

Fonctions exponentielles — Terminale STMG

20 exercices corrigés · mathlvl.fr

Énoncés et corrigés détaillés

Présentation

Un capital placé à 4 % par an, une voiture qui perd 12 % de sa valeur chaque année, une population qui gagne 0,5 % par an : toutes ces grandeurs évoluent d'un pourcentage constant, et la fonction $x \mapsto a^x$ permet de les calculer à tout instant, y compris après deux ans et demi ou trois ans en arrière. Ces 20 exercices corrigés installent le calcul de a^x pour des exposants décimaux ou négatifs, le sens de variation de $k \times a^x$, les propriétés algébriques, puis le taux d'évolution moyen, outil central de la filière. Les derniers exercices sont des problèmes de gestion et d'économie complets.

Version en ligne, avec les corrections dépliantes :

mathlvl.fr/exercices-corriges/terminale-stmg/fonctions-exponentielles

Exercice 1 - Calculer des puissances

Calcule, arrondis à 10^{-4} : $1,08^0$, $1,08^2$, $1,08^{-1}$ et $1,08^{0,5}$.

Exercice 2 - Des valeurs exactes

Donne la valeur exacte de $16^{0,5}$, $27^{\frac{1}{3}}$ et $0,25^{-1}$.

Exercice 3 - Un placement de durée non entière

Un capital de 2500 € est placé à 4 % par an : $C(x) = 2500 \times 1,04^x$, x en années.

1. Calcule sa valeur après 1 an et 6 mois.
2. Calcule sa valeur après 3 ans et 3 mois.

Exercice 4 - Sens de variation

Donne le sens de variation de $f(x) = 1,05^x$, $g(x) = 0,7^x$, $h(x) = -3 \times 1,2^x$ et $m(x) = 500 \times 0,9^x$.

Exercice 5 - Regrouper des puissances

Écris $1,07^3 \times 1,07^2$ sous la forme d'une seule puissance et calcule-la. Interprète pour un prix qui augmente de 7 % par an.

Exercice 6 - Le rôle de la base

Compare sans calculatrice : $1,3^{2,5}$ et $1,3^4$; $0,6^{-1}$ et $0,6^2$.

Exercice 7 - Une voiture qui se déprécie

Une voiture achetée 7000 € perd 12 % de sa valeur par an. Écris le modèle $V(x)$ et estime sa valeur au bout de 2 ans et demi, puis de 4 ans.

Exercice 8 - Simplifier une expression

Montre que, pour tout réel x , $\frac{3^{x+2}}{3^x} = 9$ et que $(2^x)^3 = 8^x$.

Exercice 9 - Taux moyen sur deux et trois ans

Calcule le taux annuel moyen dans chaque cas.

1. Un prix a augmenté de 44 % en 2 ans.
2. Un capital a été multiplié par 1,331 en 3 ans.

Exercice 10 - Taux moyen d'une hausse de 60 %

Le prix d'un logement a augmenté de 60 % en 5 ans. Calcule le taux annuel moyen, puis le taux mensuel équivalent à 6 % par an.

Exercice 11 - Une baisse moyenne

Les ventes d'un magazine ont baissé de 19 % en deux ans. Calcule le taux annuel moyen de baisse.

Exercice 12 - Trois années contrastées

Un chiffre d'affaires a évolué de +20 %, -10 % puis +15 %. Calcule le coefficient global et le taux annuel moyen.

Exercice 13 - Passé et futur d'un salaire

Un salaire annuel de 40 000 € augmente de 2,5 % par an. Quel était-il il y a 4 ans ? Quel sera-t-il dans 2 ans et demi ?

Exercice 14 - Repérer une erreur

Un élève affirme : « $2^3 \times 2^5 = 4^8$ » et « $f(x) = -2 \times 0,5^x$ est décroissante car $0,5 < 1$ ». Corrige.

Exercice 15 - Une demi-vie

La masse d'un produit radioactif de 3000 mg est divisée par 2 tous les 6 jours : $M(t) = 3000 \times 0,5^{\frac{t}{6}}$, t en jours. Calcule la masse restante après 10 jours.

Exercice 16 - Deux placements

Le placement A, de 1000 €, rapporte 5 % par an ; le placement B, de 1300 €, rapporte 2 % par an.

1. Écris les modèles $A(t)$ et $B(t)$.
2. À l'aide des valeurs pour $t = 8, 9$ et 10 , détermine à partir de quelle année A vaut plus que B.

Exercice 17 - Un coefficient semestriel

Une population augmente de 30 % en un an. Quel est le coefficient multiplicateur semestriel équivalent ? Et le taux semestriel ? Vérifie avec une hausse annuelle de 69 %.

Exercice 18 - Un médicament heure par heure

Un médicament a une demi-vie de 24 heures. On en injecte 100 mg.

1. Quel est le coefficient multiplicateur horaire ?
2. Quelle quantité reste-t-il au bout de 36 heures ?

Exercice 19 - Doublement et taux moyen

Un capital placé à 4 % par an est multiplié par $1,04^{10}$ en dix ans. Une autre banque promet +20 % en quatre ans. Compare les deux offres à l'aide de leurs taux annuels moyens.

Exercice 20 - Synthèse : la valeur d'une entreprise

La valeur d'une entreprise, 150 000 € aujourd'hui, augmente de 3 % par an : $V(x) = 150\,000 \times 1,03^x$.

1. Justifie que V est croissante.
2. Calcule $V(4)$ et $V(-2)$, et interprète.
3. Calcule le coefficient mensuel équivalent et le coefficient sur dix ans.

Corrigés détaillés

Les corrections des 20 exercices, dans l'ordre des énoncés.

Correction de l'exercice 1 - Calculer des puissances

$1,08^0 = 1$: toute puissance d'exposant 0 vaut 1.

$$1,08^2 = 1,1664.$$

$1,08^{-1} = \frac{1}{1,08} \approx 0,9259$: l'exposant négatif correspond à l'inverse.

$$1,08^{0,5} = \sqrt{1,08} \approx 1,0392.$$

Réponse. 1 ; 1,1664 ; $\approx 0,9259$; $\approx 1,0392$.

Rappel de cours. $a^0 = 1$, $a^{-x} = \frac{1}{a^x}$, $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$.

Correction de l'exercice 2 - Des valeurs exactes

$$16^{0,5} = \sqrt{16} = 4.$$

$27^{\frac{1}{3}}$ est le nombre dont le cube vaut 27 : 3, car $3^3 = 27$.

$$0,25^{-1} = \frac{1}{0,25} = 4.$$

Réponse. 4 ; 3 ; 4.

Correction de l'exercice 3 - Un placement de durée non entière

Un an et six mois font $x = 1,5$: $C(1,5) = 2500 \times 1,04^{1,5} \approx 2651,49$ €.

Trois ans et trois mois font $x = 3 + \frac{3}{12} = 3,25$: $C(3,25) = 2500 \times 1,04^{3,25} \approx 2839,87$ €.

On convertit toujours les mois en fraction d'année, puisque le coefficient 1,04 est annuel.

Réponse. Environ 2651,49 € et 2839,87 €.

Correction de l'exercice 4 - Sens de variation

f : base $1,05 > 1$, donc croissante.

g : base $0,7 < 1$, donc décroissante.

h : $1,2^x$ est croissante, mais le coefficient -3 est négatif et inverse le sens : h est décroissante.

m : base $0,9 < 1$ et coefficient $500 > 0$: décroissante.

Réponse. f croissante ; g , h et m décroissantes.

Erreur fréquente. Oublier le signe de k : un coefficient négatif inverse le sens de variation de a^x .

Correction de l'exercice 5 - Regrouper des puissances

On additionne les exposants : $1,07^3 \times 1,07^2 = 1,07^5 \approx 1,4026$.

Trois années puis deux années de hausse à 7 % équivalent à cinq années de hausse : le prix augmente d'environ 40,26 %.

Réponse. $1,07^5 \approx 1,4026$, soit +40,26 % en 5 ans.

Rappel de cours. $a^x \times a^y = a^{x+y}$.

Correction de l'exercice 6 - Le rôle de la base

$1,3 > 1$: la fonction $x \mapsto 1,3^x$ est croissante, et $2,5 < 4$, donc $1,3^{2,5} < 1,3^4$.

$0,6 < 1$: la fonction $x \mapsto 0,6^x$ est décroissante, et $-1 < 2$, donc l'ordre s'inverse : $0,6^{-1} > 0,6^2$.

Contrôle : $0,6^{-1} \approx 1,67$ et $0,6^2 = 0,36$.

Réponse. $1,3^{2,5} < 1,3^4$; $0,6^{-1} > 0,6^2$.

Correction de l'exercice 7 - Une voiture qui se déprécie

Perdre 12 % par an, c'est multiplier par 0,88 : $V(x) = 7000 \times 0,88^x$.

$V(2,5) = 7000 \times 0,88^{2,5} \approx 5085,16$ €.

$V(4) = 7000 \times 0,88^4 \approx 4197,87$ € : en quatre ans, la voiture a perdu environ 40 % de sa valeur.

Réponse. $V(x) = 7000 \times 0,88^x$; environ 5085,16 € et 4197,87 €.

Correction de l'exercice 8 - Simplifier une expression

$\frac{3^{x+2}}{3^x} = 3^{(x+2)-x} = 3^2 = 9$: on soustrait les exposants.

$(2^x)^3 = 2^{3x} = (2^3)^x = 8^x$: on multiplie les exposants, puis on regroupe la base.

Réponse. $\frac{3^{x+2}}{3^x} = 9$ et $(2^x)^3 = 8^x$.

Rappel de cours. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ et $(a^x)^n = a^{nx}$.

Correction de l'exercice 9 - Taux moyen sur deux et trois ans

Premier cas : $1 + t_m = 1,44^{\frac{1}{2}} = \sqrt{1,44} = 1,2$, soit +20 % par an.

Second cas : $1 + t_m = 1,331^{\frac{1}{3}} = 1,1$, soit +10 % par an.

Contrôles : $1,2^2 = 1,44$ et $1,1^3 = 1,331$.

Réponse. 20 % et 10 % par an.

Rappel de cours. Taux moyen sur n périodes : $1 + t_m = (CM_{\text{global}})^{\frac{1}{n}}$.

Correction de l'exercice 10 - Taux moyen d'une hausse de 60 %

$1 + t_m = 1,6^{\frac{1}{5}} = 1,6^{0,2} \approx 1,09856$, soit environ 9,86 % par an, et non $\frac{60}{5} = 12$ %.

Pour 6 % par an, le coefficient mensuel est $1,06^{\frac{1}{12}} \approx 1,004868$, soit environ 0,49 % par mois.

Réponse. Environ 9,86 % par an ; environ 0,49 % par mois.

Erreur fréquente. Diviser le taux global par le nombre de périodes : les évolutions se composent, elles ne s'additionnent pas.

Correction de l'exercice 11 - Une baisse moyenne

Le coefficient global est 0,81, sur deux ans : $1 + t_m = 0,81^{\frac{1}{2}} = 0,9$.

Le taux annuel moyen vaut $0,9 - 1 = -0,1$: les ventes ont baissé en moyenne de 10 % par an.

Contrôle : $0,9 \times 0,9 = 0,81$.

Réponse. -10 % par an.

Correction de l'exercice 12 - Trois années contrastées

$CM_{\text{global}} = 1,2 \times 0,9 \times 1,15 = 1,242$, soit +24,2 % en trois ans.

$1 + t_m = 1,242^{\frac{1}{3}} \approx 1,07491$: environ +7,49 % par an.

Le taux moyen est inférieur à la moyenne des trois taux, $\frac{20 - 10 + 15}{3} \approx 8,33$ %.

Réponse. 1,242 ; environ 7,49 % par an.

Correction de l'exercice 13 - Passé et futur d'un salaire

Avec $S(x) = 40\,000 \times 1,025^x$, il y a quatre ans correspond à $x = -4$:

$$S(-4) = \frac{40\,000}{1,025^4} \approx 36\,238,03 \text{ €}.$$

Dans deux ans et demi : $S(2,5) = 40\,000 \times 1,025^{2,5} \approx 42\,547,07 \text{ €}$.

L'exposant négatif traduit un retour dans le passé : on divise par le coefficient.

Réponse. Environ 36 238,03 € il y a 4 ans ; 42 547,07 € dans 2,5 ans.

Correction de l'exercice 14 - Repérer une erreur

Première erreur : pour un produit de même base, on garde la base et on additionne les exposants, $2^3 \times 2^5 = 2^8 = 256$; $4^8 = 65\,536$ est faux.

Seconde erreur : $0,5^x$ est décroissante, mais le coefficient -2 est négatif et inverse le sens. f est croissante.

Contrôle : $f(0) = -2$ et $f(1) = -1$, donc $f(1) > f(0)$.

Réponse. $2^3 \times 2^5 = 2^8$; f est croissante.

Correction de l'exercice 15 - Une demi-vie

En t jours, il s'écoule $\frac{t}{6}$ demi-vies : on multiplie autant de fois par 0,5.

$$M(10) = 3000 \times 0,5^{\frac{10}{6}} \approx 944,94 \text{ mg}.$$

Contrôle : après 6 jours, il reste 1500 mg, et après 12 jours 750 mg ; 944,94 mg est bien entre les deux.

Réponse. Environ 944,94 mg.

Correction de l'exercice 16 - Deux placements

$A(t) = 1000 \times 1,05^t$ et $B(t) = 1300 \times 1,02^t$, toutes deux croissantes.

$A(8) \approx 1477,46$ et $B(8) \approx 1523,16$; $A(9) \approx 1551,33$ et $B(9) \approx 1553,62$; $A(10) \approx 1628,89$ et $B(10) \approx 1584,69$.

A rattrape B au cours de la dixième année : à partir de $t = 10$, le placement A vaut plus.

Le taux plus élevé finit par compenser l'écart de départ de 300 €.

Réponse. A dépasse B à partir de la dixième année.

Correction de l'exercice 17 - Un coefficient semestriel

Le coefficient semestriel c vérifie $c^2 = 1,3$, donc $c = 1,3^{\frac{1}{2}} \approx 1,1402$: environ +14,02 % par semestre, et non 15 %.

Pour une hausse annuelle de 69 % : $c = 1,69^{\frac{1}{2}} = 1,3$, soit exactement +30 % par semestre, puisque $1,3^2 = 1,69$.

Réponse. $c \approx 1,1402$, soit +14,02 % par semestre ; $1,69^{\frac{1}{2}} = 1,3$.

Correction de l'exercice 18 - Un médicament heure par heure

Toutes les 24 heures, la quantité est multipliée par 0,5. Le coefficient horaire c vérifie $c^{24} = 0,5$, donc $c = 0,5^{\frac{1}{24}} \approx 0,97153$: environ 2,85 % de moins chaque heure.

Au bout de 36 heures : $100 \times 0,5^{\frac{36}{24}} = 100 \times 0,5^{1,5} \approx 35,36$ mg.

Réponse. $c \approx 0,97153$; environ 35,36 mg.

Correction de l'exercice 19 - Doublement et taux moyen

Première offre : 4 % par an, soit $1,04^{10} \approx 1,4802$ en dix ans.

Seconde offre : $1 + t_m = 1,2^{\frac{1}{4}} \approx 1,04664$, soit environ 4,66 % par an.

La seconde offre est plus intéressante : 4,66 % par an contre 4 %. Comparer des taux sur des durées différentes impose de les ramener à un taux annuel moyen.

Réponse. Seconde offre : environ 4,66 % par an contre 4 %.

Correction de l'exercice 20 - Synthèse : la valeur d'une entreprise

$k = 150\,000 > 0$ et $a = 1,03 > 1$: V est strictement croissante.

$V(4) \approx 168\,826,32$ € : valeur dans quatre ans. $V(-2) = \frac{150\,000}{1,03^2} \approx 141\,389,39$ € : valeur il y a deux ans.

Coefficient mensuel : $1,03^{\frac{1}{12}} \approx 1,002466$, soit environ 0,25 % par mois. Sur dix ans : $1,03^{10} \approx 1,3439$, soit environ +34,39 %.

Réponse. V croissante · $\approx 168\,826,32$ € et $141\,389,39$ € · $\approx 1,002466$ et $1,3439$.