

Fonction inverse — Terminale STMG

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

Partager une somme entre n personnes, répartir des coûts fixes sur une production, calculer la durée d'un trajet selon la vitesse : chaque fois, une quantité divise un montant, et la fonction inverse $x \mapsto \frac{1}{x}$ entre en jeu. Ces 20 exercices corrigés couvrent tout le chapitre de Terminale STMG : images et ordres de grandeur, comportement près de 0 et à l'infini, dérivée $-\frac{1}{x^2}$ et sens de variation, tangentes, puis l'étude de fonctions comme $x + \frac{9}{x}$ et la recherche du coût moyen minimal. Les derniers exercices sont des problèmes complets de type bac.

Version en ligne, avec les corrections dépliantes :
mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-stmg/fonction-inverse

Exercice 1 - Calculer des images

Soit $f(x) = \frac{1}{x}$. Calcule $f(5)$, $f(-0,5)$, $f(0,25)$ et $f\left(\frac{2}{3}\right)$.

Exercice 2 - Ensemble de définition et équations

Donne l'ensemble de définition de la fonction inverse, puis résous $\frac{1}{x} = 4$, $\frac{1}{x} = -0,2$ et $\frac{1}{x} = 0$.

Exercice 3 - Des ordres de grandeur

Calcule l'inverse de 10^4 , de 0,0001 et de 5×10^{-3} . Que devient l'inverse d'un nombre positif très grand ? très petit ?

Exercice 4 - Des points sur l'hyperbole

Les points $A(5 ; 0,2)$, $B(-4 ; 0,25)$ et $C(0,1 ; 10)$ sont-ils sur la courbe de la fonction inverse ?

Exercice 5 - Une somme partagée

Un gain de 900 € est partagé à parts égales entre n personnes. Exprime la part $p(n)$ de chacune, calcule-la pour 3, 6 et 30 personnes, puis décris ce qui se passe quand n double.

Exercice 6 - Des nombres dérivés

Soit $f(x) = \frac{1}{x}$. Calcule $f(2)$, $f(-1)$ et $f(0,1)$, puis explique pourquoi ils sont tous négatifs.

Exercice 7 - Une équation de tangente

Détermine une équation de la tangente à la courbe de $f(x) = \frac{1}{x}$ au point d'abscisse 3.

Exercice 8 - Le sens de variation et son piège

Donne le sens de variation de la fonction inverse. Peut-on dire qu'elle est décroissante sur $] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty [$?

Exercice 9 - Dériver des combinaisons

Calcule la dérivée de $f(x) = 3x + \frac{2}{x}$, de $g(x) = x^2 - \frac{5}{x}$ et de $h(x) = x^3 + 4 + \frac{1}{x}$ sur $] 0 ; +\infty [$.

Exercice 10 - Les asymptotes

Soit $g(x) = \frac{5}{x}$ sur $] 0 ; +\infty [$. Calcule $g(0,001)$ et $g(1000)$, puis décris les deux asymptotes de sa courbe.

Exercice 11 - Encadrer un inverse

On sait que $4 \leq x \leq 8$. Encadre $\frac{1}{x}$, puis $\frac{20}{x}$.

Exercice 12 - Étudier $2x + 18/x$

Soit $f(x) = 2x + \frac{18}{x}$ sur $] 0 ; +\infty [$. Étudie ses variations et donne son minimum.

Exercice 13 - Avec un carré

Soit $f(x) = x^2 + \frac{54}{x}$ sur $] 0 ; +\infty [$. Montre que $f(x) = \frac{2x^3 - 54}{x^2}$, puis détermine le minimum de f .

Exercice 14 - Le coût moyen minimal

Le coût total de production de q objets est $C(q) = q^2 + 40q + 1600$ euros. Détermine la production qui minimise le coût moyen $C_M(q) = \frac{C(q)}{q}$, et ce coût.

Exercice 15 - Le prix par personne

Une salle se loue 1500 € pour une soirée, et le traiteur facture 20 € par invité. Exprime le prix par invité $p(n)$ pour n invités. Combien faut-il d'invités pour que ce prix ne dépasse pas 65 € ?

Exercice 16 - Une pente imposée

En quels points de la courbe de $f(x) = \frac{1}{x}$ la tangente a-t-elle pour coefficient directeur -4 ?

Exercice 17 - Une inéquation

Résous l'inéquation $\frac{3}{x} \geq 0,5$ sur $]0; +\infty[$.

Exercice 18 - Un enclos le long d'un mur

On veut clôturer un enclos rectangulaire de 50 m^2 adossé à un mur : seuls trois côtés sont grillagés. On note x la profondeur de l'enclos (en m).

1. Montre que la longueur de grillage est $L(x) = 2x + \frac{50}{x}$.
2. Détermine les dimensions qui minimisent la longueur de grillage.

Exercice 19 - Coût moyen ou bénéfice ?

On reprend $C(q) = q^2 + 40q + 1600$, dont le coût moyen est minimal pour $q = 40$. Chaque objet est vendu 150 €.

1. Montre que le bénéfice est $B(q) = -q^2 + 110q - 1600$.
2. Détermine la production qui maximise le bénéfice et compare avec $B(40)$.

Exercice 20 - Problème : la vitesse la plus économique

Un camion parcourt 400 km à la vitesse v (en km/h), avec $40 \leq v \leq 110$. Le coût du trajet est $C(v) = 2v + \frac{12\,800}{v}$ euros : $\frac{12\,800}{v}$ pour le salaire du chauffeur, $2v$ pour le carburant.

1. Explique pourquoi le salaire est représenté par un terme en $\frac{1}{v}$.
2. Dresse le tableau de variations de C sur $[40; 110]$.
3. Quelle vitesse faut-il conseiller ?

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 - Calculer des images

$$f(5) = \frac{1}{5} = 0,2 \text{ et } f(-0,5) = \frac{1}{-0,5} = -2.$$

$$f(0,25) = \frac{1}{0,25} = 4.$$

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{3}{2} = 1,5 : \text{l'inverse d'une fraction s'obtient en la retournant.}$$

Réponse. 0,2 ; -2 ; 4 ; 1,5.

Rappel de cours. $\frac{1}{x}$ a le signe de x , et l'inverse de $\frac{a}{b}$ est $\frac{b}{a}$.

Correction de l'exercice 2 - Ensemble de définition et équations

On ne divise pas par 0 : la fonction inverse est définie sur $] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty[$.

$$\frac{1}{x} = 4 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4} = 0,25 ; \frac{1}{x} = -0,2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{-0,2} = -5.$$

$$\frac{1}{x} = 0 \text{ n'a aucune solution : un quotient de numérateur 1 n'est jamais nul.}$$

Réponse. $\mathbb{R}$ privé de 0 ; $x = 0,25$; $x = -5$; aucune solution.

Correction de l'exercice 3 - Des ordres de grandeur

$$\frac{1}{10^4} = 10^{-4} \text{ et } \frac{1}{0,0001} = \frac{1}{10^{-4}} = 10^4.$$

$$\frac{1}{5 \times 10^{-3}} = 0,2 \times 10^3 = 200.$$

L'inverse d'un nombre positif très grand est très proche de 0 ; l'inverse d'un nombre positif très proche de 0 est très grand.

Réponse. 10^{-4} ; 10^4 ; 200.

Correction de l'exercice 4 - Des points sur l'hyperbole

Un point $(x; y)$ est sur l'hyperbole si et seulement si $x \times y = 1$.

$5 \times 0,2 = 1$: A est sur la courbe ; $0,1 \times 10 = 1$: C aussi.

$-4 \times 0,25 = -1 \neq 1$: B n'y est pas (le point d'abscisse -4 a pour ordonnée -0,25).

Réponse. A et C oui ; B non.

Correction de l'exercice 5 - Une somme partagée

$$p(n) = \frac{900}{n} : p(3) = 300 \text{ €}, p(6) = 150 \text{ €} \text{ et } p(30) = 30 \text{ €}.$$

$$p(2n) = \frac{900}{2n} = \frac{p(n)}{2} : \text{quand le nombre de personnes double, la part est divisée par 2.}$$

La part et le nombre de personnes sont inversement proportionnels.

Réponse. 300 € ; 150 € ; 30 € ; la part est divisée par 2.

Correction de l'exercice 6 - Des nombres dérivés

$$f(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

$$f(2) = -\frac{1}{4} = -0,25 ; f(-1) = -1 ; f(0,1) = -\frac{1}{0,01} = -100.$$

Un carré non nul est positif, donc $-\frac{1}{x^2}$ est toujours négatif. Près de 0, la pente est très forte.

Réponse. $-0,25 ; -1 ; -100$.

Rappel de cours. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ et $\left(\frac{k}{x}\right)' = -\frac{k}{x^2}$.

Correction de l'exercice 7 - Une équation de tangente

$$f(3) = \frac{1}{3} \text{ et } f'(3) = -\frac{1}{9}.$$

$$y = f'(3)(x - 3) + f(3) = -\frac{1}{9}(x - 3) + \frac{1}{3} = -\frac{x}{9} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3}.$$

$$\text{Donc } y = -\frac{x}{9} + \frac{2}{3}. \text{ Vérification : pour } x = 3, y = -\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Réponse. $y = -\frac{x}{9} + \frac{2}{3}$.

Correction de l'exercice 8 - Le sens de variation et son piège

$f(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$: f est strictement décroissante sur $] -\infty ; 0[$ et strictement décroissante sur $] 0 ; +\infty[$.

Mais pas sur la réunion : $-1 < 1$ et pourtant $f(-1) = -1 < f(1) = 1$.

La décroissance vaut sur chaque intervalle séparément ; d'une branche à l'autre, la courbe « remonte ».

Réponse. Décroissante sur chacun des deux intervalles, mais pas sur leur réunion.

Erreur fréquente. Conclure à une décroissance « sur $\mathbb{R}^*$ » parce que la dérivée est négative.

Correction de l'exercice 9 - Dériver des combinaisons

$$f(x) = 3 - \frac{2}{x^2}.$$

$$g'(x) = 2x - 5 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 2x + \frac{5}{x^2} : \text{attention aux deux signes moins.}$$

$$h'(x) = 3x^2 - \frac{1}{x^2}.$$

Réponse. $3 - \frac{2}{x^2} ; 2x + \frac{5}{x^2} ; 3x^2 - \frac{1}{x^2}$.

Correction de l'exercice 10 - Les asymptotes

$$g(0,001) = 5000 \text{ et } g(1000) = 0,005.$$

Quand x se rapproche de 0, $g(x)$ devient aussi grand que l'on veut : la courbe longe l'axe des ordonnées, asymptote verticale.

Quand x devient très grand, $g(x)$ se rapproche de 0 en restant positif : l'axe des abscisses

est asymptote horizontale.

Réponse. 5000 ; 0,005 ; asymptotes : les deux axes.

Correction de l'exercice 11 - Encadrer un inverse

La fonction inverse est décroissante sur $]0 ; +\infty[$: elle inverse l'ordre.

Donc $\frac{1}{8} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{4}$, soit $0,125 \leq \frac{1}{x} \leq 0,25$.

En multipliant par $20 > 0$: $2,5 \leq \frac{20}{x} \leq 5$.

Réponse. $0,125 \leq \frac{1}{x} \leq 0,25$ et $2,5 \leq \frac{20}{x} \leq 5$.

Correction de l'exercice 12 - Étudier $2x + 18/x$

$$f(x) = 2 - \frac{18}{x^2} = \frac{2x^2 - 18}{x^2} = \frac{2(x-3)(x+3)}{x^2}.$$

Sur $]0 ; +\infty[$, $x^2 > 0$ et $x+3 > 0$: $f(x)$ a le signe de $x-3$.

f est décroissante sur $]0 ; 3]$, croissante sur $[3 ; +\infty[$, et son minimum vaut $f(3) = 6 + 6 = 12$.

Contrôle : $f(1) = 20$ et $f(6) = 15$.

Réponse. Minimum 12, atteint en $x = 3$.

Rappel de cours. On réduit la dérivée au même dénominateur $x^2 > 0$: elle a le signe du numérateur.

Correction de l'exercice 13 - Avec un carré

$$f(x) = 2x - \frac{54}{x^2} = \frac{2x^3 - 54}{x^2}.$$

$2x^3 - 54 > 0 \Leftrightarrow x^3 > 27 \Leftrightarrow x > 3$, car la fonction cube est croissante et $3^3 = 27$.

f décroît sur $]0 ; 3]$ puis croît : son minimum vaut $f(3) = 9 + 18 = 27$.

Réponse. Minimum 27, atteint en $x = 3$.

Correction de l'exercice 14 - Le coût moyen minimal

$$C_M(q) = q + 40 + \frac{1600}{q}.$$

$$C_M'(q) = 1 - \frac{1600}{q^2} = \frac{(q-40)(q+40)}{q^2}, \text{ du signe de } q-40 \text{ pour } q > 0.$$

Le coût moyen est minimal pour 40 objets : $C_M(40) = 40 + 40 + 40 = 120$ € par objet.

Contrôle : $C_M(10) = 210$ € et $C_M(80) = 140$ €.

Réponse. 40 objets, pour un coût moyen de 120 €.

Correction de l'exercice 15 - Le prix par personne

$p(n) = 20 + \frac{1500}{n}$: la location est partagée, le repas ne l'est pas.

$$20 + \frac{1500}{n} \leq 65 \Leftrightarrow \frac{1500}{n} \leq 45 \Leftrightarrow n \geq \frac{1500}{45} \approx 33,3.$$

Il faut au moins 34 invités. Par exemple $p(30) = 70$ € et $p(34) \approx 64,12$ €.

Réponse. $p(n) = 20 + \frac{1500}{n}$; au moins 34 invités.

Correction de l'exercice 16 - Une pente imposée

On résout $f(a) = -4$: $-\frac{1}{a^2} = -4 \Leftrightarrow a^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow a = 0,5$ ou $a = -0,5$.

Les points de contact sont $(0,5; 2)$ et $(-0,5; -2)$, symétriques par rapport à l'origine.

Les tangentes ont pour équations $y = -4x + 4$ et $y = -4x - 4$.

Réponse. Aux points $(0,5; 2)$ et $(-0,5; -2)$.

Correction de l'exercice 17 - Une inéquation

Pour $x > 0$, on peut multiplier par x sans changer le sens : $3 \geq 0,5x \Leftrightarrow x \leq 6$.

Avec la condition $x > 0$, l'ensemble des solutions est $]0; 6]$.

Contrôle : la fonction $x \mapsto \frac{3}{x}$ est décroissante et vaut 0,5 en $x = 6$.

Réponse. $]0; 6]$.

Correction de l'exercice 18 - Un enclos le long d'un mur

Le côté parallèle au mur mesure $\frac{50}{x}$; on grille deux profondeurs et ce côté :

$$L(x) = 2x + \frac{50}{x}.$$

$$L'(x) = 2 - \frac{50}{x^2} = \frac{2(x-5)(x+5)}{x^2}, \text{ du signe de } x-5 \text{ pour } x > 0.$$

Le minimum est atteint pour $x = 5$ m : l'enclos mesure 5 m sur 10 m, et il faut $L(5) = 10 + 10 = 20$ m de grillage.

Réponse. 5 m de profondeur sur 10 m de long ; 20 m de grillage.

Correction de l'exercice 19 - Coût moyen ou bénéfice ?

$$B(q) = 150q - (q^2 + 40q + 1600) = -q^2 + 110q - 1600.$$

$B'(q) = -2q + 110$, positive pour $q < 55$ et négative ensuite : le bénéfice est maximal pour 55 objets, avec $B(55) = 1425$ €.

Pour 40 objets, $B(40) = 1200$ € seulement : minimiser le coût moyen n'est pas maximiser le bénéfice.

Réponse. 55 objets, 1425 € de bénéfice (contre 1200 € pour 40 objets).

Correction de l'exercice 20 - Problème : la vitesse la plus économique

La durée du trajet est $\frac{400}{v}$ heures : plus le camion roule vite, moins le chauffeur est payé longtemps. À 32 €/h, cela fait $\frac{12800}{v}$.

$$C'(v) = 2 - \frac{12800}{v^2} = \frac{2(v-80)(v+80)}{v^2}, \text{ du signe de } v-80 : C \text{ décroît de } C(40) = 400 \text{ € à}$$

$C(80) = 320$ €, puis croît jusqu'à $C(110) \approx 336,36$ €.

Le coût est minimal à 80 km/h : 320 € pour le trajet.

Réponse. 80 km/h, pour un coût minimal de 320 €.