Probabilités conditionnelles — Terminale STI2D

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

Un atelier reçoit ses pièces de trois fournisseurs, un diagnostic a trois causes possibles, une pièce passe par trois postes : dès que la situation se décompose en plusieurs cas, il faut une PARTITION de l'univers et la formule des probabilités totales. L'outil est l'arbre pondéré : on multiplie le long d'un chemin, on additionne les chemins qui mènent au même résultat, et l'on divise pour remonter une branche. Ces 20 exercices corrigés traitent les partitions à trois cas, les arbres à trois niveaux, les tirages sans remise et la probabilité inverse — celle qui répond à la vraie question du contrôle qualité : « la pièce est rejetée, quelle chance qu'elle soit réellement défectueuse ? ». La difficulté est croissante : l'énoncé puis la correction détaillée s'affichent d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-sti2d/probabilites-conditionnelles

Exercice 1 – Conditionnelle dans un tableau

Un atelier a contrôlé 500 pièces :

usinage A : 285 conformes et 15 non conformes (soit 300) · usinage B : 180 conformes et 20 non conformes (soit 200)

1. Calcule la probabilité qu'une pièce prise au hasard soit non conforme.

2. Calcule la probabilité qu'elle soit non conforme sachant qu'elle vient de l'usinage B.

Exercice 2 – Compléter un arbre pondéré

Un atelier reçoit 60% de ses pièces du fournisseur F_1 et le reste de F_2. Parmi les pièces de F_1, 3% sont hors cote ; parmi celles de F_2, 8% le sont.

1. Donne les probabilités portées par les quatre branches du second niveau.

2. Calcule la probabilité des quatre chemins et vérifie leur somme.

Exercice 3 – Multiplier le long d'une branche

Dans une production, 25% des pièces passent par un traitement thermique. Parmi celles-ci, 96% sont conformes. Parmi les autres, 88% le sont.

1. Calcule la probabilité qu'une pièce soit traitée thermiquement ET conforme.

2. Calcule la probabilité qu'elle ne soit pas traitée ET non conforme.

Exercice 4 – Formule des probabilités totales

On reprend les deux fournisseurs : $P(F_1) = 0{,}6$, $P_{F_1}(H) = 0{,}03$, $P_{F_2}(H) = 0{,}08$, où H est « hors cote ».

1. Calcule $P(H)$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

2. Sur une livraison de 5 000 pièces, combien de pièces hors cote prévoir ?

Exercice 5 – Reconnaître une partition

Quatre découpages de l'univers sont proposés pour une pièce contrôlée : ① conforme / non conforme ; ② issue de la machine M1 / de M2 / de M3 (chaque pièce est usinée sur une seule machine) ; ③ conforme / à retoucher ; ④ contrôlée le matin / contrôlée l'après-midi / contrôlée par le chef d'équipe.

1. Lesquels forment une partition de l'univers ? Justifie.

Exercice 6 – Partition à trois cas

Un atelier usine ses pièces sur trois machines : M1 en produit 50%, M2 30% et M3 20%. Les taux de rebut sont respectivement 2%, 4% et 7%.

1. Calcule la probabilité qu'une pièce soit un rebut.

2. Quelle machine contribue le plus au nombre total de rebuts ?

Exercice 7 – Remonter l'arbre

On reprend les trois machines : $P(R) = 0{,}036$, avec $P(M_1 \cap R) = 0{,}010$, $P(M_2 \cap R) = 0{,}012$ et $P(M_3 \cap R) = 0{,}014$.

1. Une pièce est un rebut. Calcule la probabilité qu'elle vienne de M3.

2. Calcule les deux autres probabilités inverses et vérifie leur somme.

Exercice 8 – Complément à condition fixée

Un capteur de présence détecte une pièce mal placée avec une probabilité 0,92. Quand la pièce est bien placée, il déclenche à tort avec une probabilité 0,05. La proportion de pièces mal placées est de 4%.

1. Calcule $P_M(\overline{D})$ et $P_{\overline{M}}(\overline{D})$, où M est « mal placée » et D « le capteur déclenche ».

2. Interprète chacune de ces deux probabilités.

Exercice 9 – Tirages sans remise

Un bac contient 10 pièces dont 3 sont défectueuses. On prélève successivement deux pièces SANS remise.

1. Calcule la probabilité que les deux pièces soient défectueuses.

2. Calcule la probabilité qu'aucune ne le soit.

3. Calcule la probabilité qu'exactement une le soit.

Exercice 10 – Du tableau à l'arbre

Sur 800 équipements, 560 sont récents et 240 anciens. Parmi les récents, 28 ont subi une panne cette année ; parmi les anciens, 36.

1. Construis l'arbre correspondant (probabilités du premier et du second niveau).

2. Calcule la probabilité de panne d'un équipement pris au hasard, de deux façons.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 11 – Contrôle qualité : probabilité inverse

Dans une production, 5% des pièces sont défectueuses. Un contrôle automatique rejette 94% des pièces défectueuses, mais aussi 3% des pièces conformes.

1. Calcule la probabilité qu'une pièce soit rejetée.

2. Une pièce est rejetée : quelle est la probabilité qu'elle soit réellement défectueuse ?

3. Une pièce est acceptée : quelle est la probabilité qu'elle soit défectueuse ?

Exercice 12 – Trois fournisseurs et un défaut

Un assembleur achète ses cartes à trois fournisseurs : A (45%), B (35%) et C (20%). Les taux de cartes défaillantes sont 1,5% pour A, 2% pour B et 5% pour C.

1. Calcule la probabilité qu'une carte soit défaillante.

2. Une carte défaillante est analysée : quelle est la probabilité qu'elle vienne de C ?

3. L'assembleur veut réduire son taux global sous 2%. Suffit-il de remplacer C par un fournisseur à 1% ?

Exercice 13 – Arbre à trois niveaux

Une pièce traverse trois contrôles successifs et indépendants. Chaque contrôle la déclare conforme avec une probabilité 0,9 si elle est bonne, et 0,2 si elle est défectueuse. La pièce n'est acceptée que si les TROIS contrôles la déclarent conforme. La proportion de pièces défectueuses est de 10%.

1. Calcule la probabilité qu'une pièce bonne passe les trois contrôles.

2. Calcule la probabilité qu'une pièce défectueuse passe les trois contrôles.

3. Calcule la probabilité qu'une pièce soit acceptée.

4. Une pièce est acceptée : quelle est la probabilité qu'elle soit défectueuse ?

Exercice 14 – Paramètre inconnu dans un arbre

Deux ateliers produisent le même composant : l'atelier A en fait une proportion x, l'atelier B le reste. Les taux de rebut sont 3% pour A et 8% pour B. Le taux global relevé est de 5%.

1. Exprime le taux global en fonction de x.

2. Détermine x.

3. Sachant qu'une pièce est un rebut, quelle est la probabilité qu'elle vienne de B ?

Exercice 15 – Au moins un défaut sans remise

Un lot de 20 pièces contient 4 pièces non conformes. On en prélève 3 successivement sans remise.

1. Calcule la probabilité qu'aucune pièce prélevée ne soit non conforme.

2. Déduis-en la probabilité qu'au moins une le soit.

3. Compare avec le calcul « avec remise ».

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 16 – Type bac : réglage d'un seuil de contrôle

Une production comporte 8% de pièces hors tolérance. Un contrôle par capteur peut être réglé « sévère » ou « souple ». En mode sévère, il rejette 97% des pièces hors tolérance et 10% des bonnes. En mode souple, il rejette 85% des hors tolérance et 2% des bonnes.

1. Pour chaque mode, calcule la probabilité qu'une pièce soit rejetée.

2. Pour chaque mode, calcule la proportion de pièces réellement hors tolérance parmi les pièces acceptées.

3. Le cahier des charges exige au plus 0,5% de pièces hors tolérance parmi les pièces livrées. Quel mode choisir ?

Exercice 17 – Type bac : diagnostic à trois causes

Une panne d'un équipement a trois causes possibles et exclusives : électrique (50% des pannes), mécanique (30%) ou logicielle (20%). Un test rapide affiche un code d'erreur « E » dans 80% des pannes électriques, 25% des mécaniques et 40% des logicielles.

1. Calcule la probabilité que le test affiche « E ».

2. Le test affiche « E ». Calcule la probabilité de chaque cause.

3. Le test n'affiche pas « E ». Quelle cause devient la plus probable ?

Exercice 18 – Type bac : trois postes en série

Une pièce passe successivement par trois postes. Le poste 1 l'abîme avec une probabilité 0,02, le poste 2 avec 0,03 et le poste 3 avec 0,05. Les postes sont indépendants, et une pièce abîmée reste abîmée.

1. Calcule la probabilité qu'une pièce sorte intacte.

2. Calcule la probabilité qu'elle soit abîmée.

3. Sachant qu'une pièce est abîmée, quelle est la probabilité qu'elle l'ait été au poste 3 sans l'avoir été avant ?

4. Quel poste faut-il améliorer en priorité ?

Exercice 19 – Type bac : prélèvement dans un lot

Un carton contient 25 pièces, dont 5 sont hors cote. Le contrôleur en prélève 3 sans remise. Le carton est accepté si aucune pièce prélevée n'est hors cote.

1. Calcule la probabilité que le carton soit accepté.

2. Calcule la probabilité qu'exactement une pièce prélevée soit hors cote.

3. Sachant que le carton est refusé, quelle est la probabilité qu'une seule pièce ait été hors cote ?

4. Ce plan de contrôle est-il sévère ?

Exercice 20 – Type bac : coût attendu d'un contrôle

Une pièce est défectueuse avec une probabilité 0,06. Sans contrôle, une pièce défectueuse livrée coûte 400 € (retour client). Un contrôle coûte 3 € par pièce,

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

détecte 90% des défectueuses et rejette à tort 4% des bonnes. Une pièce rejetée coûte 25 € (rebut).

1. Calcule le coût moyen par pièce SANS contrôle.

2. Calcule le coût moyen par pièce AVEC contrôle.

3. Le contrôle est-il rentable ?

4. À partir de quel coût de retour client le contrôle devient-il rentable ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Conditionnelle dans un tableau

Total de pièces non conformes : $15 + 20 = 35$.

$P(\overline{C}) = \dfrac{35}{500} = 0{,}07$, soit 7%.

Pour la conditionnelle, on se restreint aux 200 pièces de l'usinage B : 20 sont non conformes.

$P_B(\overline{C}) = \dfrac{20}{200} = 0{,}10$, soit 10%.

Contrôle par la formule : $P_B(\overline{C}) = \dfrac{P(B \cap \overline{C})}{P(B)} = \dfrac{20\,/\,500}{200\,/\,500} = \dfrac{0{,}04}{0{,}40} = 0{,}10$ ✔.

Comparaison utile : l'usinage A a un taux de $\dfrac{15}{300} = 5\%$, soit deux fois moins que B. C'est B qu'il faut régler.

Réponse. $P(\overline{C}) = 0{,}07 \cdot P_B(\overline{C}) = 0{,}10$ (contre 0,05 pour l'usinage A).

Rappel de cours. Conditionner, c'est changer le TOTAL de référence : on divise par l'effectif de la condition.

Erreur fréquente. Diviser par 500 au lieu de 200 : on obtiendrait 0,04, qui est $P(B \cap \overline{C})$ et non la conditionnelle.

Correction de l'exercice 2 – Compléter un arbre pondéré

Premier niveau : $P(F_1) = 0{,}6$ et $P(F_2) = 0{,}4$.

Second niveau depuis F_1 : $P_{F_1}(H) = 0{,}03$ et $P_{F_1}(\overline{H}) = 0{,}97$.

Second niveau depuis F_2 : $P_{F_2}(H) = 0{,}08$ et $P_{F_2}(\overline{H}) = 0{,}92$.

Chemins : $P(F_1 \cap H) = 0{,}6 \times 0{,}03 = 0{,}018$; $P(F_1 \cap \overline{H}) = 0{,}6 \times 0{,}97 = 0{,}582$.

$P(F_2 \cap H) = 0{,}4 \times 0{,}08 = 0{,}032$; $P(F_2 \cap \overline{H}) = 0{,}4 \times 0{,}92 = 0{,}368$.

Somme : $0{,}018 + 0{,}582 + 0{,}032 + 0{,}368 = 1$ ✔ Les quatre chemins couvrent toutes les possibilités.

Ce contrôle est le premier réflexe à avoir sur un arbre : si la somme des chemins ne fait pas 1, il y a une erreur.

Réponse. 0,03 et 0,97 depuis F_1 ; 0,08 et 0,92 depuis F_2 · chemins 0,018 ; 0,582 ; 0,032 ; 0,368, de somme 1.

Rappel de cours. À chaque nœud, la somme des branches vaut 1 · la somme des probabilités de tous les chemins vaut 1.

Erreur fréquente. Écrire $P_{F_2}(\overline{H}) = 0{,}97$: chaque nœud a ses propres compléments, ils ne se recopient pas d'une branche à l'autre.

Correction de l'exercice 3 – Multiplier le long d'une branche

Notons T : « la pièce est traitée » et C : « elle est conforme ». On a $P(T) = 0{,}25$, $P_T(C) = 0{,}96$, $P_{\overline{T}}(C) = 0{,}88$.

$P(T \cap C) = P(T) \times P_T(C) = 0{,}25 \times 0{,}96 = 0{,}24$.

Pour la seconde : $P(\overline{T}) = 0{,}75$ et $P_{\overline{T}}(\overline{C}) = 1 - 0{,}88 = 0{,}12$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$P(\overline{T} \cap \overline{C}) = 0{,}75 \times 0{,}12 = 0{,}09$.

Interprétation : 24% des pièces sont traitées et conformes ; 9% ne sont ni traitées ni conformes.

Contrôle partiel : les deux autres chemins valent $0{,}25 \times 0{,}04 = 0{,}01$ et $0{,}75 \times 0{,}88 = 0{,}66$, et $0{,}24 + 0{,}01 + 0{,}66 + 0{,}09 = 1$ ✔.

Réponse. $P(T \cap C) = 0{,}24 \cdot P(\overline{T} \cap \overline{C}) = 0{,}09$.

Rappel de cours. $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$: on multiplie les probabilités rencontrées le long du chemin.

Erreur fréquente. Multiplier $0{,}75 \times 0{,}88$ pour la seconde question : 0,88 est la probabilité d'être CONFORME, il faut son complément 0,12.

Correction de l'exercice 4 – Formule des probabilités totales

Les deux fournisseurs forment une partition : toute pièce vient de F_1 ou de F_2, et jamais des deux.

Formule des probabilités totales : $P(H) = P(F_1)P_{F_1}(H) + P(F_2)P_{F_2}(H)$.

$P(H) = 0{,}6 \times 0{,}03 + 0{,}4 \times 0{,}08 = 0{,}018 + 0{,}032 = 0{,}05$.

Soit 5% de pièces hors cote.

Prévision : $0{,}05 \times 5\,000 = 250$ pièces hors cote.

Contrôle d'encadrement : $P(H)$ est une moyenne pondérée des taux 0,03 et 0,08, elle doit donc être comprise entre les deux ✔.

Réponse. $P(H) = 0{,}05$ · environ 250 pièces hors cote sur 5 000.

Rappel de cours. Probabilités totales : on additionne les probabilités de TOUS les chemins menant à l'évènement.

Erreur fréquente. Faire la moyenne simple des taux : $\frac{0{,}03 + 0{,}08}{2} = 0{,}055$ au lieu de 0,05. Il faut PONDÉRER par les parts des fournisseurs.

Correction de l'exercice 5 – Reconnaître une partition

Une partition de l'univers est une famille d'évènements deux à deux INCOMPATIBLES dont la réunion est l'univers TOUT ENTIER.

① Conforme / non conforme : incompatibles (une pièce ne peut être les deux) et exhaustifs (elle est nécessairement l'un des deux). C'est une partition ✔

② Les trois machines : chaque pièce vient d'une seule machine, et il n'y en a pas d'autre. C'est une partition ✔

③ Conforme / à retoucher : il manque un cas, celui des pièces à REBUTER. La réunion ne couvre pas l'univers : ce n'est pas une partition ✘

④ Matin / après-midi / par le chef : une pièce contrôlée le matin PAR le chef appartient à deux catégories. Les évènements ne sont pas incompatibles : ce n'est pas une partition ✘

Pourquoi c'est essentiel : la formule des probabilités totales n'est valable que sur une partition. Sur ④, on compterait deux fois certains chemins ; sur ③, on en oublierait.

Réponse. ① et ② sont des partitions · ③ oublie les pièces à rebuter · ④ a des catégories qui se chevauchent.

Rappel de cours. Partition : cas deux à deux incompatibles ET couvrant tout l'univers. C'est la condition d'emploi des probabilités totales.

Erreur fréquente. Utiliser la formule des probabilités totales sur des cas qui se

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

recoupent : le total dépasserait 1.

Correction de l'exercice 6 – Partition à trois cas

Les trois machines forment une partition : on additionne les trois chemins menant au rebut R.

$P(M_1 \cap R) = 0{,}50 \times 0{,}02 = 0{,}010$.

$P(M_2 \cap R) = 0{,}30 \times 0{,}04 = 0{,}012$.

$P(M_3 \cap R) = 0{,}20 \times 0{,}07 = 0{,}014$.

$P(R) = 0{,}010 + 0{,}012 + 0{,}014 = 0{,}036$, soit 3,6% de rebuts.

Contribution de chaque machine : M3 apporte 0,014, soit $\frac{0{,}014}{0{,}036} \approx 38{,}9\%$ des rebuts, alors qu'elle ne produit que 20% des pièces.

M2 en apporte $\frac{0{,}012}{0{,}036} \approx 33{,}3\%$ et M1 $\frac{0{,}010}{0{,}036} \approx 27{,}8\%$.

C'est donc M3 qui contribue le plus, malgré son faible volume : son taux de rebut est trois fois et demi celui de M1.

Contrôle : 38,9 + 33,3 + 27,8 = 100% ✔.

Réponse. $P(R) = 0{,}036$ · M3 contribue le plus (≈ 38,9% des rebuts pour 20% de la production).

Rappel de cours. Avec une partition à trois cas, la formule compte TROIS termes : un par chemin.

Erreur fréquente. Oublier un chemin : la somme des contributions doit toujours reconstituer $P(R)$.

Correction de l'exercice 7 – Remonter l'arbre

$P_R(M_3) = \frac{P(M_3 \cap R)}{P(R)} = \frac{0{,}014}{0{,}036} \approx 0{,}389$.

$P_R(M_1) = \frac{0{,}010}{0{,}036} \approx 0{,}278$.

$P_R(M_2) = \frac{0{,}012}{0{,}036} \approx 0{,}333$.

Somme : 0,389 + 0,278 + 0,333 = 1,000 ✔ — c'est le contrôle obligatoire, puisque le rebut vient nécessairement de l'une des trois machines.

Lecture industrielle : sachant qu'une pièce est mauvaise, il y a près de 39% de chances qu'elle sorte de M3. Un rebut est donc un indice en faveur de M3, sans certitude.

À ne pas confondre : $P_{M_3}(R) = 0{,}07$ (taux de rebut de M3) et $P_R(M_3) \approx 0{,}39$ (part de M3 parmi les rebuts). Les deux nombres ne mesurent pas la même chose.

Réponse. $P_R(M_3) \approx 0{,}389$ · $P_R(M_1) \approx 0{,}278$ et $P_R(M_2) \approx 0{,}333$, de somme 1 ✔.

Rappel de cours. $P_R(M_i) = \frac{P(M_i \cap R)}{P(R)}$, et la somme des $P_R(M_i)$ sur une partition vaut 1.

Erreur fréquente. Répondre 0,07 : c'est le taux de rebut de M3, la probabilité dans l'autre sens.

Correction de l'exercice 8 – Complément à condition fixée

À condition fixée, les deux branches sont complémentaires :
$P_M(\overline{D}) = 1 - P_M(D) = 1 - 0{,}92 = 0{,}08$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$P_{\overline{M}}(\overline{D}) = 1 - P_{\overline{M}}(D) = 1 - 0{,}05 = 0{,}95$.

Interprétation de 0,08 : dans 8% des cas où la pièce est mal placée, le capteur ne déclenche PAS. C'est un défaut de détection, le plus grave pour la sécurité de la ligne.

Interprétation de 0,95 : quand la pièce est bien placée, le capteur reste silencieux dans 95% des cas. Les 5% restants sont des arrêts inutiles de la ligne.

Attention à ce que ces nombres NE disent pas : ils ne donnent pas la proportion de fausses alertes parmi les déclenchements. Ce calcul, plus utile encore, demande la probabilité inverse.

Réponse. $P_M(\overline{D}) = 0{,}08$ (défaut non détecté) · $P_{\overline{M}}(\overline{D}) = 0{,}95$ (silence justifié).

Rappel de cours. $P_A(\overline{B}) = 1 - P_A(B)$: le complément se prend à condition INCHANGÉE.

Erreur fréquente. Écrire $P_{\overline{M}}(\overline{D}) = 1 - P_M(D) = 0{,}08$: on a changé la condition en même temps que l'évènement.

Correction de l'exercice 9 – Tirages sans remise

Premier tirage : 3 défectueuses sur 10, donc $P = \frac{3}{10}$.

Second tirage sachant la première défectueuse : il reste 2 défectueuses sur 9 pièces, donc $\frac{2}{9}$.

$P(\text{deux défectueuses}) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{6}{90} = \frac{1}{15} \approx 0{,}067$.

Aucune défectueuse : $\frac{7}{10} \times \frac{6}{9} = \frac{42}{90} = \frac{7}{15} \approx 0{,}467$.

Exactement une : deux chemins, « défectueuse puis bonne » et « bonne puis défectueuse ».

$\frac{3}{10} \times \frac{7}{9} + \frac{7}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{21}{90} + \frac{21}{90} = \frac{42}{90} = \frac{7}{15} \approx 0{,}467$.

Contrôle : $\frac{1}{15} + \frac{7}{15} + \frac{7}{15} = \frac{15}{15} = 1$ ✔.

Point clé : sans remise, les probabilités du second niveau DÉPENDENT du premier tirage. L'arbre n'a pas les mêmes pondérations sur ses deux branches.

Réponse. Deux défectueuses : $\frac{1}{15} \approx 0{,}067$ · aucune : $\frac{7}{15} \approx 0{,}467$ · exactement une : $\frac{7}{15} \approx 0{,}467$.

Rappel de cours. Sans remise, le second niveau de l'arbre change : un élément de moins au total, et un de moins dans la catégorie tirée.

Erreur fréquente. Utiliser $\frac{3}{10}$ au second tirage : ce serait un tirage AVEC remise, et la somme des chemins ne correspondrait plus à la situation décrite.

Correction de l'exercice 10 – Du tableau à l'arbre

Premier niveau : $P(\text{récent}) = \frac{560}{800} = 0{,}7$ et $P(\text{ancien}) = 0{,}3$.

Second niveau depuis « récent » : $\frac{28}{560} = 0{,}05$ de panne, donc 0,95 sans panne.

Second niveau depuis « ancien » : $\frac{36}{240} = 0{,}15$ de panne, donc 0,85 sans panne.

Première méthode (probabilités totales) :
$P(\text{panne}) = 0{,}7 \times 0{,}05 + 0{,}3 \times 0{,}15 = 0{,}035 + 0{,}045 = 0{,}08$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Seconde méthode (effectifs) : $28 + 36 = 64$ pannes sur 800 équipements, soit $\frac{64}{800} = 0{,}08$ ✔.

Les deux méthodes concordent, ce qui valide l'arbre.

À retenir : tableau et arbre décrivent la même situation. Le tableau donne les intersections directement, l'arbre donne les conditionnelles ; on passe de l'un à l'autre en divisant ou en multipliant.

Réponse. 0,7 et 0,3 au premier niveau ; 0,05 / 0,95 et 0,15 / 0,85 au second · $P(\text{panne}) = 0{,}08$ par les deux méthodes.

Rappel de cours. Tableau → arbre : on divise chaque effectif par le total de sa LIGNE pour obtenir les conditionnelles.

Erreur fréquente. Reporter $\frac{28}{800} = 0{,}035$ sur la branche du second niveau : c'est $P(\text{récent} \cap \text{panne})$, pas la conditionnelle.

Correction de l'exercice 11 – Contrôle qualité : probabilité inverse

Notons D : « défectueuse » et J : « rejetée ». On a $P(D) = 0{,}05$, $P_D(J) = 0{,}94$, $P_{\overline{D}}(J) = 0{,}03$.

Chemins : $P(D \cap J) = 0{,}05 \times 0{,}94 = 0{,}047$ et $P(\overline{D} \cap J) = 0{,}95 \times 0{,}03 = 0{,}028\,5$.

$P(J) = 0{,}047 + 0{,}028\,5 = 0{,}075\,5$, soit 7,55% des pièces rejetées.

Probabilité inverse : $P_J(D) = \dfrac{0{,}047}{0{,}075\,5} \approx 0{,}622$.

Donc 62,2% des rejets sont justifiés : près de quatre pièces rejetées sur dix étaient en réalité bonnes.

Pour les pièces acceptées : $P(\bar{J}) = 1 - 0{,}075\,5 = 0{,}924\,5$, et $P(D \cap \bar{J}) = 0{,}05 \times 0{,}06 = 0{,}003$.

$P_{\bar{J}}(D) = \dfrac{0{,}003}{0{,}924\,5} \approx 0{,}003\,25$, soit environ 0,32%.

Bilan du contrôle : il ne laisse passer que 3 pièces défectueuses sur 1 000 acceptées — excellent pour le client. En revanche il rejette beaucoup de bonnes pièces, ce qui coûte cher au producteur.

Réponse. $P(J) = 0{,}075\,5 \cdot P_J(D) \approx 0{,}622 \cdot P_{\bar{J}}(D) \approx 0{,}003\,25$.

Rappel de cours. $P_D(J)$ mesure la performance du contrôle, $P_J(D)$ la fiabilité de son verdict. Les deux diffèrent d'autant plus que le défaut est rare.

Erreur fréquente. Répondre 0,94 à la deuxième question : c'est $P_D(J)$, la probabilité en sens inverse.

Correction de l'exercice 12 – Trois fournisseurs et un défaut

Chemins : $P(A \cap D) = 0{,}45 \times 0{,}015 = 0{,}006\,75$; $P(B \cap D) = 0{,}35 \times 0{,}02 = 0{,}007$; $P(C \cap D) = 0{,}20 \times 0{,}05 = 0{,}010$.

$P(D) = 0{,}006\,75 + 0{,}007 + 0{,}010 = 0{,}023\,75$, soit 2,375%.

$P_D(C) = \dfrac{0{,}010}{0{,}023\,75} \approx 0{,}421$: 42,1% des cartes défaillantes viennent de C, qui ne fournit que 20% des cartes.

Avec un fournisseur à 1% à la place de C : le nouveau chemin vaut $0{,}20 \times 0{,}01 = 0{,}002$.

Nouveau taux global : $0{,}006\,75 + 0{,}007 + 0{,}002 = 0{,}015\,75$, soit 1,575%.

1,575% < 2% : oui, le remplacement suffit, avec une marge confortable.

Analyse complémentaire : à lui seul, ce changement fait gagner 0,8 point de taux global.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Aucun autre levier n'est aussi efficace, puisque C concentrait 42% des défauts pour un cinquième des volumes.

Contrôle : le taux global doit rester compris entre le meilleur (1%) et le pire (2%) des taux fournisseurs après changement ✔ 1,575% est bien dans cet intervalle.

Réponse. $P(D) = 0{,}023\,75 \cdot P_D(C) \approx 0{,}421$ · avec un fournisseur à 1%, le taux tombe à 1,575% : objectif atteint.

Rappel de cours. Le levier le plus efficace n'est pas le plus gros fournisseur, mais celui qui concentre la plus grande PART DES DÉFAUTS.

Erreur fréquente. Croire qu'il faut agir sur A parce qu'il fournit le plus : A n'apporte que 28,4% des défauts.

Correction de l'exercice 13 – Arbre à trois niveaux

Pièce bonne : les trois contrôles sont indépendants, donc $0{,}9^3 = 0{,}729$.

Pièce défectueuse : $0{,}2^3 = 0{,}008$.

Probabilités totales : $P(\text{acceptée}) = 0{,}90 \times 0{,}729 + 0{,}10 \times 0{,}008$.

$= 0{,}656\,1 + 0{,}000\,8 = 0{,}656\,9$.

Probabilité inverse : $P_{\text{acceptée}}(\text{défectueuse}) = \dfrac{0{,}000\,8}{0{,}656\,9} \approx 0{,}001\,22$, soit environ 0,12%.

Autrement dit : sur 1 000 pièces acceptées, un peu plus d'une seule est défectueuse. Le triple contrôle est très sûr.

Revers de la médaille : $1 - 0{,}729 = 27{,}1\%$ des BONNES pièces sont rejetées à tort, ce qui représente une perte considérable.

Comparaison instructive avec un seul contrôle : on aurait $P(\text{acceptée}) = 0{,}9 \times 0{,}9 + 0{,}1 \times 0{,}2 = 0{,}83$ et $P(\text{défectueuse} \mid \text{acceptée}) = \dfrac{0{,}02}{0{,}83} \approx 2{,}4\%$ — vingt fois plus de défauts laissés passer, mais beaucoup moins de rejets injustifiés.

Réponse. Bonne : $0{,}9^3 = 0{,}729$ · défectueuse : $0{,}2^3 = 0{,}008$ · $P(\text{acceptée}) = 0{,}656\,9$ · $P(\text{défectueuse} \mid \text{acceptée}) \approx 0{,}0012$.

Rappel de cours. Contrôles indépendants répétés : on multiplie les probabilités conditionnelles, puis on applique les probabilités totales.

Erreur fréquente. Multiplier $0{,}9 \times 0{,}2$ en mélangeant les branches : chaque chemin reste dans une seule catégorie (bonne OU défectueuse).

Correction de l'exercice 14 – Paramètre inconnu dans un arbre

Probabilités totales : $P(R) = x \times 0{,}03 + (1 - x) \times 0{,}08$.

On développe : $P(R) = 0{,}03x + 0{,}08 - 0{,}08x = 0{,}08 - 0{,}05x$.

L'énoncé impose $P(R) = 0{,}05$, d'où $0{,}08 - 0{,}05x = 0{,}05$.

$-0{,}05x = -0{,}03$, donc $x = 0{,}6$: l'atelier A produit 60% des composants.

Contrôle : $0{,}6 \times 0{,}03 + 0{,}4 \times 0{,}08 = 0{,}018 + 0{,}032 = 0{,}05$ ✔.

Probabilité inverse : $P_R(B) = \dfrac{0{,}032}{0{,}05} = 0{,}64$.

L'atelier B, avec 40% de la production, est responsable de 64% des rebuts.

Lecture de l'expression $P(R) = 0{,}08 - 0{,}05x$: elle est décroissante en x, ce qui est logique — plus l'atelier A (le meilleur) produit, plus le taux global baisse. Aux bornes : $x = 0$ donnerait 8%, $x = 1$ donnerait 3%.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Réponse. $P(R) = 0{,}08 - 0{,}05x$ · $x = 0{,}6$ · $P_R(B) = 0{,}64$.

Rappel de cours. Une inconnue dans un arbre se traite comme d'habitude : probabilités totales, puis ÉQUATION à résoudre.

Erreur fréquente. Poser x pour l'atelier B sans le préciser : la valeur trouvée (0,4) serait juste mais attribuée au mauvais atelier.

Correction de l'exercice 15 – Au moins un défaut sans remise

Aucune non conforme : il faut tirer trois pièces parmi les 16 conformes, successivement.

$P = \frac{16}{20} \times \frac{15}{19} \times \frac{14}{18}$.

Calcul : $\frac{16}{20} = 0{,}8$; $\frac{15}{19} \approx 0{,}789\,47$; $\frac{14}{18} \approx 0{,}777\,78$.

Produit : $0{,}8 \times 0{,}789\,47 \times 0{,}777\,78 \approx 0{,}491\,2$.

Au moins une non conforme : $1 - 0{,}491\,2 = 0{,}508\,8$, soit environ 50,9%.

Avec remise, on aurait $\left(\frac{16}{20}\right)^3 = 0{,}8^3 = 0{,}512$, donc $1 - 0{,}512 = 0{,}488$ pour « au moins une ».

Comparaison : 50,9% sans remise contre 48,8% avec remise. L'écart est de 2 points.

Explication : sans remise, chaque pièce conforme prélevée « épuise » le stock de bonnes pièces, ce qui rend un défaut un peu plus probable ensuite.

À retenir : l'approximation avec remise est acceptable quand l'échantillon est petit devant le lot. Ici 3 pièces sur 20, soit 15% : l'écart est déjà visible.

Réponse. Aucune : $\frac{16}{20} \times \frac{15}{19} \times \frac{14}{18} \approx 0{,}491$ · au moins une : $\approx 0{,}509$ · avec remise on trouverait 0,488, soit 2 points d'écart.

Rappel de cours. « Au moins un » passe par l'évènement contraire « aucun », même en tirage sans remise.

Erreur fréquente. Garder le même dénominateur aux trois tirages : sans remise, il passe de 20 à 19 puis à 18.

Correction de l'exercice 16 – Type bac : réglage d'un seuil de contrôle

Mode sévère. Chemins vers le rejet : $0{,}08 \times 0{,}97 = 0{,}077\,6$ et $0{,}92 \times 0{,}10 = 0{,}092$.

$P(\text{rejet}) = 0{,}077\,6 + 0{,}092 = 0{,}169\,6$, soit près de 17% de pièces rejetées.

Mode souple : $0{,}08 \times 0{,}85 = 0{,}068$ et $0{,}92 \times 0{,}02 = 0{,}018\,4$, donc $P(\text{rejet}) = 0{,}086\,4$, soit 8,64%.

Pièces acceptées en mode sévère : $1 - 0{,}169\,6 = 0{,}830\,4$. Parmi elles, les hors tolérance : $0{,}08 \times 0{,}03 = 0{,}002\,4$.

Proportion : $\frac{0{,}002\,4}{0{,}830\,4} \approx 0{,}002\,89$, soit 0,289%.

Pièces acceptées en mode souple : $1 - 0{,}086\,4 = 0{,}913\,6$. Hors tolérance parmi elles : $0{,}08 \times 0{,}15 = 0{,}012$.

Proportion : $\frac{0{,}012}{0{,}913\,6} \approx 0{,}013\,1$, soit 1,31%.

Comparaison au cahier des charges : le mode sévère donne 0,289% ≤ 0,5% ✔ ; le mode souple donne 1,31% > 0,5% ✘

Il faut donc choisir le mode SÉVÈRE, seul conforme à l'exigence client.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Coût de ce choix : 16,96% de rejets contre 8,64%, soit presque le double. Et parmi les rejets du mode sévère, $\frac{0{,}092}{0{,}1696} \approx 54\%$ sont des bonnes pièces — un gâchis à chiffrer avant de valider.

Réponse. Rejets : 16,96% (sévère) contre 8,64% (souple) · hors tolérance parmi les livrées : 0,289% contre 1,31% · seul le mode sévère respecte le cahier des charges ($\leq 0{,}5\%$).

Rappel de cours. Un réglage de contrôle arbitre toujours entre défauts LIVRÉS et bonnes pièces REJETÉES. Les deux se calculent par probabilité inverse.

Erreur fréquente. Choisir le mode souple parce qu'il rejette moins : il laisse passer quatre fois plus de pièces hors tolérance.

Correction de l'exercice 17 – Type bac : diagnostic à trois causes

Chemins vers « E » : électrique $0{,}50 \times 0{,}80 = 0{,}40$; mécanique $0{,}30 \times 0{,}25 = 0{,}075$; logicielle $0{,}20 \times 0{,}40 = 0{,}08$.

$P(E) = 0{,}40 + 0{,}075 + 0{,}08 = 0{,}555$.

Probabilités inverses : $P_E(\text{élec}) = \frac{0{,}40}{0{,}555} \approx 0{,}721$.

$P_E(\text{méca}) = \frac{0{,}075}{0{,}555} \approx 0{,}135$ et $P_E(\text{logi}) = \frac{0{,}08}{0{,}555} \approx 0{,}144$.

Contrôle : $0{,}721 + 0{,}135 + 0{,}144 = 1{,}000$ ✔.

Le code « E » orientant vers l'électrique avec 72% de confiance, c'est par là qu'il faut commencer l'intervention.

Si le test n'affiche pas « E » : $P(\overline{E}) = 1 - 0{,}555 = 0{,}445$.

Chemins : électrique $0{,}50 \times 0{,}20 = 0{,}10$; mécanique $0{,}30 \times 0{,}75 = 0{,}225$; logicielle $0{,}20 \times 0{,}60 = 0{,}12$.

$P_{\overline{E}}(\text{méca}) = \frac{0{,}225}{0{,}445} \approx 0{,}506$; $P_{\overline{E}}(\text{logi}) = \frac{0{,}12}{0{,}445} \approx 0{,}270$; $P_{\overline{E}}(\text{élec}) = \frac{0{,}10}{0{,}445} \approx 0{,}225$.

L'absence de code « E » rend donc la cause MÉCANIQUE la plus probable (50,6%), alors qu'elle n'était que la deuxième cause a priori (30%).

Voilà tout l'intérêt du test : il RÉVISE les probabilités. L'électrique passe de 50% à 72% avec le code, et tombe à 22,5% sans lui.

Réponse. $P(E) = 0{,}555$ · avec « E » : électrique ≈ 72,1%, logicielle ≈ 14,4%, mécanique ≈ 13,5% · sans « E » : mécanique devient la plus probable (≈ 50,6%).

Rappel de cours. Un test réoriente les probabilités des causes : on recalcule chaque $P_{\text{résultat}}(\text{cause})$, et leur somme doit valoir 1.

Erreur fréquente. Conclure « électrique » dans les deux cas parce que c'est la cause la plus fréquente a priori : sans le code « E », elle devient la MOINS probable.

Correction de l'exercice 18 – Type bac : trois postes en série

Intacte : elle doit échapper aux trois postes, donc $0{,}98 \times 0{,}97 \times 0{,}95$.

$0{,}98 \times 0{,}97 = 0{,}950\,6$, puis $0{,}950\,6 \times 0{,}95 = 0{,}903\,07$.

$P(\text{intacte}) \approx 0{,}903$, soit 90,3%.

Abîmée : $1 - 0{,}903\,07 = 0{,}096\,93$, soit environ 9,7%.

Abîmée au poste 3 seulement : elle a passé les deux premiers postes puis a été abîmée au troisième.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

$P = 0{,}98 \times 0{,}97 \times 0{,}05 = 0{,}950\,6 \times 0{,}05 = 0{,}047\,53$.

Conditionnellement : $\dfrac{0{,}047\,53}{0{,}096\,93} \approx 0{,}490$.

Donc près de 49% des pièces abîmées le sont au poste 3.

Comparons les contributions. Poste 1 : 0,02 (soit $\dfrac{0{,}02}{0{,}096\,93} \approx 20{,}6\%$ des dégâts). Poste 2 : $0{,}98 \times 0{,}03 = 0{,}029\,4$ (≈ 30,3%). Poste 3 : 0,047 53 (≈ 49,0%).

Contrôle : $0{,}02 + 0{,}029\,4 + 0{,}047\,53 = 0{,}096\,93$ ✔ et 20,6 + 30,3 + 49,0 = 99,9% (arrondis) ✔.

Priorité : le poste 3, responsable de près de la moitié des pièces abîmées. Ramener son taux de 5% à 2% ferait passer le taux global de 9,7% à $0{,}98 \times 0{,}97 \times 0{,}98 = 0{,}931\,7$, soit 6,8% de pièces abîmées.

Réponse. P(intacte) ≈ 0,903 · P(abîmée) ≈ 0,097 · ≈ 49% des pièces abîmées le sont au poste 3 · c’est donc le poste 3 à améliorer en priorité.

Rappel de cours. Pour « passer partout sans dommage », on multiplie les probabilités de succès de chaque poste.

Erreur fréquente. Additionner les taux (2 + 3 + 5 = 10%) : l’approximation est proche de 9,7% mais fausse, et elle empire avec des taux plus élevés.

Correction de l’exercice 19 – Type bac : prélèvement dans un lot

Accepté : les trois pièces viennent des 20 pièces conformes.

$P(\text{accepté}) = \dfrac{20}{25} \times \dfrac{19}{24} \times \dfrac{18}{23}$.

$\dfrac{20}{25} = 0{,}8$; $\dfrac{19}{24} \approx 0{,}791\,67$; $\dfrac{18}{23} \approx 0{,}782\,61$.

Produit : $0{,}8 \times 0{,}791\,67 \times 0{,}782\,61 \approx 0{,}495\,7$.

Exactement une hors cote : trois positions possibles pour la pièce hors cote.

Un chemin, par exemple hors cote au premier tirage :
$\dfrac{5}{25} \times \dfrac{20}{24} \times \dfrac{19}{23} \approx 0{,}2 \times 0{,}833\,33 \times 0{,}826\,09 \approx 0{,}137\,7$.

Les trois chemins ont la même probabilité (mêmes facteurs dans un autre ordre), donc P(exactement une) ≈ $3 \times 0{,}137\,7 \approx 0{,}413\,0$.

Carton refusé : $P(\text{refusé}) = 1 - 0{,}495\,7 = 0{,}504\,3$.

Conditionnellement : $\dfrac{0{,}413\,0}{0{,}504\,3} \approx 0{,}819$.

Donc dans 82% des refus, une seule pièce hors cote a été trouvée.

Le plan est-il sévère ? Un carton contenant 20% de pièces hors cote n’est détecté que dans 50,4% des cas : il a donc une chance sur deux de passer le contrôle.

Conclusion : le plan est PEU sévère. Pour améliorer la détection, il faudrait prélever davantage de pièces — avec 6 pièces, la probabilité d’acceptation tomberait à environ 0,22.

Réponse. P(accepté) ≈ 0,496 · P(exactement une) ≈ 0,413 · ≈ 0,819 sachant le refus · plan peu sévère : un carton à 20% de défauts passe une fois sur deux.

Rappel de cours. Sans remise, chaque chemin se calcule avec des dénominateurs décroissants ; les chemins d’un même cas ont toutefois la même probabilité.

Erreur fréquente. Oublier le facteur 3 sur « exactement une » : on obtiendrait 0,138 et la somme des cas ne ferait pas 1.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 20 – Type bac : coût attendu d’un contrôle

Sans contrôle : seule la livraison d’une pièce défectueuse coûte. Coût moyen = $0{,}06 \times 400 = 24$ € par pièce.

Avec contrôle, trois postes de coût. D’abord le contrôle lui-même : 3 € pour TOUTES les pièces.

Ensuite les rejets : $P(\text{rejet}) = 0{,}06 \times 0{,}90 + 0{,}94 \times 0{,}04 = 0{,}054 + 0{,}037\,6 = 0{,}091\,6$, à 25 € chacun, soit $0{,}091\,6 \times 25 = 2{,}29$ €.

Enfin les défectueuses non détectées : $0{,}06 \times 0{,}10 = 0{,}006$, à 400 € chacune, soit $0{,}006 \times 400 = 2{,}40$ €.

Coût moyen avec contrôle : $3 + 2{,}29 + 2{,}40 = 7{,}69$ € par pièce.

Comparaison : 7,69 € contre 24 € — le contrôle fait économiser 16,31 € par pièce. Il est donc très RENTABLE.

Sur une production de 10 000 pièces, l’économie atteint 163 100 €.

Dernière question : notons c le coût d’un retour client. Sans contrôle, le coût moyen vaut $0{,}06\,c$. Avec contrôle, il vaut $3 + 2{,}29 + 0{,}006\,c$.

Le contrôle est rentable si $3 + 2{,}29 + 0{,}006c < 0{,}06c$, soit $5{,}29 < 0{,}054c$.

$$c > \frac{5{,}29}{0{,}054} \approx 97{,}96 \text{ €}.$$

Le contrôle devient donc rentable dès que le retour client coûte plus d’environ 98 €. En dessous, mieux vaut livrer sans contrôler — ce qui, ici, est très loin du cas réel (400 €).

Réponse. Sans contrôle : 24 € par pièce · avec contrôle : $3 + 2{,}29 + 2{,}40 = 7{,}69$ € · économie de 16,31 € par pièce · rentable dès que le retour client dépasse ≈ 98 €.

Rappel de cours. Un coût moyen se calcule comme une espérance : chaque scénario est pondéré par sa probabilité, obtenue sur l’arbre.

Erreur fréquente. Compter les 3 € de contrôle seulement sur les pièces rejetées : le contrôle s’applique à TOUTES les pièces.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).