Séries statistiques à deux variables — Terminale STI2D

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés

Présentation

En première, on ajustait un nuage de points par une droite. Mais la plupart des phénomènes de la technologie ne sont pas affines : une décroissance radioactive, un refroidissement, une perte de charge dans une canalisation donnent des nuages INCURVÉS. La terminale apporte la réponse : le CHANGEMENT DE VARIABLE. En posant $z = \ln y$, $z = \frac{1}{y}$ ou en travaillant en log-log, le nuage redevient aligné, on l'ajuste par les moindres carrés, puis on revient au modèle initial. Ces 20 exercices corrigés couvrent l'ajustement affine, les trois changements de variable usuels, le retour au modèle et la critique des prévisions, du calcul direct au problème type bac. La difficulté est croissante : l'énoncé puis la correction détaillée s'affichent d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables :
mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-sti2d/statistiques-deux-variables

Exercice 1 – Point moyen et droite des moindres carrés

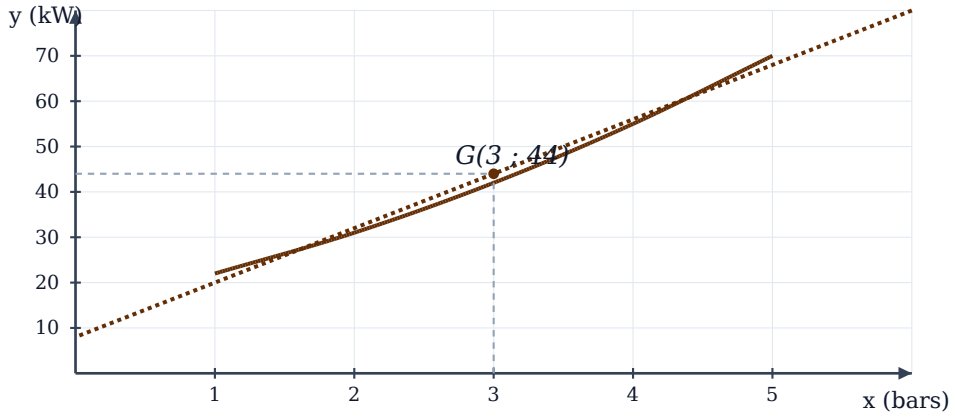
On relève la puissance absorbée y (en kW) d'un compresseur selon la pression x (en bars) :

x : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 · y : 22 ; 31 ; 42 ; 55 ; 70

La calculatrice donne la droite d'ajustement $y = 12x + 8$.

1. Calcule les coordonnées du point moyen G.

2. Vérifie que la droite passe par G.



Exercice 2 – Interpréter et prévoir

On garde l'ajustement $y = 12x + 8$ du compresseur (x en bars, y en kW), valable pour $1 \leq x \leq 5$.

1. Interprète les coefficients 12 et 8.

2. Estime la puissance pour $x = 3{,}5$ bars.

3. Estime la pression donnant une puissance de 50 kW.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 3 – Calculer une nouvelle variable

Une population de bactéries, en milliers par mL, est relevée toutes les heures :

x : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 · y : 5 ; 10 ; 20 ; 40 ; 80

1. Le nuage $(x\,;y)$ est-il aligné ?

2. Calcule $z = \log y$ pour chaque relevé, à 10^{-3} près.

Exercice 4 – Reconnaître un nuage non linéaire

Trois séries sont relevées, avec un pas d'abscisse constant :

série A — y : 12 ; 19 ; 26 ; 33 · série B — y : 200 ; 100 ; 50 ; 25 · série C — y : 4 ; 16 ; 36 ; 64

1. Pour chaque série, dis si un ajustement affine convient et, sinon, quel changement de variable envisager.

Exercice 5 – Interpolation, extrapolation

Un ajustement $y = -1{,}8x + 96$ a été obtenu à partir de mesures effectuées pour x entre 10 et 40.

1. Calcule les prévisions pour $x = 25$ et $x = 60$.

2. Précise pour chacune s'il s'agit d'interpolation ou d'extrapolation.

3. Pour quelle valeur de x le modèle prévoit-il $y = 0$? Ce résultat a-t-il un sens ?

Exercice 6 – Ajustement après changement de variable

On reprend la population de bactéries : x : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 et $z = \log y$: 0,699 ; 1 ; 1,301 ; 1,602 ; 1,903.

1. Détermine l'équation de la droite d'ajustement de z en x.

2. Vérifie qu'elle passe par le point moyen.

Exercice 7 – Revenir au modèle initial

L'ajustement obtenu après changement de variable est $z = 0{,}301x + 0{,}699$, avec $z = \log y$.

1. Exprime y en fonction de x.

2. Identifie le modèle obtenu et son taux de croissance.

Exercice 8 – Changement de variable en 1/x

Le temps de remplissage y (en minutes) d'une cuve est relevé selon le débit x (en L/min) :

x : 2 ; 4 ; 5 ; 10 · y : 30 ; 15 ; 12 ; 6

1. Le nuage $(x\,;y)$ est-il aligné ?

2. Calcule $t = \dfrac{1}{x}$ et étudie le nuage $(t\,;y)$.

3. Donne le modèle liant y à x.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 9 – Changement de variable en racine

La distance de freinage y (en m) est relevée selon la vitesse x (en km/h) :

x : 20 ; 40 ; 60 ; 80 · y : 4 ; 16 ; 36 ; 64

1. Calcule $z = \sqrt{y}$ et montre que le nuage $(x\,;z)$ est aligné.

2. Donne l'équation de la droite, puis le modèle liant y à x.

3. Estime la distance de freinage à 100 km/h.

Exercice 10 – Résidus et qualité d'ajustement

Pour la série du compresseur ($y = 12x + 8$), les valeurs mesurées étaient 22 ; 31 ; 42 ; 55 ; 70 pour $x = 1$ à 5.

1. Calcule les cinq résidus.

2. Calcule leur somme et la somme de leurs carrés.

3. Que suggère la répartition des signes ?

Exercice 11 – Modèle exponentiel complet

L'activité y d'une source (en MBq) est relevée en fonction du temps x (en jours) :

x : 0 ; 10 ; 20 ; 30 · y : 800 ; 400 ; 200 ; 100

1. Justifie qu'un modèle exponentiel convient.

2. Détermine l'ajustement de $z = \log y$ en x.

3. Reviens au modèle en y et donne la demi-vie.

4. Estime l'activité à 45 jours.

Exercice 12 – Loi de puissance en log-log

La perte de charge y (en mbar) dans une canalisation est relevée selon le débit x (en m³/h) :

x : 1 ; 2 ; 4 ; 8 · y : 3 ; 12 ; 48 ; 192

1. Calcule $u = \log x$ et $v = \log y$.

2. Montre que le nuage $(u\,;v)$ est aligné et donne l'équation de la droite.

3. Déduis-en un modèle de la forme $y = k\,x^n$.

4. Estime la perte de charge pour un débit de 5 m³/h.

Exercice 13 – Choisir le bon changement de variable

Une série donne x : 1 ; 2 ; 3 ; 4 et y : 120 ; 60 ; 40 ; 30.

1. Teste un modèle exponentiel en calculant les quotients de y.

2. Teste un modèle hyperbolique en calculant les produits $x \times y$.

3. Conclus et donne le modèle.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 14 – Prévision et critique du modèle

Un ajustement exponentiel donne $y = 250 \times 1{,}08^{x}$ pour le nombre d'abonnés (en centaines) d'un service, x en années depuis 2026, à partir de mesures faites sur x entre 0 et 6.

1. Estime le nombre d'abonnés en 2030 et en 2034.

2. Estime en quelle année le service dépasserait 1 000 centaines d'abonnés.

3. Quelles réserves faut-il formuler ?

Exercice 15 – Résidus après changement de variable

Une série donne x : 1 ; 2 ; 3 ; 4 et y : 50 ; 24 ; 13 ; 6. On pose $z = \log y$ et l'on ajuste $z = -0{,}31x + 1{,}93$.

1. Calcule z pour chaque relevé, à 10^{-3} près.

2. Calcule les résidus sur z.

3. L'ajustement est-il acceptable ?

Exercice 16 – Type bac : montée en charge d'une production

La production mensuelle y (en milliers de pièces) d'une nouvelle ligne est relevée :

x (mois) : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 · y : 6 ; 9 ; 13,5 ; 20,25 ; 30,375

1. Montre qu'un modèle exponentiel convient parfaitement.

2. Calcule $z = \log y$ et donne l'ajustement de z en x.

3. Reviens au modèle en y.

4. Estime la production du 8e mois, puis dis quand la capacité maximale de 100 milliers de pièces serait atteinte.

Exercice 17 – Type bac : refroidissement d'une pièce

Une pièce refroidit dans un atelier à 20 °C. On relève sa température T (en °C) :

t (min) : 0 ; 5 ; 10 ; 15 · T : 180 ; 100 ; 60 ; 40

1. Explique pourquoi un ajustement exponentiel sur T serait inadapté.

2. Calcule l'écart $E = T - 20$ et montre qu'il suit un modèle exponentiel.

3. Donne le modèle de T en fonction de t.

4. Estime la température à 25 minutes et la limite à long terme.

Exercice 18 – Type bac : caractéristique d'un capteur

Un débitmètre délivre une tension U (en V) selon le débit Q (en L/min) :

Q : 4 ; 9 ; 16 ; 25 · U : 1,2 ; 1,8 ; 2,4 ; 3

1. Le nuage $(Q\,;U)$ est-il aligné ?

2. Calcule $w = \sqrt{Q}$ et ajuste U en fonction de w.

3. Donne le modèle liant U à Q.

4. Quel débit correspond à une tension de 2,7 V ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 19 – Type bac : coût unitaire d'une série

Le coût unitaire y (en €) d'une pièce est relevé selon la taille x de la série :

x : 50 ; 100 ; 200 ; 500 · y : 26 ; 16 ; 11 ; 8

1. Calcule $t = \frac{1}{x}$ (à 10^{-4} près) et ajuste y en fonction de t.

2. Donne le modèle liant y à x et interprète ses deux coefficients.

3. Estime le coût unitaire pour une série de 1 000 pièces.

4. Le coût unitaire peut-il descendre sous 6 € ?

Exercice 20 – Type bac : comparer deux modèles et décider

Une consommation y (en MWh) est relevée sur cinq ans :

x : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 · y : 95 ; 90,25 ; 85,74 ; 81,45 ; 77,38

Deux modèles sont proposés : M_1 affine, $y = -4{,}4x + 99{,}2$, et M_2 exponentiel, $y = 100 \times 0{,}95^{x}$.

1. Calcule les résidus du modèle M_2.

2. Compare les prévisions des deux modèles à $x = 10$ et $x = 25$.

3. Quel modèle retenir, et pourquoi ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).