Suites arithmétiques et géométriques — Terminale STI2D

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

En terminale STI2D, les suites ne servent plus seulement à décrire une évolution : on sait maintenant CUMULER leurs termes. Trois formules suffisent — $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, la somme d'une suite arithmétique $n \times \dfrac{\text{premier} + \text{dernier}}{2}$, et celle d'une suite géométrique $u_0 \dfrac{1 - q^n}{1 - q}$ — et avec elles on calcule une production cumulée, un total de versements, l'énergie consommée sur une année. S'y ajoutent la notation Σ et les deux moyennes, arithmétique et géométrique, cette dernière donnant le taux d'évolution moyen. Ces 20 exercices corrigés vont de l'identification d'une suite au problème type bac. La difficulté est croissante : l'énoncé puis la correction détaillée s'affichent d'un clic.

Version en ligne, avec les corrections dépliables : mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-sti2d/suites-arithmetiques-geometriques

Exercice 1 – Arithmétique ou géométrique ?

Trois relevés de production mensuelle :

A : 240 ; 255 ; 270 ; 285 · B : 1 000 ; 1 050 ; 1 102,5 ; 1 157,625 · C : 60 ; 75 ; 95 ; 120

1. Pour chaque relevé, précise s'il est arithmétique, géométrique, ou ni l'un ni l'autre, avec sa raison.

Exercice 2 – Terme général d'une suite arithmétique

Une machine est révisée tous les mois. Le compteur d'heures affiche 1 240 h au premier relevé ($n = 1$) et augmente de 160 h par mois.

1. Exprime u_n, le nombre d'heures au n-ième relevé.

2. Que vaut le compteur au 12e relevé ?

3. Au bout de combien de relevés dépasse-t-il 3 000 h ?

Exercice 3 – Terme général d'une suite géométrique

Un stock de pièces détachées diminue de 12% par trimestre. Il compte 5 000 pièces au départ ($n = 0$).

1. Exprime v_n, le stock après n trimestres.

2. Calcule le stock après 2 ans.

Exercice 4 – Somme des premiers entiers

On rappelle que $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

1. Calcule $1 + 2 + \cdots + 50$.

2. Calcule $1 + 2 + \cdots + 100$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

3. Calcule $20 + 21 + \cdots + 60$.

Exercice 5 – Notation sigma

On considère les sommes $A = \sum_{k=1}^{5} (2k + 1)$ et $B = \sum_{k=0}^{4} 3 \times 2^k$.

1. Écris A et B sans le symbole Σ, puis calcule-les.

Exercice 6 – Somme d'une suite arithmétique

Un atelier produit 120 pièces la première semaine, puis augmente sa production de 8 pièces par semaine.

1. Quelle est la production de la 20^{e} semaine ?

2. Quelle est la production totale sur ces 20 semaines ?

Exercice 7 – Somme d'une suite géométrique

Une entreprise verse 2 000 € sur un compte la première année, puis augmente son versement de 6% chaque année.

1. Quel est le versement de la 10^{e} année ?

2. Quel est le total versé sur 10 ans ?

Exercice 8 – Moyenne arithmétique

Trois relevés successifs de température, en degrés, sont $a = 46$, b et $c = 78$. Ils forment une suite arithmétique.

1. Détermine b.

2. Donne la raison de cette suite.

3. Quel serait le relevé suivant ?

Exercice 9 – Moyenne géométrique et taux moyen

Le chiffre d'affaires d'un atelier est passé de 200 k€ à 242 k€ en deux ans. On cherche le chiffre d'affaires intermédiaire qui correspondrait à deux hausses identiques.

1. Calcule cette valeur intermédiaire.

2. En déduire le taux d'évolution annuel moyen.

Exercice 10 – Retrouver une suite à partir de deux termes

Une suite géométrique (u_n) à termes positifs vérifie $u_2 = 45$ et $u_5 = 151{,}875$.

1. Détermine la raison q.

2. Détermine u_0.

3. Calcule la somme $u_0 + u_1 + \cdots + u_5$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 11 – Production cumulée

Une ligne produit 1 500 pièces le premier mois. Chaque mois, la production augmente de 75 pièces. Un client commande 30 000 pièces.

1. Exprime la production du mois n, puis la production cumulée au bout de n mois.

2. Au bout de combien de mois la commande est-elle honorée ?

Exercice 12 – Épargne à intérêts composés

Un atelier place 15 000 € à 3,5% par an, intérêts composés, sans retrait.

1. Exprime le capital C_n après n années.

2. Calcule le capital après 8 ans.

3. Au bout de combien d'années le capital dépasse-t-il 20 000 € ?

Exercice 13 – Combien de termes pour atteindre un total ?

Un atelier récupère 800 L d'eau de pluie le premier mois, puis 5% de moins chaque mois (toit vieillissant, saison sèche). La citerne à remplir contient 9 000 L.

1. Exprime le volume récupéré le mois n, puis le volume cumulé sur n mois.

2. Calcule le cumul après 12 mois.

3. La citerne pourra-t-elle être remplie, même en attendant très longtemps ?

Exercice 14 – Arithmétique contre géométrique

Deux ateliers démarrent à 400 pièces le premier mois. L'atelier A augmente de 40 pièces par mois, l'atelier B de 8% par mois.

1. Compare les productions du 6^{e} et du 12^{e} mois.

2. Compare les productions cumulées sur 12 mois.

Exercice 15 – Insérer des termes entre deux valeurs

La production d'un atelier doit passer de 5 à 80 unités par heure en quatre étapes égales. On envisage deux progressions : arithmétique ou géométrique.

1. Détermine les trois valeurs intermédiaires dans le cas arithmétique.

2. Détermine-les dans le cas géométrique.

3. Quelle progression est la plus douce au démarrage ?

Exercice 16 – Type bac : amortissement d'un équipement

Un équipement acheté 48 000 € perd 18% de sa valeur chaque année. L'entreprise provisionne chaque année une somme égale à la perte de valeur de l'année.

1. Exprime la valeur V_n après n années.

2. Calcule la perte de valeur de la première année, puis celle de la deuxième.

3. Montre que les pertes annuelles forment une suite géométrique.

4. Calcule le total provisionné sur 5 ans et vérifie la cohérence avec V_5.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Exercice 17 – Type bac : deux offres de financement

Pour financer une machine, deux plans sont proposés sur 10 ans. Plan A : 6 000 € la première année, puis 300 € de plus chaque année. Plan B : 5 200 € la première année, puis +7% chaque année.

1. Calcule le versement de la 10e année pour chaque plan.

2. Calcule le coût total de chaque plan.

3. Quel plan choisir, et quelle réserve formuler ?

Exercice 18 – Type bac : somme et algorithme

On considère la suite $u_n = 250 \times 0{,}9^{\,n}$ pour $n \geq 0$ (puissance résiduelle, en watts, d'un dispositif au jour n).

1. Écris la somme $S_N = u_0 + u_1 + \cdots + u_N$ avec le symbole Σ, puis avec la formule.

2. Calcule S_9 (dix premiers jours).

3. Écris un programme Python renvoyant S_N.

4. Vers quelle valeur S_N tend-il quand N grandit ?

Exercice 19 – Type bac : entretien d'un parc de machines

Un parc compte 600 machines. Chaque année, 15% des machines sont retirées du service et 60 machines neuves sont ajoutées. On note p_n le nombre de machines après n années, avec $p_0 = 600$.

1. Justifie que $p_{n+1} = 0{,}85\,p_n + 60$.

2. Calcule p_1, p_2 et p_3.

3. Montre que 400 est une valeur d'équilibre.

4. Décris l'évolution à long terme du parc.

Exercice 20 – Type bac : dosage répété d'un additif

Un bain de traitement reçoit 500 mL d'additif au départ. Chaque jour, 25% de l'additif présent est consommé, puis on en ajoute 100 mL. On note a_n le volume d'additif, en mL, après n jours.

1. Écris la relation de récurrence et calcule a_1, a_2.

2. Détermine le volume d'équilibre.

3. Le bain est correctement traité si le volume reste entre 380 et 520 mL. Le réglage est-il conforme ?

4. Quel ajout quotidien faudrait-il pour stabiliser le bain à 500 mL ?

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 – Arithmétique ou géométrique ?

Test arithmétique : on calcule les DIFFÉRENCES successives.

Relevé A : $255 - 240 = 15$, $270 - 255 = 15$, $285 - 270 = 15$. Différence constante : A est ARITHMÉTIQUE de raison $r = 15$.

Test géométrique : on calcule les QUOTIENTS successifs.

Relevé B : $\frac{1\,050}{1\,000} = 1{,}05$, $\frac{1\,102{,}5}{1\,050} = 1{,}05$, $\frac{1\,157{,}625}{1\,102{,}5} = 1{,}05$. B est GÉOMÉTRIQUE de raison $q = 1{,}05$ (hausse de 5% par mois).

Relevé C : différences 15, 20, 25 — non constantes. Quotients 1,25, 1,267, 1,263 — non constants non plus. C n'est NI arithmétique NI géométrique.

Remarque sur C : ce sont les différences qui augmentent de 5 à chaque fois. On rencontre ce type de suite en cumul (la somme des termes d'une suite arithmétique).

Réponse. A : arithmétique, $r = 15$ · B : géométrique, $q = 1{,}05$ · C : ni l'une ni l'autre.

Rappel de cours. Arithmétique : on AJOUTE r · géométrique : on MULTIPLIE par q. On teste sur tous les couples consécutifs disponibles.

Erreur fréquente. Conclure après un seul test : les quotients de C sont proches de 1,26 sans être égaux, ce qui pourrait faire croire à une suite géométrique.

Correction de l'exercice 2 – Terme général d'une suite arithmétique

Suite arithmétique de raison $r = 160$, de premier terme $u_1 = 1\,240$.

Comme la suite démarre au rang 1 : $u_n = u_1 + (n-1)r = 1\,240 + 160(n-1)$.

En développant : $u_n = 1\,240 + 160n - 160 = 1\,080 + 160n$.

Contrôle : $u_1 = 1\,080 + 160 = 1\,240$ ✔.

$u_{12} = 1\,080 + 1\,920 = 3\,000$ h exactement.

Dépassement de 3 000 h : $1\,080 + 160n > 3\,000$ donne $160n > 1\,920$, soit $n > 12$.

Le compteur dépasse donc 3 000 h au 13e relevé ($u_{13} = 3\,160$ h).

Réponse. $u_n = 1\,080 + 160n$ · $u_{12} = 3\,000$ h · dépassement au 13e relevé.

Rappel de cours. $u_n = u_1 + (n-1)r$ si la suite commence au rang 1 · $u_n = u_0 + nr$ si elle commence au rang 0.

Erreur fréquente. Écrire $u_n = 1\,240 + 160n$: on obtiendrait $u_1 = 1\,400$, soit un mois d'avance sur la réalité.

Correction de l'exercice 3 – Terme général d'une suite géométrique

Baisse de 12% : on multiplie par $1 - 0{,}12 = 0{,}88$ à chaque trimestre. Suite géométrique de raison $q = 0{,}88$.

$v_n = 5\,000 \times 0{,}88^{\,n}$.

Deux ans représentent 8 trimestres, donc on calcule v_8.

$0{,}88^{8} \approx 0{,}359\,634$, donc $v_8 \approx 5\,000 \times 0{,}359\,634 \approx 1\,798{,}2$.

Le stock est donc d'environ 1 798 pièces au bout de deux ans.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Contrôle d'ordre de grandeur : perdre 12% huit fois de suite revient à garder 36% du stock initial, soit un peu plus du tiers ✔.

Réponse. $v_n = 5\,000 \times 0{,}88^{\,n}$ · après 2 ans ($n = 8$), environ 1 798 pièces.

Rappel de cours. $v_n = v_0 \times q^{\,n}$. Une baisse de t% par période donne $q = 1 - \frac{t}{100}$.

Erreur fréquente. Compter 2 au lieu de 8 pour deux ans : la période de la suite est le TRIMESTRE, pas l'année.

Correction de l'exercice 4 – Somme des premiers entiers

$1 + 2 + \cdots + 50 = \dfrac{50 \times 51}{2} = \dfrac{2\,550}{2} = 1\,275.$

$1 + 2 + \cdots + 100 = \dfrac{100 \times 101}{2} = 5\,050.$

Pour la troisième somme, on retire de la somme jusqu'à 60 celle jusqu'à 19.

$1 + \cdots + 60 = \dfrac{60 \times 61}{2} = 1\,830$ et $1 + \cdots + 19 = \dfrac{19 \times 20}{2} = 190.$

Donc $20 + 21 + \cdots + 60 = 1\,830 - 190 = 1\,640$.

Contrôle par la formule des suites arithmétiques : il y a $60 - 20 + 1 = 41$ termes, de moyenne $\dfrac{20 + 60}{2} = 40$, donc $41 \times 40 = 1\,640$ ✔.

Réponse. 1 275 · 5 050 · 1 640.

Rappel de cours. $\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Pour une somme qui ne part pas de 1, on soustrait la partie manquante.

Erreur fréquente. Oublier le « +1 » dans le décompte des termes : de 20 à 60 il y a 41 termes, pas 40.

Correction de l'exercice 5 – Notation sigma

Pour A, on remplace k par 1, 2, 3, 4 puis 5 dans l'expression $2k + 1$.

$A = 3 + 5 + 7 + 9 + 11$.

Ce sont cinq termes d'une suite arithmétique de raison 2 : $A = 5 \times \dfrac{3 + 11}{2} = 5 \times 7 = 35$.

Pour B, on remplace k par 0 à 4 dans 3×2^k.

$B = 3 + 6 + 12 + 24 + 48 = 93$.

Ce sont cinq termes d'une suite géométrique de premier terme 3 et de raison 2.

Contrôle avec la formule de la somme géométrique : $3 \times \dfrac{1 - 2^5}{1 - 2} = 3 \times \dfrac{-31}{-1} = 93$ ✔.

Réponse. $A = 3 + 5 + 7 + 9 + 11 = 35$ · $B = 3 + 6 + 12 + 24 + 48 = 93$.

Rappel de cours. $\sum_{k=a}^{b} f(k)$: on additionne $f(k)$ pour k allant de a à b inclus, soit $b - a + 1$ termes.

Erreur fréquente. Démarrer B à $k = 1$: on oublierait le terme $3 \times 2^0 = 3$, et la somme tomberait à 90.

Correction de l'exercice 6 – Somme d'une suite arithmétique

Suite arithmétique : $u_1 = 120$, $r = 8$, donc $u_n = 120 + 8(n - 1)$.

$u_{20} = 120 + 8 \times 19 = 120 + 152 = 272$ pièces.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Somme des n premiers termes : $S = n \times \frac{u_1 + u_n}{2}$ — le nombre de termes multiplié par la MOYENNE du premier et du dernier.

$S = 20 \times \frac{120 + 272}{2} = 20 \times \frac{392}{2} = 20 \times 196 = 3\,920$ pièces.

Contrôle : la production moyenne est de 196 pièces par semaine, et $196 \times 20 = 3\,920$ ✔. Pour une suite arithmétique, la moyenne des termes est bien celle des extrêmes.

Interprétation : l'atelier a produit 3 920 pièces en 20 semaines, contre 2 400 s'il était resté à 120 par semaine — soit 1 520 pièces gagnées grâce à la montée en charge.

Réponse. $u_{20} = 272$ pièces · production totale $S = 3\,920$ pièces.

Rappel de cours. $S = n \times \frac{\text{premier} + \text{dernier}}{2}$: c'est l'astuce de Gauss, valable pour toute suite arithmétique.

Erreur fréquente. Multiplier le dernier terme par le nombre de semaines (272×20) : on obtiendrait 5 440, très au-dessus de la réalité.

Correction de l'exercice 7 – Somme d'une suite géométrique

Suite géométrique : $u_1 = 2\,000$ et $q = 1{,}06$, donc $u_n = 2\,000 \times 1{,}06^{n-1}$.

$u_{10} = 2\,000 \times 1{,}06^{9}$. Or $1{,}06^{9} \approx 1{,}689\,479$, donc $u_{10} \approx 3\,378{,}96$ €.

Somme de n termes d'une suite géométrique : $S = u_1 \times \frac{1 - q^{n}}{1 - q}$.

$S = 2\,000 \times \frac{1 - 1{,}06^{10}}{1 - 1{,}06}$. Or $1{,}06^{10} \approx 1{,}790\,847$.

$S \approx 2\,000 \times \frac{1 - 1{,}790\,847}{-0{,}06} = 2\,000 \times \frac{-0{,}790\,847}{-0{,}06} \approx 2\,000 \times 13{,}180\,8$.

$S \approx 26\,361{,}6$ €.

Contrôle d'ordre de grandeur : 10 versements compris entre 2 000 et 3 379 €, dont la moyenne est d'environ 2 636 € — cohérent avec un total de 26 362 € ✔.

Réponse. $u_{10} \approx 3\,379$ € · total versé $S \approx 26\,362$ €.

Rappel de cours. $S = u_1 \frac{1 - q^{n}}{1 - q}$ où n est le NOMBRE de termes additionnés ($q \neq 1$).

Erreur fréquente. Confondre l'exposant du terme général ($n - 1$) et celui de la somme (n) : ici $1{,}06^{9}$ pour le 10e versement, mais $1{,}06^{10}$ dans la somme.

Correction de l'exercice 8 – Moyenne arithmétique

Dans une suite arithmétique, chaque terme est la MOYENNE ARITHMÉTIQUE de ses voisins : $b = \frac{a + c}{2}$.

$b = \frac{46 + 78}{2} = \frac{124}{2} = 62$ °C.

Raison : $r = b - a = 62 - 46 = 16$ (et l'on vérifie $78 - 62 = 16$ ✔).

Relevé suivant : $78 + 16 = 94$ °C.

Pourquoi la moyenne ? Parce que $b = a + r$ et $c = b + r$, donc $a + c = (b - r) + (b + r) = 2b$: les raisons se compensent.

Réponse. $b = 62$ °C · raison $r = 16$ · relevé suivant 94 °C.

Rappel de cours. Suite arithmétique : $b = \frac{a + c}{2}$ — le terme du milieu est la moyenne

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

ARITHMÉTIQUE de ses voisins.

Erreur fréquente. Utiliser la moyenne géométrique $\sqrt{46 \times 78} \approx 59{,}9$: elle ne vaut que pour les suites géométriques.

Correction de l'exercice 9 – Moyenne géométrique et taux moyen

Il s'agit d'insérer un terme dans une suite GÉOMÉTRIQUE : la valeur intermédiaire est la moyenne géométrique des deux extrêmes, $\sqrt{a \times c}$.

$\sqrt{200 \times 242} = \sqrt{48\,400} = 220$ k€.

Taux annuel moyen : $\frac{220}{200} = 1{,}10$, soit +10%.

Vérification : $200 \to 220 \to 242$, et $\frac{242}{220} = 1{,}10$ ✔ deux hausses identiques de 10%.

Contrôle par le coefficient global : $\frac{242}{200} = 1{,}21$ et $\sqrt{1{,}21} = 1{,}10$ ✔ — la racine carrée du coefficient global donne bien le coefficient annuel.

À noter : la moyenne ARITHMÉTIQUE $\frac{200 + 242}{2} = 221$ k€ donnerait des hausses inégales (+10,5% puis +9,5%). Pour des évolutions en pourcentage, c'est la moyenne géométrique qui convient.

Réponse. Valeur intermédiaire $\sqrt{200 \times 242} = 220$ k€ · taux annuel moyen +10%.

Rappel de cours. Moyenne géométrique de a et c : $\sqrt{ac}$. C'est elle qui correspond à deux évolutions en pourcentage identiques.

Erreur fréquente. Prendre la moyenne arithmétique (221) : les deux taux obtenus ne seraient pas égaux, ce que l'énoncé demande.

Correction de l'exercice 10 – Retrouver une suite à partir de deux termes

On sait que $u_5 = u_2 \times q^3$ (trois pas entre les rangs 2 et 5).

$q^3 = \frac{151{,}875}{45} = 3{,}375$.

Or $1{,}5^3 = 3{,}375$, donc $q = 1{,}5$.

Pour u_0, on remonte de deux rangs : $u_2 = u_0 \times q^2$, donc $u_0 = \frac{45}{1{,}5^2} = \frac{45}{2{,}25} = 20$.

Contrôle : $20 \to 30 \to 45 \to 67{,}5 \to 101{,}25 \to 151{,}875$ ✔.

Somme des SIX termes (rangs 0 à 5) : $S = u_0 \times \frac{1 - q^6}{1 - q}$.

$1{,}5^6 = 11{,}390\,625$, donc $S = 20 \times \frac{1 - 11{,}390\,625}{1 - 1{,}5} = 20 \times \frac{-10{,}390\,625}{-0{,}5} = 20 \times 20{,}781\,25$.

$S = 415{,}625$.

Contrôle par addition directe : $20 + 30 + 45 + 67{,}5 + 101{,}25 + 151{,}875 = 415{,}625$ ✔.

Réponse. $q = 1{,}5$ · $u_0 = 20$ · $S = 415{,}625$.

Rappel de cours. $u_{n+k} = u_n \times q^k$: on compte les PAS entre les deux rangs, ici $5 - 2 = 3$.

Erreur fréquente. Additionner 6 termes avec l'exposant 5 dans la formule : la somme des rangs 0 à 5 compte SIX termes, donc q^6.

Correction de l'exercice 11 – Production cumulée

Production du mois n : $u_n = 1\,500 + 75(n - 1) = 1\,425 + 75n$.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Production cumulée : $S_n = n \times \dfrac{u_1 + u_n}{2} = n \times \dfrac{1\,500 + 1\,425 + 75n}{2} = n \times \dfrac{2\,925 + 75n}{2}$.

On peut simplifier : $S_n = \dfrac{75n^2 + 2\,925n}{2} = 37{,}5n^2 + 1\,462{,}5n$.

Contrôle : $S_1 = 37{,}5 + 1\,462{,}5 = 1\,500$ ✔ et $S_2 = 150 + 2\,925 = 3\,075 = 1\,500 + 1\,575$ ✔.

On cherche le premier n tel que $S_n \geq 30\,000$. On teste quelques valeurs.

$S_{15} = 37{,}5 \times 225 + 1\,462{,}5 \times 15 = 8\,437{,}5 + 21\,937{,}5 = 30\,375$: la commande est honorée.

$S_{14} = 37{,}5 \times 196 + 1\,462{,}5 \times 14 = 7\,350 + 20\,475 = 27\,825$: insuffisant.

La commande est donc honorée au bout de 15 mois.

Comparaison utile : sans montée en charge (1 500 par mois), il aurait fallu 20 mois. L'augmentation de 75 pièces par mois fait gagner 5 mois.

Réponse. $u_n = 1\,425 + 75n$ et $S_n = 37{,}5n^2 + 1\,462{,}5n$ · commande honorée au bout de 15 mois ($S_{15} = 30\,375$).

Rappel de cours. La somme des termes d'une suite arithmétique est une expression du SECOND DEGRÉ en n : la croissance du cumul s'accélère.

Erreur fréquente. Diviser 30 000 par la production du premier mois : on annoncerait 20 mois, en ignorant la montée en charge.

Correction de l'exercice 12 – Épargne à intérêts composés

Chaque année, le capital est multiplié par 1,035 : suite géométrique de raison $q = 1{,}035$.

$C_n = 15\,000 \times 1{,}035^{\,n}$.

$1{,}035^{\,8} \approx 1{,}316\,809$, donc $C_8 \approx 15\,000 \times 1{,}316\,809 \approx 19\,752{,}1$ €.

Pour dépasser 20 000 € : on cherche n tel que $1{,}035^{\,n} > \dfrac{20\,000}{15\,000} \approx 1{,}333\,3$.

Balayage : $1{,}035^{\,8} \approx 1{,}3168$ (insuffisant) ; $1{,}035^{\,9} \approx 1{,}362\,9$ (suffisant).

Le capital dépasse 20 000 € au bout de 9 ans : $C_9 \approx 15\,000 \times 1{,}362\,9 \approx 20\,443{,}4$ €.

Remarque : les intérêts de la 9e année valent environ 691 €, contre 525 € la première année (3,5% de 15 000). C'est l'effet des intérêts composés : les intérêts produisent eux-mêmes des intérêts.

Réponse. $C_n = 15\,000 \times 1{,}035^{\,n}$ · $C_8 \approx 19\,752$ € · dépassement des 20 000 € au bout de 9 ans.

Rappel de cours. Intérêts composés ⇒ suite GÉOMÉTRIQUE. Les intérêts simples, eux, donneraient une suite arithmétique.

Erreur fréquente. Calculer $15\,000 + 8 \times 525 = 19\,200$ € (intérêts simples) : on sous-estime de 552 € le capital réel.

Correction de l'exercice 13 – Combien de termes pour atteindre un total ?

Volume du mois n : suite géométrique $u_n = 800 \times 0{,}95^{\,n-1}$.

Volume cumulé sur n mois : $S_n = 800 \times \dfrac{1 - 0{,}95^{\,n}}{1 - 0{,}95} = 800 \times \dfrac{1 - 0{,}95^{\,n}}{0{,}05}$.

Soit $S_n = 16\,000(1 - 0{,}95^{\,n})$.

Pour $n = 12$: $0{,}95^{12} \approx 0{,}540\,360$, donc $S_{12} \approx 16\,000 \times 0{,}459\,64 \approx 7\,354{,}2$ L.

La citerne n'est pas encore pleine au bout d'un an (7 354 L sur 9 000 L).

Pour la dernière question, observons la forme de $S_n = 16\,000(1 - 0{,}95^{\,n})$: comme $0{,}95^{\,n}$

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

tend vers 0, le cumul se rapproche de 16 000 L sans jamais l'atteindre.

Or 9 000 < 16 000 : la citerne peut donc être remplie. On cherche quand.

$16\,000(1-0{,}95^{n}) \geq 9\,000$ donne $1-0{,}95^{n} \geq 0{,}5625$, soit $0{,}95^{n} \leq 0{,}4375$.

Balayage : $0{,}95^{16} \approx 0{,}440\,1$ (insuffisant) ; $0{,}95^{17} \approx 0{,}418\,1$ (suffisant).

La citerne sera pleine au bout de 17 mois.

Remarque importante : si la citerne contenait 18 000 L, elle ne pourrait JAMAIS être remplie — le cumul est majoré par 16 000 L. Une suite géométrique décroissante a une somme bornée.

Réponse. $u_n = 800 \times 0{,}95^{n-1}$ et $S_n = 16\,000(1-0{,}95^{n}) \cdot S_{12} \approx 7\,354$ L · citerne pleine au bout de 17 mois (le cumul est plafonné à 16 000 L).

Rappel de cours. Pour $0 < q < 1$, la somme $u_1\dfrac{1-q^n}{1-q}$ tend vers $\dfrac{u_1}{1-q}$: le cumul est BORNÉ.

Erreur fréquente. Croire qu'un cumul croissant finit toujours par dépasser n'importe quel seuil : ici la limite est 16 000 L, pas l'infini.

Correction de l'exercice 14 – Arithmétique contre géométrique

Atelier A : $a_n = 400 + 40(n-1)$. Atelier B : $b_n = 400 \times 1{,}08^{n-1}$.

6e mois : $a_6 = 400 + 200 = 600$ pièces ; $b_6 = 400 \times 1{,}08^{5} \approx 400 \times 1{,}469\,3 \approx 587{,}7$ pièces.

À ce stade, A est devant (de 12 pièces environ).

12e mois : $a_{12} = 400 + 440 = 840$ pièces ; $b_{12} = 400 \times 1{,}08^{11} \approx 400 \times 2{,}331\,6 \approx 932{,}6$ pièces.

Le classement s'est INVERSÉ : B dépasse A de près de 93 pièces.

Cumul de A : $S_A = 12 \times \dfrac{400+840}{2} = 12 \times 620 = 7\,440$ pièces.

Cumul de B : $S_B = 400 \times \dfrac{1-1{,}08^{12}}{1-1{,}08}$. Or $1{,}08^{12} \approx 2{,}518\,170$.

$S_B \approx 400 \times \dfrac{-1{,}518\,17}{-0{,}08} = 400 \times 18{,}977\,1 \approx 7\,590{,}9$ pièces.

Sur l'année, B produit donc environ 151 pièces de plus que A, malgré son retard des premiers mois.

Moralité : une croissance en POURCENTAGE finit toujours par dépasser une croissance en QUANTITÉ FIXE. Le cumul suit, avec un temps de retard.

Réponse. 6e mois : 600 pour A contre ≈ 588 pour B · 12e mois : 840 contre ≈ 933 · cumuls sur 12 mois : 7 440 contre ≈ 7 591 pièces.

Rappel de cours. Croissance géométrique ($q > 1$) contre arithmétique : la géométrique gagne toujours à long terme, mais peut être en retard au début.

Erreur fréquente. Comparer les raisons 40 et 8% : ce sont des grandeurs de natures différentes, seuls les termes calculés sont comparables.

Correction de l'exercice 15 – Insérer des termes entre deux valeurs

Cas arithmétique : il y a 4 pas entre $u_0 = 5$ et $u_4 = 80$, donc $80 = 5 + 4r$.

$4r = 75$, soit $r = 18{,}75$.

Les valeurs intermédiaires sont 23,75 ; 42,5 ; 61,25.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Cas géométrique : $80 = 5\,q^4$, donc $q^4 = 16$.

Comme $2^4 = 16$, on a $q = 2$ (la raison étant positive).

Les valeurs intermédiaires sont 10 ; 20 ; 40.

Comparaison du démarrage : la progression arithmétique impose un bond de 5 à 23,75 (soit +375%) dès la première étape, alors que la géométrique passe de 5 à 10 (+100%).

La progression GÉOMÉTRIQUE est donc beaucoup plus douce au démarrage — mais elle exige un bond final de 40 à 80, soit +40 unités d'un coup, contre +18,75 pour l'arithmétique.

Conclusion de gestion : la géométrique convient à une montée en charge progressive (chaque étape demande le même EFFORT RELATIF), l'arithmétique à un ajout régulier de moyens.

Contrôle : les deux suites relient bien 5 à 80 ✔, et leurs valeurs intermédiaires diffèrent nettement (42,5 contre 20 au milieu).

Réponse. Arithmétique ($r = 18{,}75$) : 23,75 ; 42,5 ; 61,25 · géométrique ($q = 2$) : 10 ; 20 ; 40 · la géométrique est plus douce au démarrage.

Rappel de cours. Insérer n termes : $u_{n+1} = u_0 + (n+1)r$ en arithmétique, $u_{n+1} = u_0 q^{n+1}$ en géométrique.

Erreur fréquente. Diviser l'écart 75 par 3 (le nombre de termes insérés) : il y a 4 PAS entre 5 et 80, pas 3.

Correction de l'exercice 16 – Type bac : amortissement d'un équipement

$V_n = 48\,000 \times 0{,}82^{\,n}$.

Perte de la première année : $V_0 - V_1 = 48\,000 - 48\,000 \times 0{,}82 = 48\,000 \times 0{,}18 = 8\,640$ €.

Perte de la deuxième année : $V_1 - V_2 = 39\,360 - 32\,275{,}2 = 7\,084{,}8$ €.

On remarque que $\dfrac{7\,084{,}8}{8\,640} = 0{,}82$: les pertes sont multipliées par 0,82 d'une année sur l'autre.

Démonstration générale : la perte de l'année n vaut $V_{n-1} - V_n = V_{n-1}(1 - 0{,}82) = 0{,}18\,V_{n-1}$. Comme (V_n) est géométrique de raison 0,82, les pertes le sont aussi, avec la même raison.

Total provisionné sur 5 ans : somme de 5 termes de premier terme 8 640 et de raison 0,82.

$S = 8\,640 \times \dfrac{1 - 0{,}82^5}{1 - 0{,}82}$. Or $0{,}82^5 \approx 0{,}370\,740$.

$S \approx 8\,640 \times \dfrac{0{,}629\,26}{0{,}18} \approx 8\,640 \times 3{,}495\,9 \approx 30\,204{,}5$ €.

Vérification : $V_5 = 48\,000 \times 0{,}370\,740 \approx 17\,795{,}5$ €, et $48\,000 - 17\,795{,}5 = 30\,204{,}5$ € ✔ — le total provisionné est exactement la valeur perdue.

C'est le contrôle décisif : la somme des pertes annuelles doit reconstituer la différence entre la valeur d'achat et la valeur résiduelle.

Réponse. $V_n = 48\,000 \times 0{,}82^{\,n}$ · pertes de 8 640 € puis 7 084,80 €, suite géométrique de raison 0,82 · total provisionné ≈ 30 204,50 €, soit exactement $48\,000 - V_5$ ✔.

Rappel de cours. Si (V_n) est géométrique de raison q, la suite des écarts $V_{n-1} - V_n$ est géométrique de MÊME raison.

Erreur fréquente. Provisionner $5 \times 8\,640 = 43\,200$ € : cela supposerait une perte constante, alors qu'elle diminue chaque année.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Correction de l’exercice 17 – Type bac : deux offres de financement

Plan A (arithmétique) : $a_n = 6\,000 + 300(n-1)$, donc $a_{10} = 6\,000 + 2\,700 = 8\,700$ €.

Plan B (géométrique) : $b_n = 5\,200 \times 1{,}07^{\,n-1}$, donc $b_{10} = 5\,200 \times 1{,}07^{9}$.

$1{,}07^{9} \approx 1{,}838\,459$, donc $b_{10} \approx 9\,560{,}0$ €.

Coût total de A : $S_A = 10 \times \dfrac{6\,000 + 8\,700}{2} = 10 \times 7\,350 = 73\,500$ €.

Coût total de B (somme de 10 termes géométriques) : $S_B = 5\,200 \times \dfrac{1 - 1{,}07^{10}}{1 - 1{,}07}$.

$1{,}07^{10} \approx 1{,}967\,151$, donc $S_B \approx 5\,200 \times \dfrac{-0{,}967\,151}{-0{,}07} \approx 5\,200 \times 13{,}816\,4 \approx 71\,845{,}4$ €.

Comparaison : 71 845 € pour B contre 73 500 € pour A, soit environ 1 655 € d’économie avec le plan B.

Le plan B est donc moins coûteux au total, bien que ses derniers versements soient plus élevés (9 560 € contre 8 700 €).

Réserve à formuler : le plan B concentre l’effort sur la fin. Si la trésorerie est tendue dans les dernières années, ou si le plan doit être prolongé au-delà de 10 ans, A devient préférable — sur 12 ans, B coûterait déjà plus cher.

Contrôle : versement moyen de A = 7 350 € ; celui de B = $\frac{71\,845}{10} \approx 7\,185$ € ✔ cohérent avec des versements allant de 5 200 à 9 560 €.

Réponse. $a_{10} = 8\,700$ € et $b_{10} \approx 9\,560$ € · totaux : 73 500 € (A) contre ≈ 71 845 € (B) · B est moins cher de ≈ 1 655 €, mais concentre l’effort sur les dernières années.

Rappel de cours. Comparer deux plans : on additionne les versements avec la formule de somme adaptée (arithmétique ou géométrique), pas seulement le dernier terme.

Erreur fréquente. Comparer les derniers versements : B a le versement final le plus élevé mais le coût total le plus faible.

Correction de l’exercice 18 – Type bac : somme et algorithme

Notation sigma : $S_N = \sum_{k=0}^{N} 250 \times 0{,}9^{\,k}$.

La somme comporte $N+1$ termes (de $k=0$ à $k=N$), donc
$S_N = 250 \times \dfrac{1 - 0{,}9^{\,N+1}}{1 - 0{,}9} = 2\,500(1 - 0{,}9^{\,N+1})$.

Pour $N = 9$: $S_9 = 2\,500(1 - 0{,}9^{10})$. Or $0{,}9^{10} \approx 0{,}348\,678$.

$S_9 \approx 2\,500 \times 0{,}651\,322 \approx 1\,628{,}3$ Wh (en sommant des puissances journalières, on obtient une énergie).

Programme Python, par accumulation :

```
def S(N):
    total = 0
    for k in range(N+1):
        total = total + 250 * 0.9**k
    return total
```

Le `range(N+1)` est essentiel : il fait parcourir $k = 0$ à $k = N$ inclus, soit les $N+1$ termes de la somme.

Limite : $0{,}9^{\,N+1}$ tend vers 0 quand N grandit, donc S_N tend vers 2 500.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s’expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

Le total cumulé plafonne donc à 2 500 Wh, quel que soit le temps d'attente. Contrôle : $S_{50} \approx 2\,500(1 - 0{,}9^{51}) \approx 2\,488$ Wh, déjà très proche.

Réponse. $S_N = \sum_{k=0}^{N} 250 \times 0{,}9^k = 2\,500(1 - 0{,}9^{N+1})$ · $S_9 \approx 1\,628{,}3$ · boucle `for k in range(N+1)` · S_N tend vers 2 500.

Rappel de cours. $\sum_{k=0}^{N}$ compte $N + 1$ termes : l'exposant de la formule de somme est donc $N + 1$, pas N.

Erreur fréquente. Écrire $S_9 = 2\,500(1 - 0{,}9^9)$: il y a DIX termes du rang 0 au rang 9, donc l'exposant est 10.

Correction de l'exercice 19 – Type bac : entretien d'un parc de machines

Retirer 15% revient à garder 85% du parc, soit $0{,}85\,p_n$ machines. On ajoute ensuite les 60 neuves : $p_{n+1} = 0{,}85\,p_n + 60$ ✔.

$p_1 = 0{,}85 \times 600 + 60 = 510 + 60 = 570$ machines.

$p_2 = 0{,}85 \times 570 + 60 = 484{,}5 + 60 = 544{,}5$, soit environ 545 machines.

$p_3 = 0{,}85 \times 544{,}5 + 60 = 462{,}825 + 60 = 522{,}825$, soit environ 523 machines.

Équilibre : on teste $p_n = 400$. Alors $p_{n+1} = 0{,}85 \times 400 + 60 = 340 + 60 = 400$ ✔ La valeur se reproduit à l'identique.

Interprétation : à 400 machines, on en retire 15% soit 60 — exactement le nombre de machines ajoutées. Les deux flux se compensent.

Évolution à long terme : on part de 600 > 400 et les termes calculés décroissent ($600 > 570 > 544{,}5 > 522{,}8$). Le parc diminue donc vers 400 machines, sans descendre en dessous.

Quelques termes plus loin : $p_{10} \approx 439{,}4$ et $p_{20} \approx 407{,}8$ — le parc se stabilise bien autour de 400 machines.

Conséquence de gestion : pour maintenir un parc de 600 machines, il faudrait acheter $0{,}15 \times 600 = 90$ machines par an, et non 60.

Réponse. $p_{n+1} = 0{,}85\,p_n + 60$ · $p_1 = 570$, $p_2 \approx 545$, $p_3 \approx 523$ · 400 est un équilibre ($0{,}85 \times 400 + 60 = 400$) · le parc décroît vers 400 machines.

Rappel de cours. Une valeur d'équilibre ℓ vérifie $\ell = 0{,}85\ell + 60$: ce qui entre compense exactement ce qui sort.

Erreur fréquente. Croire que le parc s'effondre parce qu'on retire 15% par an : les 60 machines neuves stabilisent l'effectif à 400.

Correction de l'exercice 20 – Type bac : dosage répété d'un additif

Consommer 25% laisse 75% de l'additif, soit $0{,}75\,a_n$; puis on ajoute 100 mL : $a_{n+1} = 0{,}75\,a_n + 100$.

$a_1 = 0{,}75 \times 500 + 100 = 375 + 100 = 475$ mL.

$a_2 = 0{,}75 \times 475 + 100 = 356{,}25 + 100 = 456{,}25$ mL.

Équilibre : on cherche ℓ tel que $\ell = 0{,}75\ell + 100$, soit $0{,}25\ell = 100$ et $\ell = 400$ mL.

Évolution : partant de 500 > 400, la suite décroît vers 400 mL (les termes calculés le confirment : $500 > 475 > 456{,}25$).

Le volume reste donc compris entre 400 (limite basse, non atteinte) et 500 mL (valeur initiale).

Comme [400 ; 500] est inclus dans [380 ; 520], le réglage est CONFORME : le bain reste

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).

dans la plage acceptable à tout instant.

Dernière question : pour stabiliser à 500 mL, il faut que l'ajout compense la consommation, c'est-à-dire $0{,}25 \times 500 = 125$ mL par jour.

Vérification : $0{,}75 \times 500 + 125 = 375 + 125 = 500$ ✔ le volume se reproduit.

Lecture générale : le volume d'équilibre est $\dfrac{\text{ajout}}{\text{taux de consommation}}$, ici $\dfrac{100}{0{,}25} = 400$ mL. Augmenter l'ajout de 25% relève l'équilibre de 25%.

Réponse. $a_{n+1} = 0{,}75\,a_n + 100 \cdot a_1 = 475$ mL, $a_2 = 456{,}25$ mL · équilibre à 400 mL · réglage conforme (volume toujours dans $[400\,;500]$) · il faudrait 125 mL par jour pour stabiliser à 500 mL.

Rappel de cours. Volume d'équilibre $= \dfrac{\text{apport par période}}{\text{taux de disparition}}$: ici $\dfrac{100}{0{,}25} = 400$ mL.

Erreur fréquente. Conclure que le bain se vide : la consommation porte sur le volume présent, elle diminue quand le volume baisse, d'où la stabilisation.

mathlvl.fr — Tous droits réservés. Toute reproduction, diffusion, revente ou exploitation commerciale, même partielle, est strictement interdite.
Tout contrevenant s'expose à des poursuites en vertu du Code de la propriété intellectuelle (art. L.335-2 et suivants).