

Fonction logarithme décimal — Terminale STMG

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

Au bout de combien d'années un capital placé à 3 % aura-t-il doublé ? Combien de mois faut-il pour qu'un stock qui baisse de 15 % passe sous 20 % de sa valeur ? Le logarithme décimal répond directement à ces questions, sans tâtonner au tableur : il donne l'exposant inconnu d'une équation $a^x = b$. Ces 20 exercices corrigés installent la définition ($10^x = b \Leftrightarrow x = \log b$), les propriétés algébriques, la résolution d'équations et d'inéquations, puis les applications : temps de doublement, seuils, décibels et ajustement exponentiel. Les derniers exercices sont des problèmes complets de type bac.

Version en ligne, avec les corrections dépliantes :

mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-stmg/fonction-logarithme-decimal

Exercice 1 - Les puissances de 10

Sans calculatrice, donne $\log(1000)$, $\log(0,001)$, $\log(1)$ et $\log(10^5)$.

Exercice 2 - Des valeurs à la calculatrice

À la calculatrice, donne une valeur approchée à 10^{-4} de $\log(2)$, $\log(7)$ et $\log(0,4)$. Explique le signe de $\log(0,4)$.

Exercice 3 - Retrouver un nombre

Détermine le nombre $x > 0$ dans chaque cas : $\log(x) = 2$; $\log(x) = -1$; $\log(x) = 1,5$.

Exercice 4 - Une équation $10^x = b$

Résous l'équation $10^x = 500$. Donne la valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-3} .

Exercice 5 - Comparer sans calculer

Sans calculatrice, compare $\log(3)$ et $\log(2,5)$, puis donne le signe de $\log(0,7)$ et de $\log(12)$.

Exercice 6 - Utiliser les propriétés

On donne $\log(2) \approx 0,301$ et $\log(3) \approx 0,477$. Sans touche log, calcule une valeur approchée de $\log(6)$, $\log(8)$ et $\log(1,5)$.

Exercice 7 - Simplifier des expressions

Simplifie sans calculatrice : $A = \log(200) - \log(2)$, $B = \log(25) + \log(4)$ et $C = 3\log(5) + 3\log(2)$.

Exercice 8 - Le temps de doublement

Résous l'équation $1,05^x = 2$. Interprète le résultat pour un capital placé à 5 % par an.

Exercice 9 - Une base inférieure à 1

Une machine perd 10 % de sa valeur chaque année. Résous $0,9^x = 0,5$ et interprète.

Exercice 10 - Une équation $x^a = b$

Résous dans $]0; +\infty[$ l'équation $x^4 = 50$.

Exercice 11 - Le nombre de chiffres d'une puissance

Combien de chiffres faut-il pour écrire 3^{50} ?

Exercice 12 - Une inéquation à solution entière

Détermine le plus petit entier n tel que $1,03^n > 1,5$.

Exercice 13 - Le sens qui change

Détermine le plus petit entier n tel que $0,85^n < 0,2$.

Exercice 14 - Atteindre un montant

Un capital de 5000 € est placé à 2,5 % par an (intérêts composés). Au bout de combien d'années entières dépassera-t-il 7000 € ?

Exercice 15 - Une population qui diminue

Un village perd 1,5 % de ses habitants chaque année. Au bout de combien d'années entières aura-t-il perdu plus de 20 % de sa population ?

Exercice 16 - Deux haut-parleurs

Le niveau sonore (en dB) d'un son d'intensité I est $L = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$. Un haut-parleur produit 65 dB.

1. Quel est le niveau sonore de deux haut-parleurs identiques (les intensités s'ajoutent) ?
2. Par combien l'intensité est-elle multipliée quand le niveau augmente de 20 dB ?

Exercice 17 - Le seuil d'une suite géométrique

La suite (u_n) est définie par $u_n = 200 \times 1,12^n$. Détermine, par le calcul, le plus petit entier n tel que $u_n > 1000$.

Exercice 18 - Deux entreprises

L'entreprise A réalise 50 000 € de chiffre d'affaires, en hausse de 6 % par an ; l'entreprise B réalise 80 000 €, en hausse de 2 % par an. À partir de combien d'années A dépassera-t-elle B ?

Exercice 19 - Un ajustement exponentiel

On étudie le nombre N d'abonnés d'un service (x = rang de l'année). Après le changement de variable $y = \log(N)$, un tableur donne l'ajustement $y = 0,05x + 2$.

1. Exprime N sous la forme $k \times a^x$ et donne le taux annuel d'évolution.
2. À partir de quel rang le modèle prévoit-il plus de 1000 abonnés ?

Exercice 20 - Problème : l'élimination d'un médicament

On injecte 20 mg d'un médicament. La quantité restante dans le sang après t heures est $Q(t) = 20 \times 0,8^t$.

1. Calcule $Q(3)$ et interprète.
2. Au bout de combien de temps reste-t-il moins de 5 mg ? Donne la valeur réelle, puis le nombre d'heures entières.
3. Calcule la demi-vie du médicament (le temps au bout duquel la moitié a été éliminée).

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 - Les puissances de 10

Par définition, $\log(b)$ est l'exposant x tel que $10^x = b$.

$10^3 = 1000$, donc $\log(1000) = 3$; $10^{-3} = 0,001$, donc $\log(0,001) = -3$.

$10^0 = 1$, donc $\log(1) = 0$; enfin $\log(10^5) = 5$.

Réponse. 3 ; -3 ; 0 ; 5.

Rappel de cours. $\log(10^n) = n$ pour tout entier n .

Correction de l'exercice 2 - Des valeurs à la calculatrice

La touche log donne $\log(2) \approx 0,3010$, $\log(7) \approx 0,8451$ et $\log(0,4) \approx -0,3979$.

$0,4 < 1$ et $\log(1) = 0$: comme la fonction log est croissante, $\log(0,4) < \log(1) = 0$.

Le logarithme d'un nombre compris entre 0 et 1 est toujours négatif.

Réponse. $\approx 0,3010$; $\approx 0,8451$; $\approx -0,3979$ (négatif car $0,4 < 1$).

Correction de l'exercice 3 - Retrouver un nombre

$\log(x) = c \Leftrightarrow x = 10^c$.

$\log(x) = 2 \Leftrightarrow x = 10^2 = 100$; $\log(x) = -1 \Leftrightarrow x = 10^{-1} = 0,1$.

$\log(x) = 1,5 \Leftrightarrow x = 10^{1,5} \approx 31,62$.

Réponse. 100 ; 0,1 ; $\approx 31,62$.

Correction de l'exercice 4 - Une équation $10^x = b$

Par définition du logarithme décimal : $10^x = 500 \Leftrightarrow x = \log(500)$.

À la calculatrice, $\log(500) \approx 2,699$.

Contrôle : $10^2 = 100 < 500 < 1000 = 10^3$, donc la solution est bien entre 2 et 3.

Réponse. $x = \log(500) \approx 2,699$.

Correction de l'exercice 5 - Comparer sans calculer

La fonction log est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$: elle conserve l'ordre.

$3 > 2,5$, donc $\log(3) > \log(2,5)$.

$0,7 < 1$, donc $\log(0,7) < 0$; $12 > 1$, donc $\log(12) > 0$.

Réponse. $\log(3) > \log(2,5)$; $\log(0,7) < 0$; $\log(12) > 0$.

Correction de l'exercice 6 - Utiliser les propriétés

$6 = 2 \times 3$, donc $\log(6) = \log(2) + \log(3) \approx 0,301 + 0,477 = 0,778$.

$8 = 2^3$, donc $\log(8) = 3\log(2) \approx 0,903$.

$1,5 = \frac{3}{2}$, donc $\log(1,5) = \log(3) - \log(2) \approx 0,176$.

La calculatrice confirme : $\log(6) \approx 0,7782$, $\log(8) \approx 0,9031$, $\log(1,5) \approx 0,1761$.

Réponse. $\approx 0,778$; $\approx 0,903$; $\approx 0,176$.

Rappel de cours. $\log(ab) = \log a + \log b$, $\log(a^n) = n \log a$, $\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b$.

Correction de l'exercice 7 - Simplifier des expressions

$$A = \log\left(\frac{200}{2}\right) = \log(100) = 2.$$

$$B = \log(25 \times 4) = \log(100) = 2.$$

$$C = 3(\log(5) + \log(2)) = 3 \log(10) = 3.$$

Réponse. $A = 2$; $B = 2$; $C = 3$.

Correction de l'exercice 8 - Le temps de doublement

On prend le logarithme des deux membres : $x \log(1,05) = \log(2)$.

$$\text{Donc } x = \frac{\log(2)}{\log(1,05)} \approx 14,21.$$

Un capital placé à 5 % par an double en un peu plus de 14 ans, quel que soit le montant de départ.

Réponse. $x \approx 14,21$: le capital double en environ 14,2 ans.

Rappel de cours. $a^x = b \Leftrightarrow x = \frac{\log b}{\log a}$ ($a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$).

Correction de l'exercice 9 - Une base inférieure à 1

$$x \log(0,9) = \log(0,5), \text{ donc } x = \frac{\log(0,5)}{\log(0,9)} \approx 6,58.$$

Le quotient de deux nombres négatifs est positif : la durée trouvée est bien positive.

La machine a perdu la moitié de sa valeur au bout d'environ 6,6 ans.

Réponse. $x \approx 6,58$: la valeur est divisée par 2 en environ 6,6 ans.

Correction de l'exercice 10 - Une équation $x^a = b$

L'inconnue est ici la base : on élève les deux membres à la puissance $\frac{1}{4}$.

$$x = 50^{\frac{1}{4}} \approx 2,659.$$

$$\text{Vérification : } 2,659^4 \approx 49,99.$$

Réponse. $x = 50^{\frac{1}{4}} \approx 2,659$.

Correction de l'exercice 11 - Le nombre de chiffres d'une puissance

$$\log(3^{50}) = 50 \log(3) \approx 23,86.$$

$$\text{Donc } 23 \leq \log(3^{50}) < 24, \text{ c'est-à-dire } 10^{23} \leq 3^{50} < 10^{24}.$$

Un nombre compris entre 10^{23} et 10^{24} s'écrit avec 24 chiffres.

Réponse. 24 chiffres.

Correction de l'exercice 12 - Une inéquation à solution entière

On prend le logarithme, qui conserve l'ordre : $n \log(1,03) > \log(1,5)$.

$\log(1,03) > 0$, donc on divise sans changer le sens : $n > \frac{\log(1,5)}{\log(1,03)} \approx 13,72$.

Le plus petit entier est 14. Vérification : $1,03^{13} \approx 1,4685$ et $1,03^{14} \approx 1,5126$.

Réponse. $n = 14$.

Correction de l'exercice 13 - Le sens qui change

$n \log(0,85) < \log(0,2)$.

$\log(0,85) < 0$: en divisant par ce nombre négatif, on **change le sens** :

$n > \frac{\log(0,2)}{\log(0,85)} \approx 9,90$.

Le plus petit entier est 10. Vérification : $0,85^9 \approx 0,2316$ et $0,85^{10} \approx 0,1969$.

Réponse. $n = 10$.

Erreur fréquente. Oublier de changer le sens de l'inégalité quand on divise par $\log(a)$ avec $a < 1$.

Correction de l'exercice 14 - Atteindre un montant

Après n années, le capital vaut $5000 \times 1,025^n$. On résout $5000 \times 1,025^n > 7000$, soit $1,025^n > 1,4$.

$n > \frac{\log(1,4)}{\log(1,025)} \approx 13,63$, donc $n = 14$.

Vérification : $5000 \times 1,025^{13} \approx 6892,56$ € et $5000 \times 1,025^{14} \approx 7064,87$ €.

Réponse. Au bout de 14 ans.

Correction de l'exercice 15 - Une population qui diminue

Perdre plus de 20 %, c'est garder moins de 80 % : on résout $0,985^n < 0,8$.

$\log(0,985) < 0$, le sens change : $n > \frac{\log(0,8)}{\log(0,985)} \approx 14,76$, donc $n = 15$.

Vérification : $0,985^{14} \approx 0,8093$ et $0,985^{15} \approx 0,7972$.

Réponse. Au bout de 15 ans.

Correction de l'exercice 16 - Deux haut-parleurs

Deux haut-parleurs donnent l'intensité $2I$:

$10 \log\left(\frac{2I}{I_0}\right) = 10 \log(2) + 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right) \approx 3,01 + 65 = 68,01$ dB.

Si l'intensité est multipliée par k , le niveau augmente de $10 \log(k)$. On résout $10 \log(k) = 20$: $\log(k) = 2$, donc $k = 100$.

Doubler la source n'ajoute qu'environ 3 dB ; gagner 20 dB demande une intensité cent fois plus grande.

Réponse. ≈ 68 dB ; l'intensité est multipliée par 100.

Correction de l'exercice 17 - Le seuil d'une suite géométrique

$200 \times 1,12^n > 1000 \Leftrightarrow 1,12^n > 5$.

$n > \frac{\log(5)}{\log(1,12)} \approx 14,20$, donc $n = 15$.

Vérification : $u_{14} \approx 977,4$ et $u_{15} \approx 1094,7$. Le logarithme donne directement le rang que l'algorithme de seuil trouverait en calculant les termes un par un.

Réponse. $n = 15$.

Correction de l'exercice 18 - Deux entreprises

On résout $50\,000 \times 1,06^n > 80\,000 \times 1,02^n$. En divisant par $50\,000 \times 1,02^n > 0$:

$$\left(\frac{1,06}{1,02}\right)^n > 1,6.$$

$$\frac{1,06}{1,02} \approx 1,03922 > 1, \text{ donc } n > \frac{\log(1,6)}{\log\left(\frac{1,06}{1,02}\right)} \approx 12,22 : n = 13.$$

Vérification : après 12 ans, $A \approx 100\,610$ € et $B \approx 101\,459$ € ; après 13 ans, $A \approx 106\,646$ € et $B \approx 103\,489$ €.

Réponse. À partir de la treizième année.

Correction de l'exercice 19 - Un ajustement exponentiel

$$N = 10^{0,05x+2} = 10^2 \times \left(10^{0,05}\right)^x \approx 100 \times 1,122^x.$$

Le coefficient annuel est $10^{0,05} \approx 1,122$: une hausse d'environ 12,2 % par an.

$N > 1000 \Leftrightarrow \log(N) > 3 \Leftrightarrow 0,05x + 2 > 3 \Leftrightarrow x > 20$. Le modèle prévoit plus de 1000 abonnés à partir du rang 21.

Réponse. $N \approx 100 \times 1,122^x$ (+12,2 % par an) ; à partir du rang 21.

Correction de l'exercice 20 - Problème : l'élimination d'un médicament

$Q(3) = 20 \times 0,8^3 = 10,24$: après 3 heures, il reste 10,24 mg de médicament.

$Q(t) < 5 \Leftrightarrow 0,8^t < 0,25 \Leftrightarrow t > \frac{\log(0,25)}{\log(0,8)} \approx 6,21$ (sens changé, $\log(0,8) < 0$). En heures entières : 7 h, car $Q(6) \approx 5,243$ et $Q(7) \approx 4,194$.

La demi-vie vérifie $0,8^t = 0,5 : t = \frac{\log(0,5)}{\log(0,8)} \approx 3,11$ h, soit environ 3 h 06 min.

Cohérence : en 2 demi-vies ($\approx 6,21$ h), la quantité est divisée par 4, de 20 à 5 mg, ce qui retrouve la question précédente.

Réponse. $Q(3) = 10,24$ mg ; $t > 6,21$ h (7 h entières) ; demi-vie $\approx 3,11$ h.