit $z = 5e^{2i\pi/3}$.

**1.** Donne $\overline{z}$ sous forme exponentielle.

**2.** Donne $-z$ sous forme exponentielle.

**3.** Calcule $z\overline{z}$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

## Exercice 5 – Puissances

Soit $z = 2e^{i\pi/6}$.

**1.** Calcule $z^2$, $z^3$ et $z^6$ sous forme exponentielle.

**2.** Écris $z^6$ sous forme algébrique.

## Exercice 6 – De l'algébrique à l'exponentielle

Écris sous forme exponentielle $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_3 = -2$.

**1.** Donne les trois formes exponentielles.

## Exercice 7 – De l'exponentielle à l'algébrique

Écris sous forme algébrique $z_1 = 3e^{i\pi/2}$, $z_2 = 4e^{-i\pi/3}$ et $z_3 = \sqrt{2}\,e^{5i\pi/4}$.

**1.** Donne les trois formes algébriques.

## Exercice 8 – Formules d'addition

On part de l'égalité $e^{i(a+b)} = e^{ia} \times e^{ib}$.

**1.** Développe les deux membres sous forme algébrique.

**2.** Déduis les formules de $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$.

## Exercice 9 – Formules de duplication

On applique les formules d'addition au cas particulier $b = a$.

**1.** Déduis $\cos 2a$ et $\sin 2a$.

**2.** Calcule $\cos\dfrac{\pi}{3}$ à partir de $\cos\dfrac{\pi}{6}$ et $\sin\dfrac{\pi}{6}$.

## Exercice 10 – Linéarisation

On part de $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$.

**1.** Exprime $\cos^2 a$ en fonction de $\cos 2a$.

**2.** Exprime de même $\sin^2 a$.

**3.** Calcule $\cos^2\dfrac{\pi}{8}$ en valeur exacte.

## Exercice 11 – Impédance sous forme exponentielle

Une impédance vaut $Z = 40 + 30j$ ohms (les électriciens notent $j$ l'unité imaginaire).

**1.** Calcule le module et l'argument de $Z$.

**2.** Écris $Z$ sous forme exponentielle.

**3.** Le courant a une amplitude de 3 A. Donne l'amplitude et le déphasage de la tension.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

## Exercice 12 – Somme de deux signaux

Deux tensions de même pulsation sont représentées par $Z_1 = 20e^{0j}$ et $Z_2 = 20e^{i\pi/2}$ (amplitudes en volts).

**1.** Écris $Z_1$ et $Z_2$ sous forme algébrique.

**2.** Calcule $Z = Z_1 + Z_2$ et donne sa forme exponentielle.

**3.** Donne l'amplitude et la phase de la tension résultante.

## Exercice 13 – Multiplier, c'est faire tourner

Dans le plan complexe, on considère le point $A$ d'affixe $z_A = 3 + 0i$ et l'on multiplie son affixe par $e^{i\pi/2}$, puis par $2e^{i\pi/2}$.

**1.** Calcule les deux nouvelles affixes.

**2.** Interprète géométriquement chaque multiplication.

**3.** Par quoi multiplier pour faire tourner de $-60°$ sans changer la distance à l'origine ?

## Exercice 14 – Puissances et racines de l'unité

On considère $z = e^{2i\pi/3}$.

**1.** Calcule $z^2$ et $z^3$.

**2.** Calcule $1 + z + z^2$.

**3.** Interprète géométriquement les points d'affixes $1$, $z$ et $z^2$.

## Exercice 15 – Transformation z ↦ az + b

On considère la transformation qui, au point d'affixe $z$, associe le point d'affixe $z' = 2e^{i\pi/2}z + 1$.

**1.** Détermine l'image du point d'affixe $z = 1$.

**2.** Détermine l'image du point d'affixe $z = i$.

**3.** Décris la transformation en termes géométriques.

## Exercice 16 – Type bac : impédance d'un circuit RLC

Un circuit RLC série comporte $R = 60\ \Omega$, une bobine de réactance $L\omega = 100\ \Omega$ et un condensateur de réactance $\dfrac{1}{C\omega} = 20\ \Omega$. L'impédance vaut $Z = R + j\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)$.

**1.** Calcule $Z$ sous forme algébrique.

**2.** Calcule son module et son argument.

**3.** Écris $Z$ sous forme exponentielle.

**4.** Pour une tension d'amplitude 200 V, donne l'amplitude du courant et le déphasage.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

## Exercice 17 – Type bac : valeur efficace par linéarisation

La puissance instantanée dans une résistance $R$ traversée par $i(t) = I\cos(\omega t)$ vaut $p(t) = R\,i^2(t) = R\,I^2\cos^2(\omega t)$. On note $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ la période.

**1.** Linéarise $\cos^2(\omega t)$.

**2.** Calcule la valeur moyenne de $p$ sur une période.

**3.** Déduis la relation entre $I$ et l'intensité efficace $I_{\text{eff}}$, définie par $P_{\text{moy}} = R\,I_{\text{eff}}^2$.

**4.** Application : pour $I = 4$ A, calcule $I_{\text{eff}}$.

## Exercice 18 – Type bac : système triphasé

Un système triphasé équilibré est représenté par les trois complexes $Z_1 = 230e^{0j}$, $Z_2 = 230e^{-2i\pi/3}$ et $Z_3 = 230e^{-4i\pi/3}$ (tensions efficaces en volts).

**1.** Donne la forme algébrique des trois tensions.

**2.** Calcule $Z_1 + Z_2 + Z_3$.

**3.** Interprète le résultat.

**4.** Calcule $|Z_1 - Z_2|$ et interprète.

## Exercice 19 – Type bac : rotation et géométrie

Dans le plan complexe, $A$ a pour affixe $z_A = 2 + i$ et $B$ pour affixe $z_B = 5 + 2i$. On fait tourner $B$ de 90° autour de $A$.

**1.** Calcule l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

**2.** Calcule l'affixe $z_C$ de l'image $C$ de $B$ par cette rotation.

**3.** Vérifie que $AC = AB$ et que l'angle est droit.

## Exercice 20 – Type bac : déphasage et formules d'addition

Un signal vaut $s(t) = 5\cos(\omega t) + 5\sqrt{3}\sin(\omega t)$. On veut l'écrire sous la forme $A\cos(\omega t - \varphi)$.

**1.** Développe $A\cos(\omega t - \varphi)$ avec la formule d'addition.

**2.** Identifie $A\cos\varphi$ et $A\sin\varphi$.

**3.** Détermine $A$ et $\varphi$.

**4.** Vérifie le résultat en $t = 0$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).